Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
2a. Prova - 1o. Semestre 2009 - 31/03/2009

Turma A

Questão 1

(a) (1,5 ponto) Considere o campo:

$$\vec{F}(x,y,z) = (z\cos(xz) + ye^{xy}, xe^{xy} + y, x\cos(xz) + e^{2z}), (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Mostre que $\vec{F}$ é conservativo e calcule $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(\frac{\pi}{2},2,1)} \vec{F}.d\vec{r}$

b) (2,0 pontos) Calcule $\displaystyle\int_\gamma g(x,y,z)\,ds$ onde γ é dada pela intersecção das superfícies $z = x^2y$ e $y = x^2$, com ponto inicial $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$ e ponto final $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$ e $g(x,y,z) = \sqrt{1+4y+16yz}, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

Solução:

(a) Para mostrar que $\vec{F}$ é conservativo basta mostrar que existe uma função escalar ϕ tal que:

$$\vec{\nabla}\phi = \vec{F}$$

Com isso tem-se as seguintes relações:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial x} = z\cos(xz) + ye^{xy} \ (1) \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = xye^{xy} + y \ (2) \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial z} = x\cos(xz) + e^{2z} \ (3) \end{cases}$$

Integrando a relação (2) em y chega-se a:

$$\phi = e^{xy} + \frac{y^2}{2} + g(x,z)$$

Derivando ϕ em relação a x, e igualando à relação (1):

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = ye^{xy} + \frac{\partial g}{\partial x} = z\cos(xz) + ye^{xy}$$

Com isso tem-se:

$$g(x,z) = \sin(xz) + h(z) \ e \ \phi = e^{xy} + \frac{y^2}{2} + \sin(xz) + h(z)$$

Derivando novamente ϕ, desta vez em relação a z, e igualando à relação (3):

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = x\cos(xz) + \frac{\partial h}{\partial z} = x\cos(xz) + e^{2z}$$

Com isso tem-se:

$$h(z) = \frac{e^{2z}}{2} \ e \ \phi = e^{xy} + \frac{y^2}{2} + \sin(xz) + \frac{e^{2z}}{2}$$

Como existe ϕ tal que $\vec{\nabla}\phi = \vec{F}$, podemos afirmar que $\vec{F}$ é conservativo.
O cálculo da integral fica:

$$\int_{(0,0,0)}^{(\frac{\pi}{2},2,1)} \vec{F}.d\vec{r} = \phi\left(\frac{\pi}{2},2,1\right) - \phi(0,0,0) = \left(e^{\pi} + 2 + 1 + \frac{e^2}{2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2}\right) = e^{\pi} + \frac{e^2}{2} + \frac{3}{2}$$

(b) A curva γ é dada pela intersecção das superfícies $y = x^2$ e $z = x^2y$, sendo $x = t$, tem-se:

$$\begin{cases} \gamma(t) = (t, t^2, t^4) \\ \gamma'(t) = (1, 2t, 4t^3) \\ \parallel \gamma'(t) \parallel = \sqrt{1 + 4t^2 + 16t^6} \\ -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

O cálculo da integral fica:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} g(x,y,z)\, ds &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(\gamma(t)).\parallel \gamma'(t) \parallel \ dt \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + 4t^2 + 16t^6}.\sqrt{1 + 4t^2 + 16t^6}\, dt \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 + 4t^2 + 16t^6\, dt \\ &= \left(t + \frac{4t^3}{3} + \frac{16t^7}{7}\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{115}{84} \end{aligned}$$

Questão 2 (3,5 pontos) Calcule $\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r}$ onde:

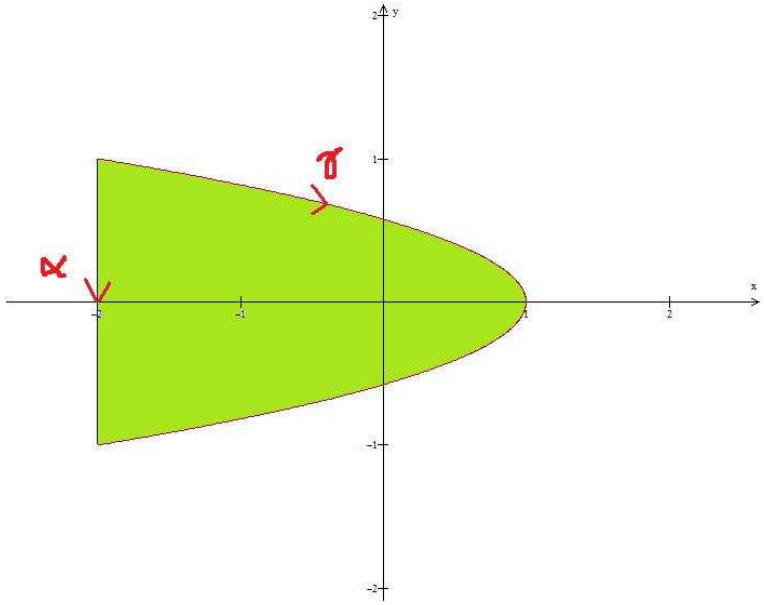
$$\vec{F}(x,y) = (-y + \sin(x^2), x+1) + (ye^{xy}, xe^{xy})$$

e γ é o arco da parábola $x = 1 - 3y^2$ com ponto inicial $(-2,1)$ e ponto final $(-2,-1)$

Solução: Tem-se que $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$, onde:
$\vec{F_1} = (-y + \sin(x^2), x+1)$ e $\vec{F_2} = (ye^{xy}, xe^{xy})$
Com isso a integral será calculada por:

$$\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F_1}.d\vec{r} + \int_\gamma \vec{F_2}.d\vec{r}$$

Para aplicar o Teorema de Green, fecha-se o arco de parábola com uma curva $\alpha(t)$ orientada positivamente, a fim de obter a região fechada R abaixo:



Cálculo de $\int_\gamma \vec{F_1}.d\vec{r}$

Sendo R uma região fechada contida no interios de α e γ, $dom(\vec{F_1}) \subset \mathbb{R}^2$ e sendo a orientação de γ negativa, pelo Teorema de Green vem que:

$$-\int_\gamma \vec{F_1}.d\vec{r} + \int_\alpha \vec{F_1}.d\vec{r} = \int\int_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy$$

onde: $\alpha(t) = (-2,-t)$, $\alpha'(t) = (0,-1)$ com $-1 \leq t \leq 1$

$$
\begin{aligned}
\int\int_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy &= \int\int_R 2\, dx\, dy \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-2}^{1-3y^2} 2\, dx\, dy \\
&= \int_{-1}^{1} 2(1-3y^2) - 2(-2)\, dx\, dy \\
&= 6\int_{-1}^{1} 1 - y^2\, dx\, dy \\
&= 6\left(y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} \\
&= 8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_\alpha \vec{F_1}.d\vec{r} &= \int_{-1}^{1} \vec{F_1}(\alpha(t)).\alpha'(t)\, dt \\
&= \int_{-1}^{1} (-t + \sin 4, -1).(0,-1)\, dt \\
&= \int_{-1}^{1} 1\, dt \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Com isso:

$$\int_\gamma \vec{F_1}.d\vec{r} = 2 - 8 = -6$$

Cálculo de $\int_\gamma \vec{F_2}.d\vec{r}$

Novamente pelo Teorema de Green:

$$-\int_\gamma \vec{F_2}.d\vec{r} + \int_\alpha \vec{F_2}.d\vec{r} = \int\int_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy$$

Como:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

tem-se que:

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F_2}.d\vec{r} &= \int_\alpha \vec{F_2}.d\vec{r} \\
&= \int_{-1}^{1} \vec{F_1}(\alpha(t)).\alpha'(t)\,dt \\
&= \int_{-1}^{1} (te^{-2t}, -2e^{-2t}).(0,-1)\,dt \\
&= \int_{-1}^{1} 2e^{-2t}\,dt \\
&= -e^{-2t}\Big|_{-1}^{1} \\
&= e^2 - e^{-2}
\end{aligned}
$$

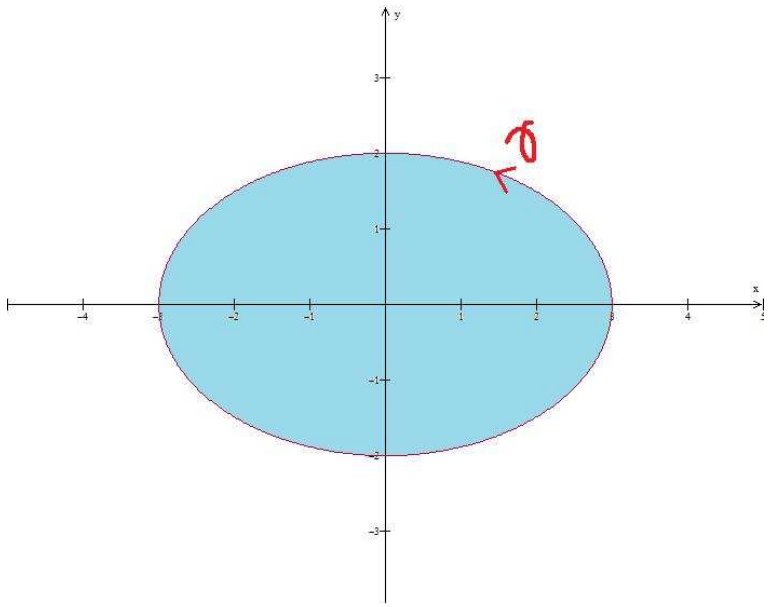
Logo:

$$
\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F_1}.d\vec{r} + \int_\gamma \vec{F_2}.d\vec{r} = -6 + e^2 - e^{-2}
$$

Questão 3 (3,0 pontos) Calcule $\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r}$ onde γ é a elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}$ percorrida uma vez no sentido anti-horário e

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right) + \left(\frac{-y^3}{3} + x + \sin y\right), (x,y) \neq (0,0)$$

Solução:
Abaixo tem-se a região interior à elipse:

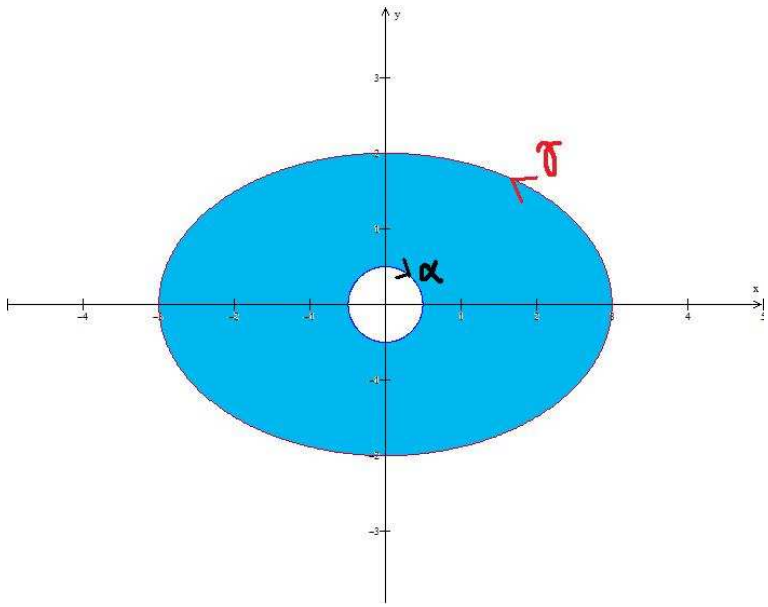


Tem-se que $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$. Com isso a integral será calculada por:

$$\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F_1}.d\vec{r} + \int_\gamma \vec{F_2}.d\vec{r}$$

Cálculo de $\int_\gamma \vec{F_1}.d\vec{r}$:

Como o domínio de $\vec{F_1}$ é $\mathbb{R}^2 - (0,0)$, deve-se isolar a origem por uma pequena curva $\alpha(t)$, percorrida no sentido horário, para poder-se aplicar o Teorema de Green. Com isso, a região R' fica compreendida entre $\alpha(t)$ e $\gamma(t)$:



Aplicando o Teorema de Green à região R' tem-se:

$$\int_{\gamma} \vec{F_1}.d\vec{r} + \int_{\alpha} \vec{F_1}.d\vec{r} = \int\int_{R'} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy$$

Calcula-se cada integral separadamente:

Sendo $\alpha(t) = (r\sin t, r\cos t)$, com r pequeno:

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha} \vec{F_1}.d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\alpha(t)).(\alpha'(t))\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{(r\cos t, -r\sin t)}{r^2}.(r\cos t, -r\sin t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^2 t + \sin^2 t\, dt \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

Como $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$ para o campo $\vec{F_1}$:

$$\int\int_{R'} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = 0$$

Do Teorema de Green vem:

$$\int_{\gamma} \vec{F_1}.d\vec{r} = -2\pi$$

Cálculo de $\int_\gamma \vec{F_2}.d\vec{r}$:

Como o domínio de $\vec{F_2}$ não apresenta problemas, pode-se aplicar diretamente o Teorema de Green para a região fechada R contida no interior de γ orientada positivamente.

$$\int_\gamma \vec{F_2}.d\vec{r} = \int\int_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int\int_R y^2\, dx\, dy$$

Faz-se a mudança de coordenadas para a integral dulpa:

$$\begin{cases} x = 3r\cos\theta \\ y = 2r\sin\theta \\ J = 6r \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int\int_R y^2\, dx\, dy &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 4r^2\sin^2\theta.6r\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 24r^3\sin^2\theta\, dr\, d\theta \\ &= 6\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta \\ &= 3\int_0^{2\pi} 1-\cos 2\theta\, d\theta \\ &= 6\pi \end{aligned}$$

Logo:

$$\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F_1}.d\vec{r} + \int_\gamma \vec{F_2}.d\vec{r} = -2\pi + 6\pi = 4\pi$$

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
2a. Prova - 1o. Semestre 2009 - 31/03/2009

Turma B

Questão 1

(a) (1,5 pontos) Considere o campo:

$$\vec{F}(x,y,z) = (y\cos(xy) + ze^{xz}, x\cos(xy) + e^{2y}, xe^{xz} + z), (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Mostre que $\vec{F}$ é conservativo e calcule $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(\frac{\pi}{2},1,2)} \vec{F}.d\vec{r}$

b) (2,0 pontos) Calcule $\displaystyle\int_\gamma g(x,y,z)\,ds$ onde γ é dada pela intersecção das superfícies $z = y^2x$ e $x = y^2$, com ponto inicial $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right)$ e ponto final $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right)$ e $g(x,y,z) = \sqrt{1+4y+16yz}, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

Solução:

(a) Para mostrar que $\vec{F}$ é conservativo basta mostrar que existe uma função escalar ϕ tal que:

$$\vec{\nabla}\phi = \vec{F}$$

Com isso tem-se as seguintes relações:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial x} = y\cos(xy) + ze^{xz} \ (1) \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = x\cos(xy) + e^{2y} \ (2) \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial z} = xe^{xz} + z \ (3) \end{cases}$$

Integrando a relação (3) em z chega-se a:

$$\phi = e^{xz} + \frac{z^2}{2} + g(x,y)$$

Derivando ϕ em relação a y, e igualando à relação (2):

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} = x\cos(xy) + e^{2y}$$

Com isso tem-se:

$$g(x,y) = \sin(xy) + \frac{e^{2y}}{2} + h(x) \ e \ \phi = e^{xz} + \frac{z^2}{2} + \sin(xy) + \frac{e^{2y}}{2} + h(x)$$

Derivando novamente ϕ, desta vez em relação a x, e igualando à relação (1):

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = y\cos(xy) + ze^{xz} + \frac{\partial h}{\partial x} = y\cos(xy) + ze^{xz}$$

Com isso tem-se:

$$h(x) = Cte = 0 \ e \ \phi = e^{xz} + \frac{z^2}{2} + \sin(xy) + \frac{e^{2y}}{2}$$

Como existe ϕ tal que $\vec{\nabla}\phi = \vec{F}$, podemos afirmar que $\vec{F}$ é conservativo.
O cálculo da integral fica:

$$\int_{(0,0,0)}^{(\frac{\pi}{2},1,2)} \vec{F}.d\vec{r} = \phi\left(\frac{\pi}{2},2,1\right) - \phi(0,0,0) = \left(e^{\pi} + 2 + 1 + \frac{e^2}{2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2}\right) = e^{\pi} + \frac{e^2}{2} + \frac{3}{2}$$

(b) A curva γ é dada pela intersecção das superfícies $x = y^2$ e $z = y^2x$, sendo $y = t$, tem-se:

$$\begin{cases} \gamma(t) = (t^2, t, t^4) \\ \gamma'(t) = (2t, 1, 4t^3) \\ \parallel \gamma'(t) \parallel = \sqrt{1 + 4t^2 + 16t^6} \\ -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

O cálculo da integral fica:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} g(x,y,z)\, ds &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(\gamma(t)).\parallel \gamma'(t) \parallel \ dt \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + 4t^2 + 16t^6}.\sqrt{1 + 4t^2 + 16t^6}\, dt \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 + 4t^2 + 16t^6\, dt \\ &= \left(t + \frac{4t^3}{3} + \frac{16t^7}{7}\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{115}{84} \end{aligned}$$

Questão 2 (3,5 pontos) Calcule $\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r}$ onde:

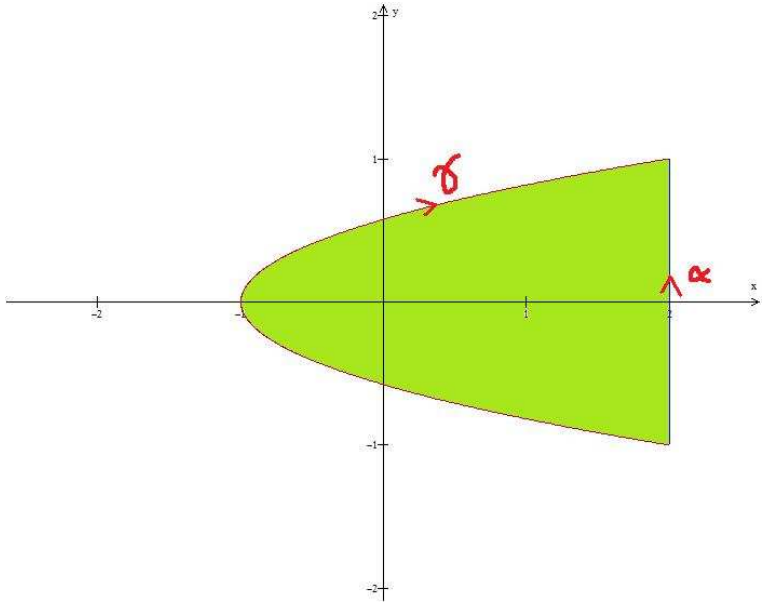
$$\vec{F}(x,y) = (y + \cos(x^2), 3x+1) + (ye^{xy}, xe^{xy})$$

e γ é o arco da parábola $x = 3y^2 - 1$ com ponto inicial $(2,-1)$ e ponto final $(2,1)$

Solução: Tem-se que $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$, onde:
$\vec{F_1} = (y + \cos(x^2), 3x+1)$ e $\vec{F_2} = (ye^{xy}, xe^{xy})$
Com isso a integral será calculada por:

$$\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F_1}.d\vec{r} + \int_\gamma \vec{F_2}.d\vec{r}$$

Para aplicar o Teorema de Green, fecha-se o arco de parábola com uma curva $\alpha(t)$ orientada positivamente, a fim de obter a região fechada R abaixo:



Cálculo de $\int_\gamma \vec{F_1}.d\vec{r}$

Sendo R uma região fechada contida no interios de α e γ, $dom(\vec{F_1}) \subset \mathbb{R}^2$ e sendo a orientação de γ negativa, pelo Teorema de Green vem que:

$$-\int_\gamma \vec{F_1}.d\vec{r} + \int_\alpha \vec{F_1}.d\vec{r} = \int\int_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy$$

onde: $\alpha(t) = (2,t)$, $\alpha'(t) = (0,1)$ com $-1 \leq t \leq 1$

$$
\begin{aligned}
\int\int_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy &= \int\int_R 2\, dx\, dy \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{3y^2-1}^{2} 2\, dx\, dy \\
&= \int_{-1}^{1} 2(2) - 2(3y^2-1)\, dx\, dy \\
&= 6\int_{-1}^{1} 1 - y^2\, dx\, dy \\
&= 6\left(y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} \\
&= 8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_\alpha \vec{F_1}.d\vec{r} &= \int_{-1}^{1} \vec{F_1}(\alpha(t)).\alpha'(t)\, dt \\
&= \int_{-1}^{1} (t + \cos 4,7).(0,1)\, dt \\
&= \int_{-1}^{1} 7\, dt \\
&= 14
\end{aligned}
$$

Com isso:

$$\int_\gamma \vec{F_1}.d\vec{r} = 14 - 8 = 6$$

Cálculo de $\int_\gamma \vec{F_2}.d\vec{r}$

Novamente pelo Teorema de Green:

$$-\int_\gamma \vec{F_2}.d\vec{r} + \int_\alpha \vec{F_2}.d\vec{r} = \int\int_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy$$

Como:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

tem-se que:

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F_2}.d\vec{r} &= \int_\alpha \vec{F_2}.d\vec{r} \\
&= \int_{-1}^{1} \vec{F_1}(\alpha(t)).\alpha'(t)\,dt \\
&= \int_{-1}^{1} (te^{2t}, 2e^{2t}).(0,1)\,dt \\
&= \int_{-1}^{1} 2e^{2t}\,dt \\
&= e^{2t}\Big|_{-1}^{1} \\
&= e^2 - e^{-2}
\end{aligned}
$$

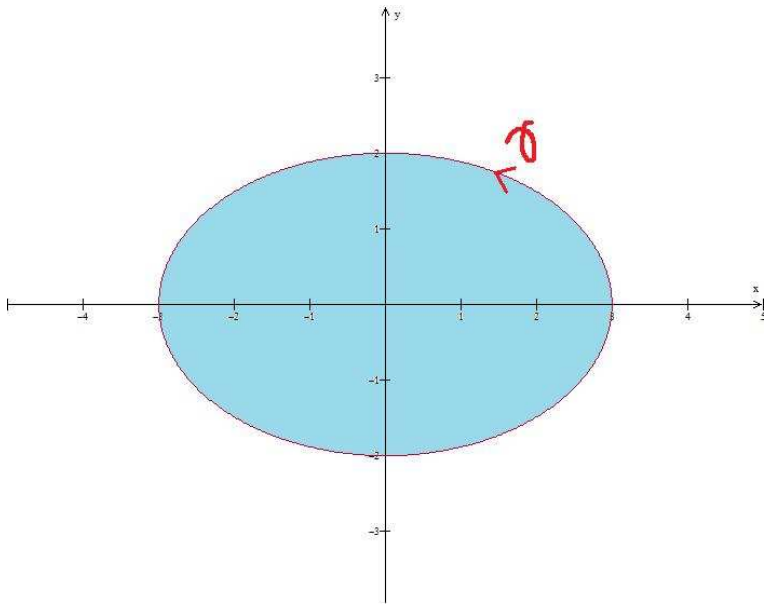
Logo:

$$
\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F_1}.d\vec{r} + \int_\gamma \vec{F_2}.d\vec{r} = 6 + e^2 - e^{-2}
$$

Questão 3 (3,0 pontos) Calcule $\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r}$ onde γ é a elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}$ percorrida uma vez no sentido anti-horário e

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right) + \left(\frac{-y^3}{3} + x + \sin y\right), (x,y) \neq (0,0)$$

Solução:
Abaixo tem-se a região interior à elipse:

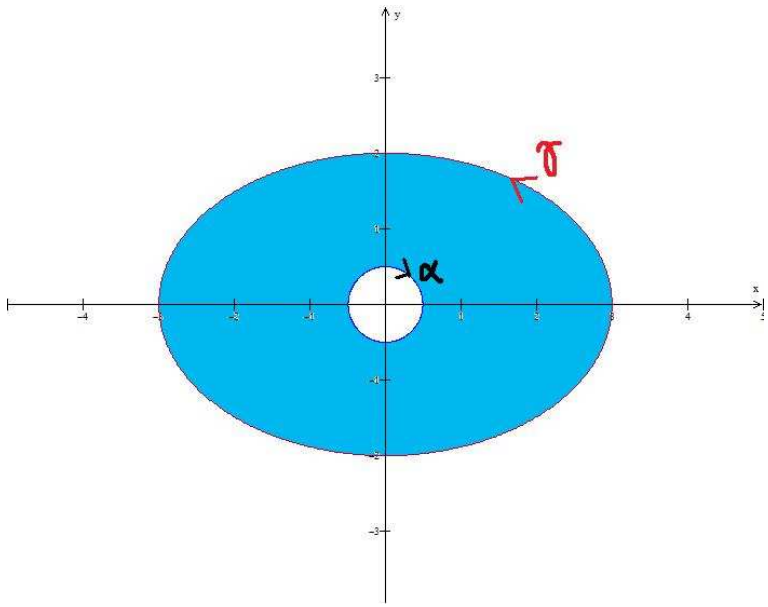


Tem-se que $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$. Com isso a integral será calculada por:

$$\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F_1}.d\vec{r} + \int_\gamma \vec{F_2}.d\vec{r}$$

Cálculo de $\int_\gamma \vec{F_1}\, d\vec{r}$:

Como o domínio de $\vec{F_1}$ é $\mathbb{R}^2 - (0,0)$, deve-se isolar a origem por uma pequena curva $\alpha(t)$, percorrida no sentido horário, para poder-se aplicar o Teorema de Green. Com isso a região R' fica compreendida entre $\alpha(t)$ e $\gamma(t)$:



Aplicando o Teorema de Green à região R' tem-se:

$$\int_{\gamma} \vec{F_1}.d\vec{r} + \int_{\alpha} \vec{F_1}.d\vec{r} = \int\int_{R'} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy$$

Calcula-se cada integral separadamente:

Sendo $\alpha(t) = (r\sin t, r\cos t)$, com r pequeno:

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha} \vec{F_1}.d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\alpha(t)).(\alpha'(t))\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{(r\cos t, -r\sin t)}{r^2}.(r\cos t, -r\sin t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^2 t + \sin^2 t\, dt \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

Como $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$ para o campo $\vec{F_1}$:

$$\int\int_{R'} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = 0$$

Do Teorema de Green vem:

$$\int_{\gamma} \vec{F_1}.d\vec{r} = -2\pi$$

Cálculo de $\int_\gamma \vec{F_2}.d\vec{r}$:

Como o domínio de $\vec{F_2}$ não apresenta problemas, pode-se aplicar diretamente o Teorema de Green para a região fechada R contida no interior de γ orientada positivamente.

$$\int_\gamma \vec{F_2}.d\vec{r} = \int\int_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int\int_R y^2\, dx\, dy$$

Faz-se a mudança de coordenadas para a integral dulpa:

$$\begin{cases} x = 3r\cos\theta \\ y = 2r\sin\theta \\ J = 6r \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int\int_R y^2\, dx\, dy &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 4r^2\sin^2\theta.6r\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 24r^3\sin^2\theta\, dr\, d\theta \\ &= 6\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta \\ &= 3\int_0^{2\pi} 1-\cos 2\theta\, d\theta \\ &= 6\pi \end{aligned}$$

Logo:

$$\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F_1}.d\vec{r} + \int_\gamma \vec{F_2}.d\vec{r} = -2\pi + 6\pi = 4\pi$$