Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
Prova 2 - 1o. Semestre de 2011

As resoluções são referentes às questões enunciadas na turma A. Os resultados para Turma B encontram-se nos rodapés.

1ª Questão: (4 pontos)

a) Determine a massa do fio descrito pelas equações $x^2+y^2+z^2=1$ e $z=y$ com densidade $\delta(x,y,z)=x^2+y^2$.

b) Seja $\vec{F}(x,y)=[x+\text{arctg}(y)]\,\vec{i}+\dfrac{x+y}{1+y^2}\,\vec{j}$. Mostre que a integral $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ é independente do caminho e calcule a integral $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,1)} \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

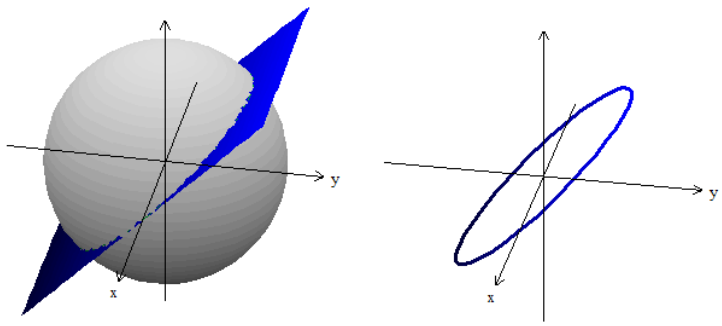
a) A curva pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= 1 \\ y-z &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2+2y^2 &= 1 \\ y-z &= 0 \end{cases}$$

que pode ser parametrizada por

$$\gamma(t)=\left(\cos t, \frac{\sin t}{\sqrt{2}}, \frac{\sin t}{\sqrt{2}}\right),\ t\in[0,2\pi]$$

de modo que $\|\gamma(t)\|=1$.



Assim, a massa do fio é dada pela integral

$$\int_\gamma \delta(x,y,z)ds=\int_0^{2\pi}\cos^2 t+\frac{\sin^2 t}{2}dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{2+2\cos 2t+1-\cos 2t}{4}dt=\left[\frac{3t}{4}+\frac{\sin 2t}{8}\right]_0^{2\pi}=\frac{3\pi}{2}.$$

b) Para mostrar que a integral não depende do caminho, procuramos uma função potencial para o campo $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$.

$$\Phi(x,y) = \int P(u,y)du = \frac{x^2}{2} + x \arctan y + h(y).^1$$

Como $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$, temos $h'(y) = \frac{y}{1+y^2}$, de onde $h(y) = \frac{\ln(1+y^2)}{2}$.

A integral de $\vec{F}$ sobre uma curva que liga $(0,0)$ a $(1,1)$ é

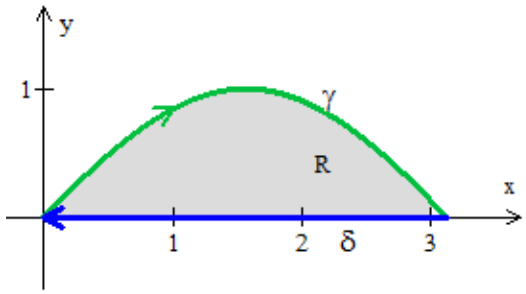
$$\Phi(1,1) - \Phi(0,0) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}.$$

[1] Turma B: o potencial fica $\Psi(x,y) = \Phi(y,x)$, o que não muda o resulatado da integral.

2ª Questão: (3 pontos) Calcule a integral

$$\int_\gamma (-y\ \cos^2(x) + x^2 e^{x^3})\ dx + (e^{y^2}\ln(1+y^2))\ dy$$

onde γ é o arco do gráfico de $y = \operatorname{sen}(x)$ que vai de $(0,0)$ a $(\pi, 0)$.
Solução:
A integral acima pode ser calculada facilmente se aplicarmos o teorema de Green.



Definimos a curva $\delta(t) = (\pi - t, 0), \mathrm{t} \in [0, \pi]$, cujo vetor tangente em cada ponto é $\delta'(t) = (-1, 0)$, para todo t, e a região $R = \{(x, y) \in [0, \pi] \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq \sin x\}$ e escrevemos (note o sinal de menos devido à orientação das curvas γ e δ)

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_\delta \vec{F} \cdot \vec{r} = -\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dxdy$$

o que implica que

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_0^\pi \int_0^{\sin x} \cos^2 x dydx - \int_0^\pi ((\pi - t)^2 e^{(\pi-t)^3}, 0) \cdot (-1, 0) dt =$$

$$= \frac{\cos^3 x}{3}\bigg|_0^\pi - \frac{e^{(\pi-t)^3}}{3}\bigg|_0^\pi = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{e^{\pi^3}}{3} = \frac{e^{\pi^3} - 3}{3}.$$ [2]

utilizamos a mudança de variáveis $u = \cos x$ na segunda igualdade acima.

[2] Turma B:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{3e^{\pi^2} - 7}{6}$$

.

3ª Questão: (3 pontos) Considere o campo:

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} - \frac{y}{x^2+9y^2} \ , \ \frac{y-1}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} + \frac{x}{x^2+9y^2} \right).$$

Determine $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ onde γ é a fronteira do quadrado de vértices (2, 2), (-2, 2), (-2, -2) e (2, -2) orientada no sentido horário.

Solução:
Escrevemos $\vec{F}(x,y) = \vec{F}_1(x,y) + \vec{F}_2(x,y)$

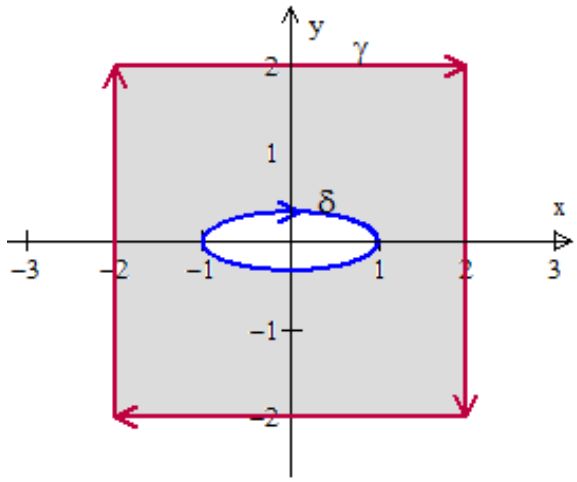
Vamos mostrar que $\vec{F}_1$ é conservativo e, portanto, tem potencial. De fato, $\vec{F}_1(x,y) = \nabla\sqrt{x^2+(y-1)^2}$, pois

$$\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+(y-1)^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} \text{ e}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+(y-1)^2} = \frac{y-1}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}$$

Como o campo $\vec{F}_1$ é conservativo, a integral ao longo de uma curva fechada se anula.

Calcula-se o rotacional de $\vec{F}_2$ e verifica-se que é nulo. Definimos $\delta(t) = \left(\cos t, \frac{\sin t}{3}\right)$, t $\in [0, 2\pi]$.



Assim o teorema de Green garante que a integral sobre γ tem o mesmo valor da integral sobre δ.

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = \int_\delta \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = -\int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sin t}{3}, \cos t\right) \cdot \left(-\sin t, \frac{\cos t}{3}\right) dt = -\frac{2\pi}{3}.$$ [3]

[3] Turma B: só a parte conservativa do campo era diferente, o valor da integral é o mesmo.