Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
Prova 2 - 1º semestre de 2012

Turma A
Questão 1:

(a) (1,5 ponto) Calcule a massa do arame com formato γ, onde γ é a curva obtida pela interseção das superfícies

$$(x-1)^2 + 2(y+1)^2 + z^2 = 2 \text{ e } z = x - 1$$

com densidade $\delta(x,y,z) = \sqrt{1+(y+1)^2}$.

(b) (2,0 pontos) Seja $\vec{F}(x,y) = \left(3x^2 + 2\sqrt{1+y}, \dfrac{x}{\sqrt{1+y}} + y^3\right)$. Determine o domínio do campo $\vec{F}$ e mostre que $\vec{F}$ é conservativo. Calcule

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ sendo } \gamma(t) = (\sqrt{4(t^2+t)^2+9}, 3^{t^2-1}),\ t \in [-1,1]\ .$$

Solução:

(a) Sabemos que que a massa do arame pode ser calculada pela integral de linha da função densidade em γ, ou seja, $\displaystyle\int_\gamma \delta(x,y,z)\,ds = \int_{t_0}^{t_f} \delta(\gamma(t)) \cdot ||\gamma'(t)||\,dt$.

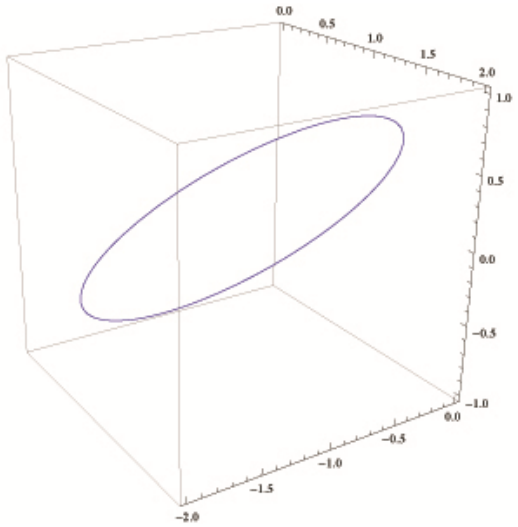

Figura 1: Curva γ

Assim, parametrizando γ :

$$\begin{cases} (x-1)^2 + 2(y+1)^2 + z^2 = 2 \\ z = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + 2(y+1)^2 + (x-1)^2 = 2 \\ z = x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1 \\ z = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t - 1 \\ z = \cos t \end{cases} , t \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma(t) = (1 + \cos t, \sin t - 1, \cos t), t \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, -\sin t) \Rightarrow ||\gamma'(t)|| = \sqrt{2\sin^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{1 + \sin^2 t}$$

$$\therefore \int_\gamma \delta(x, y, z)\, ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin^2 t} \cdot \sqrt{1 + \sin^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} (1 + \sin^2 t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} dt + \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2}\, dt = 2\pi + \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\right)_0^{2\pi} = 3\pi$$

(b) O campo vetorial $\vec{F}(x, y)$ é definido para todo o $\mathbb{R}^2$ excluindo os pontos onde o denominador zera e os pontos em que o termo dentro da raiz é menor que zero. Assim:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -1\}$$

Se $\vec{F}$ é conservativo temos que $\vec{F}$ é um campo gradiente, ou seja $\vec{F} = \nabla\phi$, sendo ϕ sua função potencial. Assim:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 3x^2 + 2\sqrt{1 + y} \\ \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = \dfrac{x}{\sqrt{1 + y}} + y^3 \end{cases}$$

Integrando a primeira equação em x:

$$\phi(x, y) = x^3 + 2x\sqrt{1 + y} + c(y)$$

Derivando em y:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{1 + y}} + c'(y)$$

Comparando com a segunda equação do sistema, temos que $c'(y) = y^3 \Rightarrow c(y) = \frac{y^4}{4} + \mathbb{C}$, sendo $\mathbb{C}$ uma constante real arbitrária, que no caso escolhemos $\mathbb{C} = 0$.

$$\therefore \phi(x, y) = x^3 + 2x\sqrt{1 + y} + \frac{y^4}{4}$$

Como a função potencial é definida em todo o domínio de $\vec{F}$, $\vec{F}$ é conservativo em todo seu domínio.

Como $\vec{F}$ é conservativo, $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ não depende do caminho, apenas do pontos final e inicial. Assim:

$$\gamma(t) = (\sqrt{4(t^2+t)^2+9}, 3^{t^2-1}) \Rightarrow \gamma(-1) = (3,1) \ \text{ e } \ \gamma(1) = (5,1)$$

$$\therefore \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(x,y)\Big|_{(3,1)}^{(5,1)} = 125 + 10\sqrt{2} + \frac{1}{4} - 27 - 6\sqrt{2} - \frac{1}{4} = 98 + 4\sqrt{2}$$

Questão 2. (3,0 pontos) Seja

$$\vec{G}(x,y) = \Big(\frac{-y-1}{(x-1)^2+9(y+1)^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2+9(y+1)^2}\Big) + (0,x)$$

e γ a curva $x^2+y^2=25$ percorrida uma vez no sentido anti-horário. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{G}\cdot d\vec{r}$.

Solução:

Podemos decompor $\vec{G}$ na soma de dois campos vetoriais $\vec{G_1}$ e $\vec{G_2}$, sendo:

$$\vec{G_1} = \Big(\frac{-y-1}{(x-1)^2+9(y+1)^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2+9(y+1)^2}\Big); \vec{G_2} = (0,x)$$

Calculando os rotacionais de $\vec{G_1}$ e $\vec{G_2}$:

$$Rot(\vec{G_1}) = \Big(\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y}\Big)\hat{k} =$$

$$\Big(\frac{1[(x-1)^2+9(y+1)^2]-(x-1)2(x-1)}{[(x-1)^2+9(y+1)^2]^2} - \frac{(-1)[(x-1)^2+9(y+1)^2]-(-y-1)9\cdot 2(y+1)}{[(x-1)^2+9(y+1)^2]^2}\Big)\hat{k} = \vec{0}$$

$$Rot(\vec{G_2}) = \Big(\frac{\partial Q_2}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial y}\Big)\hat{k} = (1-0)\hat{k} = \hat{k}$$

A região interna a γ contém o ponto $(1,-1)$, o qual é uma singularidade de $\vec{G_1}$. Então adicionamos a curva $\gamma_1(t) = (\sin t + 1, \frac{\cos t}{3} - 1), t \in [0, 2\pi]$ a qual isola a singularidade e não se cruza com γ.

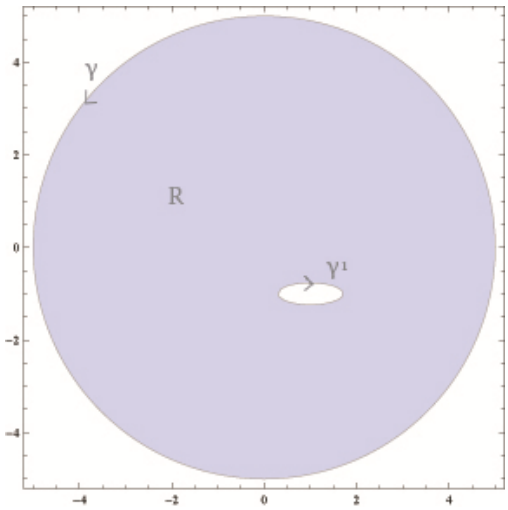

Figura 2: Região R e curvas γ e γ_1

Como γ e γ_1 estão no sentido induzido pelo Teorema de Green, aplicando o teorema de Green para $\vec{G_1}$:

$$\int_{\gamma} \vec{G_1} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_1} \vec{G_1} \cdot d\vec{r} = \iint_R Rot(\vec{G_1}) \cdot \hat{k}\, dx\, dy = 0$$

$$\therefore \int_{\gamma} \vec{G_1} \cdot d\vec{r} = -\int_{\gamma_1} \vec{G_1} \cdot d\vec{r} = -\int_0^{2\pi} \Big(\frac{-\frac{\cos t}{3}}{\sin^2 t + \cos^2 t}, \frac{\sin t}{\sin^2 t + \cos^2 t} \Big) \cdot (\cos t, -\frac{\sin t}{3})\, dt = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} dt = \frac{2\pi}{3}$$

Como o domínio de $\vec{G_2}$ não apresenta singularidades e γ é uma curva fechada, podemos aplicar o Teorema de Green para $\vec{G_2}$ sem precisar adicionar uma curva auxiliar. Assim:

$$\int_{\gamma} \vec{G_2} \cdot d\vec{r} = \iint_R Rot(\vec{G_2}) \cdot \hat{k}\, dx\, dy = \iint_R dx\, dy$$

Mudando para coordenadas polares:

$$\int_{\gamma} \vec{G_2} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \int_0^5 \rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^5 d\theta = 25\pi$$

Como $\vec{G} = \vec{G_1} + \vec{G_2}$, temos que

$$\int_{\gamma} \vec{G} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} \vec{G_1} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma} \vec{G_2} \cdot d\vec{r}$$

$$\therefore \int_{\gamma} \vec{G} \cdot d\vec{r} = \frac{2\pi}{3} + 25\pi = \frac{77\pi}{3}$$

Questão 3. (3,5 pontos) Calcule $\int_\gamma (\ln(1+y-x) - y^3)\,dx + (x^3 + 1 - \ln(1+y-x))\,dy$ para γ a curva $x^2 + y^2 = 4$ com $y \geq x$ com ponto inicial $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e ponto final $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Solução:

Seja $\gamma_1(t) = (-t, -t), t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Como o domínio de $\vec{F}$ não apresenta singularidades na região R definida por $\gamma \cup \gamma_1$, e a curva fechada $\gamma \cup \gamma_1$ é percorrida no sentido horário, pelo Teorema de Green:

$$-\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R Rot(\vec{F}) \cdot \hat{k}\,dx\,dy$$

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \iint_R Rot(\vec{F}) \cdot \hat{k}\,dx\,dy \tag{1}$$

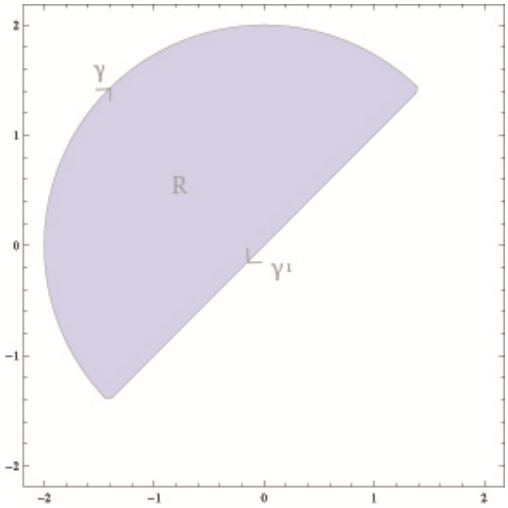

Figura 3: Região R e curvas γ e γ_1

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \Big(\ln(1-t+t) + t^3, -t^3 + 1 - \ln(1-t+t)\Big) \cdot (-1,-1)\,dt = -\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 1\,dt = -2\sqrt{2}$$

$$\therefore \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -2\sqrt{2} \tag{2}$$

$$Rot(\vec{F}) = \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) \cdot \hat{k} = \Big(3x^2 + \frac{1}{1+y-x} - \frac{1}{1+y-x} + 3y^2\Big) \cdot \hat{k} = 3(x^2+y^2)\hat{k}$$

$$\iint_R Rot(\vec{F}) \cdot \hat{k}\,dx\,dy = \iint_R 3(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

Mudando para coordenadas polares

$$= 3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^2 \rho^3 \, d\rho \, d\theta = 3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\rho^4}{4}\bigg|_0^2 d\theta = \frac{3\pi}{4} \cdot 16 = 12\pi$$

$$\therefore \iint_R Rot(\vec{F}) \cdot \hat{k} \, dx \, dy = 12\pi \tag{3}$$

Substituindo (2) e (3) em (1):

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = -12\pi + 2\sqrt{2}$$

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
Prova 2 - 1º semestre de 2012

Turma B
Questão 1:

(a) (1,5 ponto) Calcule a massa do arame com formato γ, onde γ é a curva obtida pela interseção das superfícies

$$(x+1)^2 + 2(y-1)^2 + z^2 = 2 \text{ e } z = x+1$$

com densidade $\delta(x,y,z) = \sqrt{1+(y-1)^2}$.

(b) (2,0 pontos) Seja $\vec{F}(x,y) = \left(x^3 + \dfrac{y}{\sqrt{1+x}}, 3y^2 + 2\sqrt{1+x}\right)$. Determine o domínio do campo $\vec{F}$ e mostre que $\vec{F}$ é conservativo. Calcule

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ sendo } \gamma(t) = (2^{t^2-1}, \sqrt{4(t^2+t)^2+9}),\ t \in [-1,1]\ .$$

Solução:

(a) Sabemos que que a massa do arame pode ser calculada pela integral de linha da função densidade em γ, ou seja, $\displaystyle\int_\gamma \delta(x,y,z)\,ds = \int_{t_0}^{t_f} \delta(\gamma(t)) \cdot ||\gamma'(t)||\,dt$.

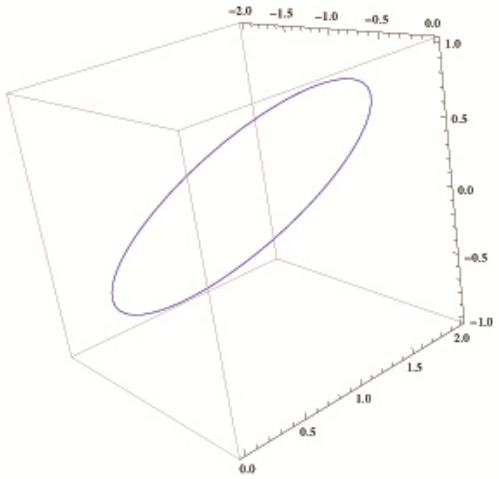

Figura 4: Curva γ

Assim, parametrizando γ :

$$\begin{cases} (x+1)^2 + 2(y-1)^2 + z^2 = 2 \\ z = x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + 2(y-1)^2 + (x+1)^2 = 2 \\ z = x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1 \\ z = x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \cos t - 1 \\ y = 1 + \sin t \\ z = \cos t \end{cases} , t \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma(t) = (\cos t - 1, 1 + \sin t, \cos t), t \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, -\sin t) \Rightarrow ||\gamma'(t)|| = \sqrt{2\sin^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{1 + \sin^2 t}$$

$$\therefore \int_\gamma \delta(x, y, z)\, ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin^2 t} \cdot \sqrt{1 + \sin^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} (1 + \sin^2 t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} dt + \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2}\, dt = 2\pi + \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\right)_0^{2\pi} = 3\pi$$

(b) O campo vetorial $\vec{F}(x, y)$ é definido para todo o $\mathbb{R}^2$ excluindo os pontos onde o denominador zera e os pontos em que o termo dentro da raiz é menor que zero. Assim:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > -1\}$$

Se $\vec{F}$ é conservativo temos que $\vec{F}$ é um campo gradiente, ou seja $\vec{F} = \nabla\phi$, sendo ϕ sua função potencial. Assim:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = x^3 + \dfrac{y}{\sqrt{1+x}} \\ \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 3y^2 + 2\sqrt{1+x} \end{cases}$$

Integrando a segunda equação em y:

$$\phi(x, y) = y^3 + 2x\sqrt{1+x} + c(x)$$

Derivando em x:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{1+x}} + c'(x)$$

Comparando com a primeira equação do sistema, temos que $c'(x) = x^3 \Rightarrow c(x) = \frac{x^4}{4} + \mathbb{C}$, sendo $\mathbb{C}$ uma constante real arbitrária, que no caso escolhemos $\mathbb{C} = 0$.

$$\therefore \phi(x, y) = y^3 + 2y\sqrt{1+x} + \frac{x^4}{4}$$

Como a função potencial é definida em todo o domínio de $\vec{F}$, $\vec{F}$ é conservativo em todo seu domínio.

Como $\vec{F}$ é conservativo, $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ não depende do caminho, apenas do pontos final e inicial. Assim:

$$\gamma(t) = (2^{t^2-1}, \sqrt{4(t^2+t)^2+9}) \Rightarrow \gamma(-1) = (1,3) \ \text{ e } \ \gamma(1) = (1,5)$$

$$\therefore \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(x,y)\Big|_{(1,3)}^{(1,5)} = 125 + 10\sqrt{2} + \frac{1}{4} - 27 - 6\sqrt{2} - \frac{1}{4} = 98 + 4\sqrt{2}$$

Questão 2. (3,0 pontos) Seja

$$\vec{G}(x,y) = \Big(\frac{-y-1}{9(x-1)^2+(y+1)^2}, \frac{x-1}{9(x-1)^2+(y+1)^2}\Big) + (-y,0)$$

e γ a curva $x^2+y^2=25$ percorrida uma vez no sentido anti-horário. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{G}\cdot d\vec{r}$.

Solução:

Podemos decompor $\vec{G}$ na soma de dois campos vetoriais $\vec{G_1}$ e $\vec{G_2}$, sendo:

$$\vec{G_1} = \Big(\frac{-y-1}{9(x-1)^2+(y+1)^2}, \frac{x-1}{9(x-1)^2+(y+1)^2}\Big); \vec{G_2} = (-y,0)$$

Calculando os rotacionais de $\vec{G_1}$ e $\vec{G_2}$:

$$Rot(\vec{G_1}) = \Big(\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y}\Big)\hat{k} =$$

$$\Big(\frac{1[9(x-1)^2+(y+1)^2]-(x-1)9\cdot 2(x-1)}{[9(x-1)^2+(y+1)^2]^2} - \frac{(-1)[9(x-1)^2+(y+1)^2]-(-y-1)2(y+1)}{[9(x-1)^2+(y+1)^2]^2}\Big)\hat{k} = \vec{0}$$

$$Rot(\vec{G_2}) = \Big(\frac{\partial Q_2}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial y}\Big)\hat{k} = (0-(-1))\hat{k} = \hat{k}$$

A região interna a γ contém o ponto $(1,-1)$, o qual é uma singularidade de $\vec{G_1}$. Então adicionamos a curva $\gamma_1(t) = (\frac{\sin t}{3}+1, \cos t - 1), t \in [0, 2\pi]$ a qual isola a singularidade e não se cruza com γ.

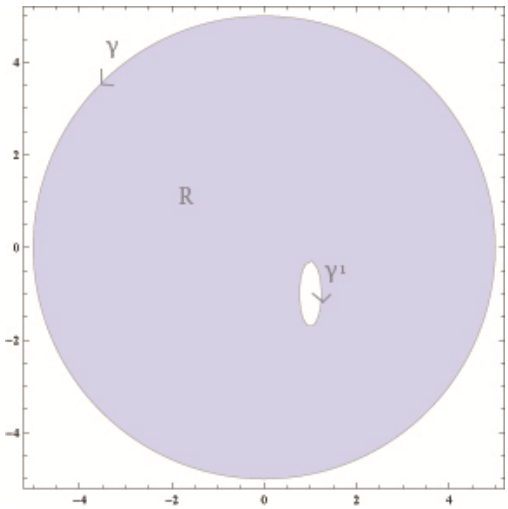

Figura 5: Região R e curvas γ e γ_1

Como γ e γ_1 estão no sentido induzido pelo Teorema de Green, aplicando o teorema de Green para $\vec{G_1}$:

$$\int_{\gamma} \vec{G_1} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_1} \vec{G_1} \cdot d\vec{r} = \iint_R Rot(\vec{G_1}) \cdot \hat{k}\, dx\, dy = 0$$

$$\therefore \int_{\gamma} \vec{G_1} \cdot d\vec{r} = -\int_{\gamma_1} \vec{G_1} \cdot d\vec{r} = -\int_0^{2\pi} \Big(\frac{-\cos t}{\sin^2 t + \cos^2 t}, \frac{\frac{\sin t}{3}}{\sin^2 t + \cos^2 t} \Big) \cdot (\frac{\cos t}{3}, -\sin t)\, dt = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} dt = \frac{2\pi}{3}$$

Como o domínio de $\vec{G_2}$ não apresenta singularidades e γ é uma curva fechada, podemos aplicar o Teorema de Green para $\vec{G_2}$ sem precisar adicionar uma curva auxiliar. Assim:

$$\int_{\gamma} \vec{G_2} \cdot d\vec{r} = \iint_R Rot(\vec{G_2}) \cdot \hat{k}\, dx\, dy = \iint_R dx\, dy$$

Mudando para coordenadas polares:

$$\int_{\gamma} \vec{G_2} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \int_0^5 \rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^5 d\theta = 25\pi$$

Como $\vec{G} = \vec{G_1} + \vec{G_2}$, temos que

$$\int_{\gamma} \vec{G} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} \vec{G_1} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma} \vec{G_2} \cdot d\vec{r}$$

$$\therefore \int_{\gamma} \vec{G} \cdot d\vec{r} = \frac{2\pi}{3} + 25\pi = \frac{77\pi}{3}$$

Questão 3. (3,5 pontos) Calcule $\int_\gamma (\ln(1+y-x) - y^3)\,dx + (x^3 + 1 - \ln(1+y-x))\,dy$ para γ a curva $x^2 + y^2 = 6$ com $y \geq x$ com ponto inicial $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ e ponto final $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Solução:

Seja $\gamma_1(t) = (-t, -t), t \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

Como o domínio de $\vec{F}$ não apresenta singularidades na região R definida por $\gamma \cup \gamma_1$, e a curva fechada $\gamma \cup \gamma_1$ é percorrida no sentido horário, pelo Teorema de Green:

$$-\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R Rot(\vec{F}) \cdot \hat{k}\,dx\,dy$$

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \iint_R Rot(\vec{F}) \cdot \hat{k}\,dx\,dy \tag{4}$$

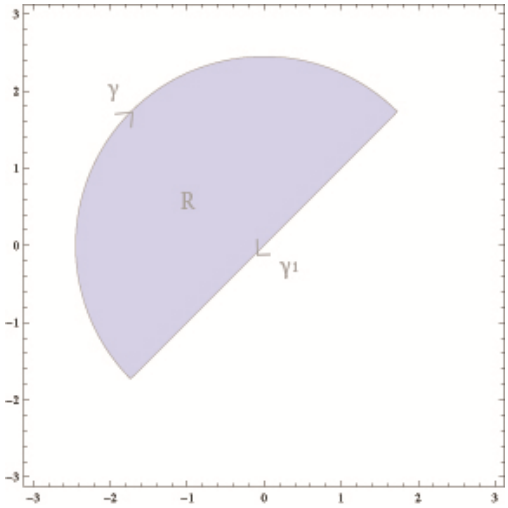

Figura 6: Região R e curvas γ e γ_1

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \Big(\ln(1-t+t) + t^3, -t^3 + 1 - \ln(1-t+t)\Big) \cdot (-1,-1)\,dt = -\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 1\,dt = -2\sqrt{3}$$

$$\therefore \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -2\sqrt{3} \tag{5}$$

$$Rot(\vec{F}) = \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) \cdot \hat{k} = \Big(3x^2 + \frac{1}{1+y-x} - \frac{1}{1+y-x} + 3y^2\Big) \cdot \hat{k} = 3(x^2+y^2)\hat{k}$$

$$\iint_R Rot(\vec{F}) \cdot \hat{k}\,dx\,dy = \iint_R 3(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

Mudando para coordenadas polares

$$= 3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{6}} \rho^3 \, d\rho \, d\theta = 3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{6}} \, d\theta = \frac{3\pi}{4} \cdot 36 = 27\pi$$

$$\therefore \iint_R Rot(\vec{F}) \cdot \hat{k} \, dx \, dy = 27\pi \tag{6}$$

Substituindo (2) e (3) em (1):

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = -27\pi + 2\sqrt{3}$$