Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
2a. Prova - 1o. Semestre 2010 - 18/05/2010

Turma A
Questão 1:

(a) Calcule a massa da curva dada pela intersecção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 3 - 2x$, com densidade $\delta(x, y, z) = \sqrt{1 + y^2}$.

(b) Seja $\vec{F}(x, y) = (y^2 \cos x + e^x, y^3 + 2y \sin x)$.

(i) Mostre que $\vec{F}$ é conservativo.

(ii) Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r}$, onde $\gamma(t) = (t^3, \sin(2 \arctan t^2)), t \in [0, 1]$.

Solução:

(a) Seja γ a intersecção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 3 - 2x$. A projeção de γ no plano xy pode ser determinada eliminando a variável z das duas equações. Obtém-se

$$3 - 2x = x^2 + y^2$$

isto é,

$$(x + 1)^2 + y^2 = 4,$$

uma circunferência de centro $(-1, 0)$ e raio 2. Assim, pode-se parametrizar a curva γ por

$$\gamma(t) = (2 \cos t - 1, 2 \sin t, 5 - 4 \cos t), t \in [0, 2\pi].$$

Como $\gamma'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t, 4 \sin t)$, tem-se

$$||\gamma'(t)|| = \sqrt{4 + 16 \sin^2 t} = 2\sqrt{1 + 4 \sin^2 t}.$$

Assim:

$$\begin{aligned} \text{Massa} &= \int_0^{2\pi} \delta(\gamma(t))||\gamma'(t)||\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4 \sin^2 t} \cdot 2 \cdot \sqrt{1 + 4 \sin^2 t}\, dt \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left(1 + 4 \cdot \frac{1 - \cos 2t}{2}\right) dt = 2(3t - \sin 2t)\Big|_0^{2\pi} = 12\pi. \end{aligned}$$

(b) (i) Para mostrar que o campo $\vec{F}$ é conservativo, basta mostrar que seu rotacional é igual a $\vec{0}$ e que seu domínio é um conjunto simplesmente conexo. Claramente, o domínio de $\vec{F}$ é todo $\mathbb{R}^2$, um conjunto simplesmente conexo. Também, se $P = y^2 \cos x + e^x$ e $Q = y^3 + 2y \sin x$, temos

$$\text{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \vec{k} = (2y \cos x - 2y \cos x)\vec{k} = \vec{0}.$$

Assim, $\vec{F}$ é um campo conservativo em $\mathbb{R}^2$.

(ii) Como o campo é conservativo, existe uma função ϕ, um potencial de $\vec{F}$, tal que $\nabla\phi = \vec{F}$. Isso significa que

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = y^2 \cos x + e^x \\ \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = y^3 + 2y \sin x, \end{cases}$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Integrando a primeira equação com relação a x, obtemos

$$\phi(x, y) = \int (y^2 \cos x + e^x)\, dx = y^2 \sin x + e^x + C(y),$$

onde $C(y)$ não depende de x. Substituindo na segunda equação, obtemos

$$2y \sin x + C'(y) = 2y \sin x + y^3,$$

e portanto,

$$C(y) = \frac{y^4}{4} + K,$$

onde K é uma constante. Assim, podemos tomar $\phi(x, y) = y^2 \sin x + e^x + \frac{y^4}{4}$ como um potencial para $\vec{F}$. Portanto, a integral pedida pode ser calculada como

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(\gamma(1)) - \phi(\gamma(0)) = \phi(1, 1) - \phi(0, 0) = \sin 1 + e + \frac{1}{4} - e^0 = \sin 1 + e - \frac{3}{4}.$$

Questão 2: Seja

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{2x^2+y^2}, \frac{x}{2x^2+y^2} + y^2\right)$$

Calcule $\int \vec{F} \cdot \vec{r}$, onde γ é a curva $x^2 - 2x + 3y^2 = 9$, orientada no sentido anti-horário.

Solução: Primeiro, vamos calcular o rotacional de $\vec{F}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2x^2+y^2-x\cdot 4x}{(2x^2+y^2)^2} + \frac{2x^2+y^2-y\cdot 2y}{(2x^2+y^2)^2} = 0.$$

Mas observamos que $\vec{F}$ tem uma singularidade no ponto $(0,0)$, que pertence ao interior da região limitada por γ, como podemos perceber pela figura 1. Portanto, para podermos aplicar o Teorema de Green, é necessário isolar o ponto da singularidade, ou seja, o ponto $(0,0)$.

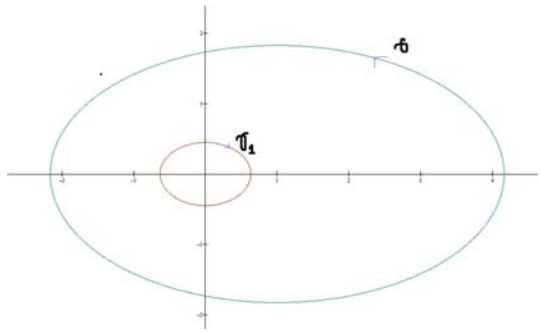


Figura 1

Dessa maneira, seja γ_1 a elipse $2x^2 + y^2 = r^2$, com $r > 0$ suficientemente pequeno para que $\gamma \cap \gamma_1 = \emptyset$, orientada em sentido horário e seja D a região limitada por γ e γ_1. Temos portanto, como se observa na figura 1, $\partial D = \gamma \cup \gamma_1$, com orientação positiva e $\vec{F}$ é de classe C^∞ em D. Podemos assim aplicar o Teorema de Green:

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_\gamma Pdx + Qdy + \int_{\gamma_1} Pdx + Qdy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0,$$

de modo que

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = -\int_{\gamma_1} Pdx + Qdy.$$

Agora, parametrizando γ_1, obtemos:

$$\gamma_1(t) = \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\sin t, r\cos t\right), \text{ com } 0 \le t \le 2\pi$$

donde

$$\gamma_1'(t) = \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\cos t, -r\sin t\right)$$

e, portanto,

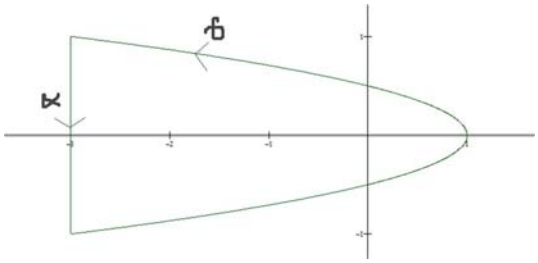
$$\int_\gamma Pdx + Qdy = -\int_{\gamma_1} Pdx + Qdy = -\int_0^{2\pi} \left(\frac{-r\cos t}{r^2}, \frac{r\sin t}{r^2\sqrt{2}} + r^2\cos^2 t\right) \cdot \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\cos t, -r\sin t\right) dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - r^3\cos^2 t\sin t\right) dt = \left[\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{r^3\cos^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}.$$

Questão 3: Calcule $\displaystyle\int_{\gamma} \left[y + \cos x^2 + 1\right] dx + \left[x^2 + y\ln(y^2+1)\right] dy$, onde γ é a parte da curva $x = 1 - 4y^2$ contida no semiplano $x \geq -3$, orientada sentido anti-horário.

Solução: Seja $\vec{F}(x,y) = (y + \cos x^2 + 1, x^2 + y\ln(y^2+1)) = (P,Q)$. Observemos que $\vec{F}$ é um campo de classe C^∞ em $\mathbb{R}^2$ e queremos calcular $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Como γ é uma curva aberta, vamos considerar a curva $\alpha(t) = (-3, -t)$, $t \in [-1, 1]$, cujo traço é o segmento de reta usado para tornar $\gamma \cup \alpha$ uma curva fechada, orientada no sentido anti-horário, limitando uma região fechada R, abaixo indicada.



Pelo Teorema de Green, temos

$$\int_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

1) Cálculo de $\displaystyle\int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{r}$:

$$\begin{aligned}\int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{-1}^{1} \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt = \int_{-1}^{1} (-t + \cos 10\,,\, 9 - t\ln(t^2+1)) \cdot (0,-1)\, dt \\ &= \int_{-1}^{1} \left[t\ln(t^2+1) - 9\right]\, dt\end{aligned}$$

Como a função $t \mapsto t\ln(t^2+1)$ é ímpar, sua integral num intervalo simetrico vale 0. Assim:

$$\int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^{1} (-9) dt = (-9) \cdot 2 = -18.$$

2) Cálculo de $\displaystyle\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$:

A região R pode ser descrita como:

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1 \quad \text{e} \quad -3 \leq x \leq 1 - 4y^2\ \right\}.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy &= \int_{-1}^{1} \int_{-3}^{1-4y^2} (2x-1)\ dx\, dy = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - x\right)\Big|_{x=-3}^{x=1-4y^2} dy \\
&= \int_{-1}^{1} \left[\left(1-4y^2\right)^2 - (1-4y^2) - \left((-3)^2 - (-3)\right)\right] dy \\
&= \int_{-1}^{1} \left(1 - 8y^2 + 16y^4 - 1 + 4y^2 - 10\right) dy = \int_{-1}^{1} \left(16y^4 - 4y^2 - 12\right) dy \\
&= 4 \cdot \left(\frac{4}{5}y^5 - \frac{1}{3}y^3 - 3y\right)\Big|_{y=-1}^{y=1} = 8 \cdot \left(\frac{4}{5}y^5 - \frac{1}{3}y^3 - 3y\right)\Big|_{y=0}^{y=1} \\
&= 8 \cdot \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{3} - 3\right) = \frac{8(12-5-45)}{15} = -\frac{8 \cdot 38}{15} = -\frac{304}{15}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy - \int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{304}{15} - (-18) = -\frac{34}{15}.
$$

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
2a. Prova - 1o. Semestre 2010 - 18/05/2010

Turma B
Questão 1:

(a) Calcule a massa da curva dada pela intersecção das superfícies $z = 3 - x^2 - y^2$ e $z = 2x$, com densidade $\delta(x, y, z) = \sqrt{1 + y^2}$.

(b) Seja $\vec{F}(x, y) = (2x \sin y + e^x, y^3 + x^2 \cos y)$.

(i) Mostre que $\vec{F}$ é conservativo.

(ii) Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\gamma(t) = (t^3, \sin(2 \arctan t^2)), t \in [0, 1]$.

Solução:

(a) Seja γ a intersecção das superfícies $z = 3 - x^2 - y^2$ e $z = 2x$. A projeção de γ no plano xy pode ser determinada eliminando a variável z das duas equações. Obtém-se

$$3 - x^2 - y^2 = 2x,$$

isto é,

$$(x + 1)^2 + y^2 = 4,$$

uma circunferência de centro $(-1, 0)$ e raio 2. Assim, pode-se parametrizar a curva γ por:

$$\gamma(t) = (2 \cos t - 1, 2 \sin t, 4 \cos t - 2), \text{ com } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Como $\gamma'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t, -4 \sin t)$, temos

$$||\gamma'(t)|| = \sqrt{4 + 16 \sin^2 t} = 2\sqrt{1 + 4 \sin^2 t}.$$

Assim:

$$\begin{aligned} \text{Massa} &= \int_0^{2\pi} \delta(\gamma(t)) ||\gamma'(t)|| \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4 \sin^2 t} \cdot 2 \cdot \sqrt{1 + 4 \sin^2 t} \, dt \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left(1 + 4 \cdot \frac{1 - \cos 2t}{2}\right) dt = 2(3t - \sin 2t)\Big|_0^{2\pi} = 12\pi \end{aligned}$$

(b) (i) Para mostrar que o campo $\vec{F}$ é conservativo, basta mostrar que seu rotacional é igual a $\vec{0}$ e que seu domínio é um conjunto simplesmente conexo. Claramente, o domínio de $\vec{F}$ é todo $\mathbb{R}^2$, um conjunto simplesmente conexo. Também, se $P = 2x \sin y + e^x$ e $Q = y^3 + x^2 \cos y$, temos

$$\text{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \vec{k} = (2x \cos y - 2x \cos y)\vec{k} = \vec{0}.$$

Assim, $\vec{F}$ é um campo conservativo em $\mathbb{R}^2$.

(ii) Como o campo é conservativo, existe uma função ϕ, um potencial de $\vec{F}$, tal que $\nabla\phi = \vec{F}$. Isso significa que

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 2x\sin y + e^x \\ \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = y^3 + x^2\cos y \end{cases}$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Integrando a primeira equação com relação a x, obtemos

$$\phi(x, y) = \int (2x\sin y + e^x)\, dx = x^2\sin y + e^x + C(y),$$

onde $C(y)$ não depende de x. Substituindo na segunda equação, obtemos

$$x^2\cos y + C'(y) = y^3 + x^2\cos y$$

donde

$$C(y) = \frac{y^4}{4} + K,$$

onde K é uma constante. Assim, podemos tomar $\phi(x, y) = x^2\sin y + e^x + \frac{y^4}{4}$ como um potencial para $\vec{F}$. Portanto, a integral pedida pode ser calculada como

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(\gamma(1)) - \phi(\gamma(0)) = \phi(1, 1) - \phi(0, 0) = \sin 1 + e + \frac{1}{4} - e^0 = \sin 1 + e - \frac{3}{4}.$$

Questã 2. Seja

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{2x^2+y^2}, \frac{x}{2x^2+y^2} + y^2 \right).$$

Calcule $\int \vec{F} \cdot \vec{r}$, onde γ é a curva $y^2 - 2y + 3x^2 = 9$, orientada no sentido anti-horário.
Solução. Primeiro, vamos calcular o rotacional de $\vec{F}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2x^2+y^2-x\cdot 4x}{(2x^2+y^2)^2} + \frac{2x^2+y^2-y\cdot 2y}{(2x^2+y^2)^2} = 0.$$

Mas observamos que $\vec{F}$ tem uma singularidade no ponto $(0,0)$, que pertence ao interior da região limitada por γ, como podemos perceber pela figura 1. Portanto, para podermos aplicar o Teorema de Green, é necessário isolar o ponto da singularidade, ou seja, o ponto $(0,0)$.

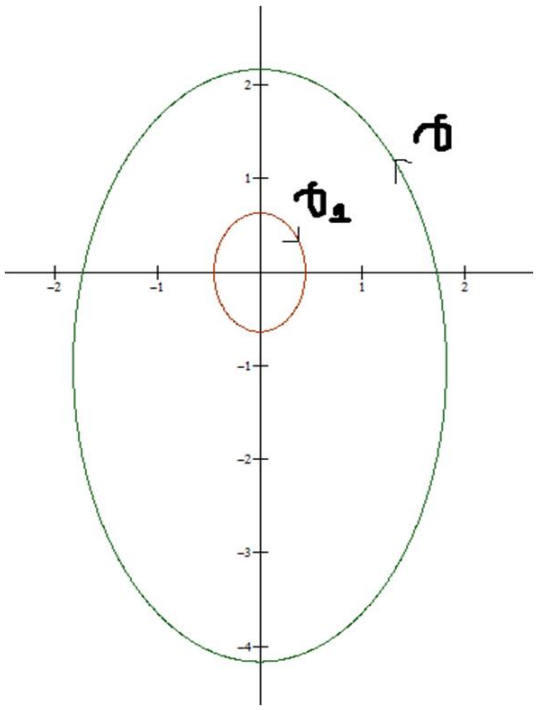


Figura 1

Dessa maneira, seja γ_1 a elípse $2x^2 + y^2 = r^2$, com r suficientemente pequeno para que $\gamma \cap \gamma_1 = \emptyset$, orientada em sentido horário e seja D a região limitada por γ e γ_1. Temos portanto, como se observa na figura 1, $\partial D = \gamma \cup \gamma_1$, com orientação positiva e $\vec{F}$ é de classe C^∞ em D. Podemos assim aplicar o Teorema de Green:

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_\gamma Pdx + Qdy + \int_{\gamma_1} Pdx + Qdy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Parametrizando γ_1, obtemos:

$$\gamma_1(t) = \left(\frac{r}{\sqrt{2}} \sin t, r\cos t \right), \text{ com } 0 \le t \le 2\pi$$

e, portanto,

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = -\int_{\gamma_1} Pdx + Qdy = -\int_0^{2\pi} \left(\frac{-r\cos t}{r^2}, \frac{r\sin t}{r^2\sqrt{2}} + r^2\cos^2 t \right) \cdot \left(\frac{r}{\sqrt{2}} \cos t, -r\sin t \right) dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - r^3 \cos^2 t \sin t \right) dt = \left[\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{r^3 \cos^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}.$$

Concluímos que

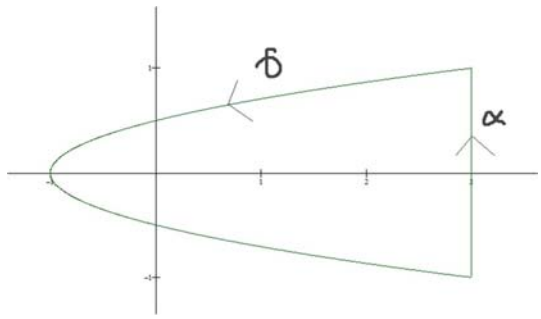
$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \sqrt{2}\pi.$$

Questão 3: Calcule $\int\limits_{\gamma} \left[y + \cos x^2 + 1\right] dx + \left[x^2 + y\ln(y^2+1)\right] dy$, onde γ é a parte da curva $x = 4y^2 - 1$ contida no semiplano $x \leq 3$, orientada sentido anti-horário.

Solução:

Seja $\vec{F}(x,y) = (y + \cos x^2 + 1, x^2 + y\ln(y^2+1)) = (P,Q)$. Observemos que $\vec{F}$ é um campo de classe C^∞ em $\mathbb{R}^2$ e queremos calcular $\int\limits_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Como γ é uma curva aberta, vamos considerar a curva $\alpha(t) = (3,t)$, $t \in [-1,1]$, cujo traço é o segmento de reta usado para tornar $\gamma \cup \alpha$ uma curva fechada, orientada no sentido anti-horário, limitando uma região fechada R, abaixo indicada.



Pelo Teorema de Green, temos

$$\int\limits_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int\limits_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

1) Cálculo de $\int\limits_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{r}$:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int\limits_{-1}^{1} \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt = \int\limits_{-1}^{1} (t + \cos 10\,,\, 9 + t\ln(t^2+1)) \cdot (0\,,\,1)\, dt \\ &= \int\limits_{-1}^{1} \left[t\ln(t^2+1) + 9\right]\, dt\end{aligned}$$

Como a função $t \mapsto t\ln(t^2+1)$ é ímpar, sua integral num intervalo simétrico vale 0. Assim

$$\int\limits_{\alpha} \vec{F}.d\vec{r} = \int\limits_{-1}^{1} 9dt = 9 \cdot 2 = 18$$

2) Cálculo de $\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$:

Como

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1 \quad \text{e} \quad 4y^2 - 1 \leq x \leq 3\ \right\},$$

temos

$$\begin{aligned}
\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy &= \int_{-1}^{1}\int_{4y^2-1}^{3} (2x-1)\; dx\, dy = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - x\right)\Big|_{x=4y^2-1}^{x=3} dy \\
&= \int_{-1}^{1} \left[\left(3^2-3\right) - \left((4y^2-1)^2 - (4y^2-1)\right)\right] dy \\
&= \int_{-1}^{1} \left[6 - \left(16y^4 - 8y^2 + 1 - 4y^2 + 1\right)\right] dy = \int_{-1}^{1} \left(-16y^4 + 12y^2 + 4\right) dy \\
&= 4 \cdot \left(-\frac{4}{5}y^5 - \frac{3}{3}y^3 + y\right)\Big|_{y=-1}^{y=1} = 8 \cdot \left(-\frac{4}{5}y^5 - \frac{3}{3}y^3 + y\right)\Big|_{y=0}^{y=1} \\
&= 8 \cdot \left(-\frac{4}{5} + 1 + 1\right) = \frac{8(-4+10)}{5} = \frac{8 \cdot 6}{5} = \frac{48}{5}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\gamma} \vec{F}.d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy - \int_{\alpha} \vec{F}.d\vec{r} = \frac{48}{5} - 18 = -\frac{42}{5}.$$