MAT 2455 – Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia III
Prova 2 – 14/05/2013 – Turma A

Questão 1.

a) (1,0 ponto) Um fio tem o formato da curva $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 = 4,\ y \geq 0\}$. Se sua densidade de massa é dada por $\delta(x,y) = x^2 + y^2$, determine a massa total do fio.

b) (2,5 pontos) Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{-y\,\mathrm{d}x + (x-1)\,\mathrm{d}y}{(x-1)^2 + y^2}$, onde γ é a curva dada por $x^2 + y^2 = 9$, $x \geq 0$, orientada de $(0,3)$ a $(0,-3)$.

Solução

(a) Primeiramente encontremos uma parametrização para a curva

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 = 4,\ y \geq 0\}$$

Note que esta curva é uma semi-circunferência, uma vez que sua equação pode ser posta na forma:

$$\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

Dessa forma, uma possível parametrização para esta curva é dada por: $\gamma(t) = (2\cos t + 2,\ 2\mathrm{sen}\, t)$ para $t \in [0,\ \pi]$.

A massa do fio pode ser dada por:

$$m = \int_0^\pi \delta(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\mathrm{d}t$$

Note que $\delta(\gamma(t)) = 8 + 8\cos t$ e que $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-2\mathrm{sen}\, t)^2 + (2\cos t)^2} = 2$, logo:

$$m = \int_0^\pi (8 + 8\cos t)(2)\mathrm{d}t = 16\pi + \Big[16\mathrm{sen}\, t\Big]_0^\pi = 16\pi$$

(b) Considere o campo:

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{(x-1)^2 + y^2},\ \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2}\right) = (P(x,y), Q(x,y))$$

Note que o domínio de $\vec{F}$ pode ser escrito como $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (1,0)\}$. Calculando o rotacional de $\vec{F}$,

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]\vec{k} = \left[\frac{(x-1)^2 + y^2 - 2(x-1)^2 + (x-1)^2 + y^2 - 2y^2}{[(x-1)^2 + y^2]^2}\right]\vec{k} = \vec{0}$$

Nota-se que o mesmo também está definido para todo $(x,y) \in D$. Considere agora, a seguinte parametrização para a curva γ dada por $x^2 + y^2 = 9$, $x \geq 0$, orientada de $(0,3)$ a $(0,-3)$:

$$\gamma(t) = (3\cos t, -3\mathrm{sen}\, t) \qquad \text{para } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$$

Definam-se agora as curvas:

$$\begin{aligned} \alpha(u) &= (0, u) && \text{para } u \in [-3, +3] \\ \beta_\rho(v) &= (1 + \rho\cos v,\ \rho\operatorname{sen} v) && \text{para } v \in [-\pi, +\pi] \text{ e } \rho \text{ constante} \end{aligned}$$

Note que a a união das curvas α e γ é fronteira de um compacto K_0 do $\mathbb{R}^2$. Sendo $(1,0)$ um ponto interior a K_0, pode-se tomar $\rho > 0$ suficientemente pequeno para que a imagem da curva β esteja contida no interior de K_0. Assim sendo, o compacto $K = K_0 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \geq \rho^2\}$, é um domínio simplesmente conexo para o campo $\vec{F}$ e para seu rotacional, cuja fronteira é dada por $\alpha \cup \beta_\rho \cup \gamma$ (uma curva fechada, simples e lisa por partes). Então, pode-se aplicar o teorema de Green para o campo $\vec{F}$ em K. Notando no entanto que todas as curvas α, β_ρ e γ estão orientadas de forma contrária à enuncidada no teorema, tem-se:

$$\int_\alpha \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{\beta_\rho} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_\gamma \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\iint_K \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{k}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

Como $\alpha'(u) = (0,1)$, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_\alpha \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} &= \int_{-3}^{+3} \left(\frac{-u}{u^2+1}, \frac{-1}{1+u^2}\right)\cdot(0,1)\,\mathrm{d}u = \\ &-\int_{-3}^{+3} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = -2\int_0^{+3} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = -2\Big[\arctan u\Big]_0^{+3} = -2\arctan 3 \end{aligned}$$

Como $\beta'_\rho(v) = (-\rho\operatorname{sen} v,\ \rho\cos v)$, tem-se:

$$\int_{\beta_\rho} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{-\rho\operatorname{sen} t}{\rho^2}, \frac{\rho\cos t}{\rho^2}\right)\cdot(-\rho\operatorname{sen} v,\ \rho\cos v)\,\mathrm{d}v = \int_{-\pi}^{+\pi} 1\,\mathrm{d}v = 2\pi$$

Finalmente,

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\int_\alpha \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} - \int_{\beta_\rho} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = 2\,(\arctan 3 - \pi)$$

Questão 2.

a) (2,0 pontos) Calcule a integral de linha $\displaystyle\int_C (17xy + 3x^4)\mathrm{d}x + \Big[(27+5y^6)^{1/3} + 2x^2\Big]\,\mathrm{d}y$, onde C é o arco de elipse $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ com $y \geq 0$, orientada de $(-2,0)$ a $(2,0)$.

b) (1,5 ponto) Seja $\vec{F}(x,y) = \left(xy^2 - x^4y\right)\vec{i} + \left(x^2y - \dfrac{2x^3}{3} + 2x + xy^2\right)\vec{j}$. Mostre que não existe curva fechada, simples, lisa por partes $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ tal que $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$.

Solução

(a) Defina-se o campo:

$$\vec{F}(x,y) = (17xy + 3x^4)\vec{i} + \Big[(27+5y^6)^{1/3} + 2x^2\Big]\vec{j} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$$

Note que $\vec{F}$ está definido para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e que:

$$\operatorname{rot} \vec{F}(x,y) = \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] \vec{k} = [4x - 17x]\,\vec{k} = -13x\,\vec{k}$$

Tomemos a seguinte parametrização para a curva C, que preserva o sentido de orientação definido:

$$C:\ \gamma(t) = 2\cos t\,\vec{i} - \operatorname{sen} t\,\vec{j} \qquad \text{para } t \in [\pi, 2\pi]$$

Definamos ainda uma curva B, que é um segmento de reta orientado de $(2,0)$ a $(-2,0)$ e que pode ser parametrizada segundo a equação:

$$B:\ \beta(s) = -s\,\vec{i} \qquad \text{para } s \in [-2, 2]$$

As curva $B \cup C$ é fronteira de um compacto $K \subset \mathbb{R}^2$, sendo uma curva fechada, simples e lisa por partes. Além disso K é um domínio simplesmente conexo para o campo $\vec{F}$ e $\operatorname{rot} \vec{F}$ está definido para todo $(x,y) \in K$. Assim sendo, pode-se aplicar o teorema de Green para obeter o valor da integral solicitada. Notando, no entanto que a orientação atribuída à curva $B \cup C$ pela parametrização feita é contrária à do enunciado do teorema, de tal forma que, tem-se:

$$\int_B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\iint_K \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{k}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Primeiramente, façamos tomemos a seguinte descrição para K em coordenadas polares: $K = \big\{(2\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta \le \pi\big\}$. Sabendo-se que o módulo do jacobiano desta transformação vale $|J| = 2\rho$, tem-se:

$$\begin{aligned} -\iint_K \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{k}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_K 13x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi}\int_0^1 52\rho^2\cos\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\ &= 52\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 \Big[\sin\theta\Big]_0^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

Ainda, como $\beta'(s) = -\vec{i}$, tem-se:

$$\int_B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{-2}^{+2} (-3s^4)\,\mathrm{d}s = -6\int_0^2 (s^4)\,\mathrm{d}s = -6\left[\frac{s^5}{5}\right]_0^2 = -\frac{192}{5}$$

Finalmente,

$$\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\iint_K \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{k}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{192}{5}$$

(b) Considere o campo:

$$\vec{F}(x,y) = \left(xy^2 - x^4y\right)\vec{i} + \left(x^2y - \frac{2x^3}{3} + 2x + xy^2\right)\vec{j} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$$

Note que $\vec{F}$ está definido para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ assim como seu rotacional que é dado por:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F}(x,y) &= \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] \vec{k} = \left[2xy - 2x^2 + 2 + y^2 - 2xy + x^4\right] \vec{k} \\ \operatorname{rot} \vec{F}(x,y) &= \left[(x^2-1)^2 + y^2 + 1\right] \vec{k} \end{aligned}$$

Seja γ uma curva fechada, simples, lisa por partes em $\mathbb{R}^2$. Sem perda de generalidade, suponhamos que γ esteja orientada no sentido anti-horário (uma vez que, caso a orientação seja feita no sentido horário, o valor da integral será o oposto do valor obtido com orientação anti-horária). Sendo γ uma curva fechada simples e lisa por partes no $\mathbb{R}^2$, pode-se afirmar que a mesma é fronteira de um compacto $K \subset \mathbb{R}^2$, que é um domínio simplesmente conexo para o campo $\vec{F}$, com $\operatorname{rot}\vec{F}$ definido para todo $(x, y) \in K$. Assim sendo, a aplicação do teorema de Green resulta em:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_K \operatorname{rot}\vec{F} \cdot \vec{k}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_K \left[(x^2-1)^2 + y^2 + 1\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Utilizando uma propriedade da integral, como $(x^2-1)^2 + y^2 + 1 \geq 1$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, então:

$$\iint_K \left[(x^2-1)^2 + y^2 + 1\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geq \iint_K 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y > 0$$

O fato de a última integral ser estritamente positiva se deve ao fato de corresponder à área de K, onde K é um compacto do $\mathbb{R}^2$. Assim sendo:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_K \left[(x^2-1)^2 + y^2 + 1\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y > 0$$

Isto demonstra que não existe curva fechada, simples, lisa por partes $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ tal que $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$.

Questão 3.

a) (2,0 pontos) Verifique que o campo vetorial em $\mathbb{R}^3$

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(2x\cos y + yz,\ xz - x^2\operatorname{sen} y + \frac{2}{\pi}\operatorname{sen} z,\ xy + \frac{2y}{\pi}\cos z\right)$$

é conservativo e determine um potencial para $\vec{F}$.

b) (1,0 ponto) Calcule a integral de linha

$$\int_\gamma (2x\cos y + yz)\,\mathrm{d}x + \left(xz - x^2\operatorname{sen} y + \frac{2}{\pi}\operatorname{sen} z\right)\mathrm{d}y + \left(xy + \frac{2y}{\pi}\cos z\right)\mathrm{d}z$$

onde γ é a curva $\begin{cases} x = 2e^{t^2-1}\arctan t \\ y = \dfrac{\pi t}{2} \\ z = 1 - t^4 \end{cases}$, $0 \leq t \leq 1$.

Solução

(a) Seja o campo vetorial em $\mathbb{R}^3$

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(2x\cos y + yz,\ xz - x^2\operatorname{sen} y + \frac{2}{\pi}\operatorname{sen} z,\ xy + \frac{2y}{\pi}\cos z\right) = (P, Q, R)$$

Note que $\vec{F}$ está definida para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, de tal forma que, se existir uma função $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que:

$$P(x, y, z) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y, z) \qquad Q(x, y, z) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y, z) \qquad R(x, y, z) = \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, z)$$

diz-se, por definição, que o campo $\vec{F}$ é conservativo e ϕ é diata função potencial de $\vec{F}$. Assim, procuremos uma função potencial para $\vec{F}$. Primeiramente, fica claro que:

$$\begin{aligned}
\phi(x, y, z) &= \int P \, \mathrm{d}x + f_1(y, z) = x^2 \cos y + xyz + f_1(y, z) \\
\phi(x, y, z) &= \int Q \, \mathrm{d}x + f_2(x, z) = xyz + x^2 \cos y + \frac{2y}{\pi} \operatorname{sen} z + f_2(x, z) \\
\phi(x, y, z) &= \int R \, \mathrm{d}x + f_3(x, y) = xyz + \frac{2y}{\pi} \operatorname{sen} z + f_3(x, y)
\end{aligned}$$

Inspecionando-se as expressões anteriores, nota-se que, por exemplo, a adoção de

$$\begin{aligned}
f_1(y, z) &= \frac{2y}{\pi} \operatorname{sen} z \\
f_2(x, z) &= 0 \\
f_3(x, y) &= x^2 \cos y
\end{aligned}$$

leva à seguinte expressão para ϕ:

$$\phi(x, y, z) = xyz + x^2 \cos y + \frac{2y}{\pi} \operatorname{sen} z$$

Esta função obtida é um potencial de $\vec{F}$.

(b) Sendo $\vec{F}$ o campo definido no item (a), note que a integral solicitada corresponde exatamente a $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$. Como $\vec{F}$ é um campo conservativo e a função ϕ obtida no item (a) é um potencial para $\vec{F}$, pode-se afirmar que:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \Big[\phi\big(\gamma(t)\big)\Big]_{t=0}^{t=1}$$

Para a curva dada:

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= (0,\, 0,\, 1) \\
\gamma(1) &= \left(\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2},\, 0\right)
\end{aligned}$$

Notando que:

$$\begin{aligned}
\phi\,(0,\, 0,\, 1) &= 0 \\
\phi\left(\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2},\, 0\right) &= 0
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \Big[\phi\big(\gamma(t)\big)\Big]_{t=0}^{t=1} = 0$$

MAT 2455 – Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia III
Prova 2 – 14/05/2013 – Turma B

Questão 1.

a) (1,0 ponto) Um fio tem o formato da curva $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + y^2 = 9,\ y \geq 0\}$. Se sua densidade de massa é dada por $\delta(x,y) = x^2 + y^2$, determine a massa total do fio.

b) (2,5 pontos) Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{-y\,\mathrm{d}x + (x-1)\,\mathrm{d}y}{(x-1)^2 + y^2}$, onde γ é a curva dada por $x^2 + y^2 = 4$, $x \geq 0$, orientada de $(0,2)$ a $(0,-2)$.

Solução

(a) Primeiramente encontremos uma parametrização para a curva

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + y^2 = 9,\ y \geq 0\}$$

Note que esta curva é uma semi-circunferência, uma vez que sua equação pode ser posta na forma:

$$\left(\frac{x-3}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$$

Dessa forma, uma possível parametrização para esta curva é dada por $\gamma(t) = (3\cos t + 3,\ 3\mathrm{sen}\, t)$ para $t \in [0,\ \pi]$.

A massa do fio pode ser dada por

$$m = \int_0^\pi \delta(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\mathrm{d}t$$

Note que $\delta(\gamma(t)) = 18 + 18\cos t$, e que $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-3\mathrm{sen}\, t)^2 + (3\cos t)^2} = 3$, logo:

$$m = \int_0^\pi (18 + 18\cos t)(3)\mathrm{d}t = 54\pi + \Big[54\mathrm{sen}\, t\Big]_0^\pi = 54\pi$$

(b) Considere o campo:

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{(x-1)^2 + y^2},\ \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2}\right) = (P(x,y), Q(x,y))$$

Note que o domínio de $\vec{F}$ pode ser escrito como $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (1,0)\}$. Calculando o rotacional de $\vec{F}$,

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]\vec{k} = \left[\frac{(x-1)^2 + y^2 - 2(x-1)^2 + (x-1)^2 + y^2 - 2y^2}{[(x-1)^2 + y^2]^2}\right]\vec{k} = \vec{0}$$

Nota-se que o mesmo também está definido para todo $(x,y) \in D$. Considere agora, a seguinte parametrização para a curva γ dada por $x^2 + y^2 = 4$, $x \geq 0$, orientada de $(0,2)$ a $(0,-2)$:

$$\gamma(t) = (2\cos t, -2\mathrm{sen}\, t) \qquad \text{para } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$$

Definam-se agora as curvas:

$$\begin{aligned} &\alpha(u) = (0, u) && \text{para } u \in [-2, +2] \\ &\beta_\rho(v) = (1 + \rho\cos v,\ \rho\operatorname{sen} v) && \text{para } v \in [-\pi, +\pi] \text{ e } \rho \text{ constante} \end{aligned}$$

Note que a a união das curvas α e γ é fronteira de um compacto K_0 do $\mathbb{R}^2$. Sendo $(1,0)$ um ponto interior a K_0, pode-se tomar $\rho > 0$ suficientemente pequeno para que a imagem da curva β esteja contida no interior de K_0. Assim sendo, o compacto $K = K_0 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \geq \rho^2\}$, é um domínio simplesmente conexo para o campo $\vec{F}$ e para seu rotacional, cuja fronteira é dada por $\alpha \cup \beta_\rho \cup \gamma$ (uma curva fechada, simples e lisa por partes). Então, pode-se aplicar o teorema de Green para o campo $\vec{F}$ em K. Notando no entanto que todas as curvas α, β_ρ e γ estão orientadas de forma contrária à enuncidada no teorema, tem-se:

$$\int_\alpha \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{\beta_\rho} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_\gamma \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\iint_K \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{k}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

Como $\alpha'(u) = (0,1)$, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_\alpha \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} &= \int_{-2}^{+2} \left(\frac{-u}{u^2+1}, \frac{-1}{1+u^2}\right)\cdot(0,1)\,\mathrm{d}u = \\ &-\int_{-2}^{+2} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = -2\int_0^{+2}\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = -2\Big[\arctan u\Big]_0^{+2} = -2\arctan 2 \end{aligned}$$

Como $\beta'_\rho(v) = (-\rho\operatorname{sen} v,\ \rho\cos v)$, tem-se:

$$\int_{\beta_\rho} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{-\rho\operatorname{sen} t}{\rho^2}, \frac{\rho\cos t}{\rho^2}\right)\cdot(-\rho\operatorname{sen} v,\ \rho\cos v)\,\mathrm{d}v = \int_{-\pi}^{+\pi} 1\,\mathrm{d}v = 2\pi$$

Finalmente,

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\int_\alpha \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} - \int_{\beta_\rho} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = 2\,(\arctan 2 - \pi)$$

Questão 2.

a) (2,0 pontos) Calcule a integral de linha $\displaystyle\int_C (15xy + 3x^3)\mathrm{d}x + \Big[(27+6y^4)^{1/3} + 3x^2\Big]\,\mathrm{d}y$, onde C é o arco de elipse $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ com $y \geq 0$, orientada de $(-2,0)$ a $(2,0)$.

b) (1,5 ponto) Seja $\vec{F}(x,y) = \left(xy^2 - x^6 y\right)\vec{i} + \left(x^2 y - \dfrac{x^4}{2} + 2x + xy^2\right)\vec{j}$. Mostre que não existe curva fechada, simples, lisa por partes $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ tal que $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$.

Solução

(a) Defina-se o campo:

$$\vec{F}(x,y) = (15xy + 3x^3)\vec{i} + \Big[(27+6y^4)^{1/3} + 3x^2\Big]\vec{j} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$$

Note que $\vec{F}$ está definido para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e que:

$$\operatorname{rot} \vec{F}(x,y) = \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] \vec{k} = [6x - 15x]\,\vec{k} = -9x\,\vec{k}$$

Tomemos a seguinte parametrização para a curva C, que preserva o sentido de orientação definido:

$$C:\ \gamma(t) = 2\cos t\,\vec{i} - \operatorname{sen} t\,\vec{j} \qquad \text{para } t \in [\pi, 2\pi]$$

Definamos ainda uma curva B, que é um segmento de reta orientado de $(2,0)$ a $(-2,0)$ e que pode ser parametrizada segundo a equação:

$$B:\ \beta(s) = -s\,\vec{i} \qquad \text{para } s \in [-2,2]$$

As curva $B \cup C$ é fronteira de um compacto $K \subset \mathbb{R}^2$, sendo uma curva fechada, simples e lisa por partes. Além disso K é um domínio simplesmente conexo para o campo $\vec{F}$ e $\operatorname{rot} \vec{F}$ está definido para todo $(x,y) \in K$. Assim sendo, pode-se aplicar o teorema de Green para obeter o valor da integral solicitada. Notando, no entanto que a orientação atribuída à curva $B \cup C$ pela parametrização feita é contrária à do enunciado do teorema, de tal forma que, tem-se:

$$\int_B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\iint_K \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{k}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Primeiramente, façamos tomemos a seguinte descrição para K em coordenadas polares: $K = \big\{(2\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta \le \pi\big\}$. Sabendo-se que o módulo do jacobiano desta transformação vale $|J| = 2\rho$, tem-se:

$$\begin{aligned} -\iint_K \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{k}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_K 9x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi}\int_0^1 36\rho^2\cos\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\ &= 36\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 \left[\sin\theta\right]_0^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

Ainda, como $\beta'(s) = -\vec{i}$, tem-se:

$$\int_B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{-2}^{+2} (-3s^3)\,\mathrm{d}s = -3\int_{-2}^{2} s^3\,\mathrm{d}s = -3\left[\frac{s^4}{4}\right]_{-2}^{2} = 0.$$

Finalmente,

$$\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\iint_K \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{k}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0.$$

(b) Considere o campo:

$$\vec{F}(x,y) = \left(xy^2 - x^6 y\right)\vec{i} + \left(x^2 y - \frac{x^4}{2} + 2x + xy^2\right)\vec{j} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$$

Note que $\vec{F}$ está definido para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ assim como seu rotacional que é dado por:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F}(x,y) &= \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] \vec{k} = \left[2xy - 2x^3 + 2 + y^2 - 2xy + x^6\right] \vec{k} \\ \operatorname{rot} \vec{F}(x,y) &= \left[(x^3-1)^2 + y^2 + 1\right] \vec{k} \end{aligned}$$

Seja γ uma curva fechada, simples, lisa por partes em $\mathbb{R}^2$. Sem perda de generalidade, suponhamos que γ esteja orientada no sentido anti-horário (uma vez que, caso a orientação seja feita no sentido horário, o valor da integral será o oposto do valor obtido com orientação anti-horária). Sendo γ uma curva fechada simples e lisa por partes no $\mathbb{R}^2$, pode-se afirmar que a mesma é fronteira de um compacto $K \subset \mathbb{R}^2$, que é um domínio simplesmente conexo para o campo $\vec{F}$, com $\operatorname{rot}\vec{F}$ definido para todo $(x, y) \in K$. Assim sendo, a aplicação do teorema de Green resulta em:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_K \operatorname{rot}\vec{F} \cdot \vec{k}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_K \left[(x^3-1)^2 + y^2 + 1\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Utilizando uma propriedade da integral, como $(x^3-1)^2 + y^2 + 1 \geq 1$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, então:

$$\iint_K \left[(x^3-1)^2 + y^2 + 1\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geq \iint_K 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y > 0$$

O fato de a última integral ser estritamente positiva se deve ao fato de corresponder à área de K, onde K é um compacto do $\mathbb{R}^2$. Assim sendo:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_K \left[(x^3-1)^2 + y^2 + 1\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y > 0$$

Isto demonstra que não existe curva fechada, simples, lisa por partes $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ tal que $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$.

Questão 3.

a) (2,0 pontos) Verifique que o campo vetorial em $\mathbb{R}^3$

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(2x\cos z + yz,\ xz + \frac{2z}{\pi}\cos y,\ xy - x^2\operatorname{sen} z + \frac{2}{\pi}\operatorname{sen} y\right)$$

é conservativo e determine um potencial para $\vec{F}$.

b) (1,0 ponto) Calcule a integral de linha

$$\int_\gamma (2x\cos z + yz)\,\mathrm{d}x + \left(xz + \frac{2z}{\pi}\cos y\right)\mathrm{d}y + \left(xy - x^2\operatorname{sen} z + \frac{2}{\pi}\operatorname{sen} y\right)\mathrm{d}z$$

onde γ é a curva $\begin{cases} x = 2e^{t^2-1}\arctan t \\ y = \dfrac{\pi t}{2} \\ z = 1 - t^4 \end{cases}$, $0 \leq t \leq 1$.

Solução

(a) Seja o campo vetorial em $\mathbb{R}^3$

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(2x\cos z + yz,\ xz + \frac{2z}{\pi}\cos y,\ xy - x^2\operatorname{sen} z + \frac{2}{\pi}\operatorname{sen} y\right) = (P, Q, R)$$

Note que $\vec{F}$ está definida para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, de tal forma que, se existir uma função $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que:

$$P(x, y, z) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y, z) \qquad Q(x, y, z) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y, z) \qquad R(x, y, z) = \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, z)$$

diz-se, por definição, que o campo $\vec{F}$ é conservativo e ϕ é diata função potencial de $\vec{F}$. Assim, procuremos uma função potencial para $\vec{F}$. Primeiramente, fica claro que:

$$\begin{aligned}
\phi(x, y, z) &= \int P \, \mathrm{d}x + f_1(y, z) = x^2 \cos z + xyz + f_1(y, z) \\
\phi(x, y, z) &= \int Q \, \mathrm{d}x + f_2(x, z) = xyz + \frac{2z}{\pi} \operatorname{sen} y + f_2(x, z) \\
\phi(x, y, z) &= \int R \, \mathrm{d}x + f_3(x, y) = xyz + x^2 \cos z + \frac{2z}{\pi} \operatorname{sen} y + f_3(x, y)
\end{aligned}$$

Inspecionando-se as expressões anteriores, nota-se que, por exemplo, a adoção de

$$\begin{aligned}
f_1(y, z) &= \frac{2z}{\pi} \operatorname{sen} y \\
f_2(x, z) &= x^2 \cos z \\
f_3(x, y) &= 0
\end{aligned}$$

leva à seguinte expressão para ϕ:

$$\phi(x, y, z) = xyz + x^2 \cos z + \frac{2z}{\pi} \operatorname{sen} y$$

Esta função obtida é um potencial de $\vec{F}$.

(b) Sendo $\vec{F}$ o campo definido no item (a), note que a integral solicitada corresponde exatamente a $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$. Como $\vec{F}$ é um campo conservativo e a função ϕ obtida no item (a) é um potencial para $\vec{F}$, pode-se afirmar que:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \Big[\phi\big(\gamma(t)\big)\Big]_{t=0}^{t=1}$$

Para a curva dada:

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= (0,\, 0,\, 1) \\
\gamma(1) &= \left(\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2},\, 0\right)
\end{aligned}$$

Notando que:

$$\begin{aligned}
\phi\,(0,\, 0,\, 1) &= 0 \\
\phi\left(\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2},\, 0\right) &= \frac{\pi^2}{4}
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \Big[\phi\big(\gamma(t)\big)\Big]_{t=0}^{t=1} = \frac{\pi^2}{4}$$