Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
2ª Prova - 1° semestre de 2008

Turma A

Questão 1.

(a) (2 pontos) Determine a massa de um fio com densidade $\delta(x, y, z) = xz$ e formato de curva dada pela intersecção das superfícies $x^2 + z^2 = 4$ e $y = 1 - \frac{x}{2}$, com $x \geq 0$ e $z \geq 0$.

(b) (2 pontos) Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ sendo dados $\gamma(t) = (1 - t^5, 2t^3, 2t)$, $\quad t \in [0, 1]$ e

$$\vec{F} = \left(x + ze^{xz}\sqrt{y^2+1}, 2y + \frac{y\, e^{xz}}{\sqrt{y^2+1}}, z + x\, e^{xz}\sqrt{y^2+1} \right).$$

Solução:

(a) A curva dada pela intersecção das superfícies $x^2 + z^2 = 4$ e $y = 1 - \frac{x}{2}$ com $x \geq 0$ e $z \geq 0$ é representada pela seguinte parametrização:

$$\gamma(t) = (2\cos t, 1 - \cos t, 2\sin t), t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Então $\gamma'(t) = (-2\sin t, \sin t, 2\cos t)$ com $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
Usando que $\delta(x, y, z) = xz$, a massa M é obtida da seguinte maneira

$$\begin{aligned} M = \int_\gamma \delta(x, y, z) ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta(\gamma(t))||\gamma'(t)||dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin t \cos t \sqrt{4 + \sin^2 t} dt \\ &= \frac{4}{3}(4 + \sin^2 t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}(5\sqrt{5} - 8). \end{aligned}$$

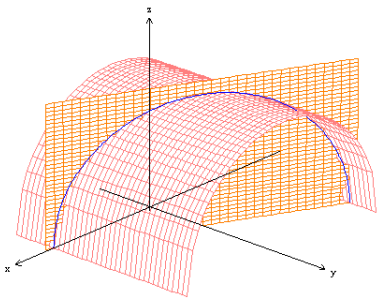

Figura 1: **Gráfico da curva.**

(b) $\vec{F}$ é um campo conservativo em $\mathbb{R}^3$ pois

$$\text{Rot } \vec{F} = (\tfrac{xy\, e^{xz}}{\sqrt{y^2+1}} - \tfrac{xy\, e^{xz}}{\sqrt{y^2+1}}, e^{xz}\sqrt{y^2+1} + xz\, e^{xz}\sqrt{y^2+1} - e^{xz}\sqrt{y^2+1}$$

$$-xz\, e^{xz}\sqrt{y^2+1}, \tfrac{yz\, e^{xz}}{\sqrt{y^2+1}} - \tfrac{yz\, e^{xz}}{\sqrt{y^2+1}}) = (0, 0, 0)$$

Logo $\vec{F} = \nabla\varphi$ em $\mathbb{R}^3$ onde

$$\varphi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + y^2 + \frac{z^2}{2} + e^{xz}\sqrt{y^2+1},$$

assim

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \varphi(\gamma(1)) - \varphi(\gamma(0)) = \varphi(0,2,2) - \varphi(1,0,0) = 6 + \sqrt{5} - \frac{1}{2} - 1 = \frac{9}{2} + \sqrt{5}.$$

Questão 2. (3 pontos) Calcule

$$\int_\gamma [x^2 + y^3 + ln(1+y^2)]dx + \left[\frac{2xy}{1+y^2} + e^{1+y^2}\right]dy$$

sendo γ a semi-elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, $y \geq 0$, orientada no sentido anti-horário.

Solução: Queremos calcular $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r}$, onde

$$\vec{F} = (P,Q) = \left(x^2 + y^3 + ln(1+y^2)\,,\ \frac{2xy}{1+y^2} + e^{1+y^2}\right).$$

Vamos usar o Teorema de Green. Tem-se que:

(1) $\displaystyle\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \left(\frac{2y}{1+y^2}\right) - \left(3y^2 + \frac{2y}{1+y^2}\right) = -3y^2$

(2) Sendo D a região do $\mathbb{R}^2$ limitada por γ e α, onde $\alpha(t) = (t,0)$, com $-3 \leq t \leq 3$, vem que:

(2.1) $\vec{F}$ é de classe C^1 no $\mathbb{R}^2$.

(2.2) $\partial D = \alpha \cup \gamma$ é orientada positivamente (sentido anti-horário), de forma que a região D fic a esquesda. Observar a Fig. 2.

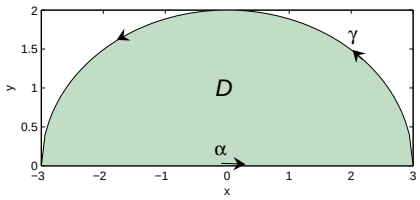

Figura 2: **Região D e fronteira γ, α.**

Tendo em vista as afirmações acima podemos aplicar o Teorema de Green:

$$\int_{\gamma\cup\alpha} \vec{F}.d\vec{r} = \int_\gamma Pdx + Qdy + \int_\alpha Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

Mas

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \iint_D -3y^2 dx\,dy$$

A integral acima torna-se mais fácil com uso de coordenadas polares. Sendo $x = 3r\cos\theta$ e $y = 2r\sin\theta$, o domínio D de integração fica $D_{r\theta} = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq 1 \ e \ 0 \leq \theta \leq \pi\}$ e o módulo do Jacobiano é $|J| = 6r$. Assim,

$$\iint_D -3y^2 dx\, dy = \iint_{D_{r\theta}} -3.(2r\sin\theta)^2.6r dr\, d\theta = -18\int_0^\pi \int_0^1 \sin^2\theta.4r^3 dr\, d\theta =$$

$$= -18\int_0^\pi \frac{1-\cos 2\theta}{2}.\left(r^4\Big|_0^1\right)d\theta = -18.\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right|_0^\pi = -9\pi$$

$$\int_\alpha Pdx + Qdy = \int_{-3}^3 (P(t,0), Q(t,0)).(1,0)dt = \int_{-3}^3 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_{-3}^3 = 18$$

Portanto,

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\, dy - \int_\alpha Pdx + Qdy = -9\pi - 18$$

Questão 3. (3 pontos) Seja

$$\vec{F} = \frac{(-y,\ x-1)}{(x-1)^2 + 4y^2}\vec{i} + (e^{x^3} + yx^2,\ e^y - xy^2)\vec{j}$$

e γ a curva $x^2 + y^2 = 16$, percorrida uma vez no sentido anti-horário. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$

Solução: Sendo

$$\begin{cases} \vec{F_1} = \frac{(-y,\ x-1)}{(x-1)^2+4y^2} \\ \vec{F_2} = (e^{x^3} + yx^2,\ e^y - xy^2) \end{cases}$$

temos

$$\begin{cases} \vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} \ e \\ \displaystyle\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F_1}\cdot d\vec{r} + \int_\gamma \vec{F_2}\cdot d\vec{r} \end{cases}$$

(1) Passamos a calcular $\displaystyle\int_\gamma \vec{F_1}\cdot d\vec{r}$,

$$Rot(\vec{F_1})\cdot\vec{k} = \frac{1}{(x-1)^2+4y^2} - \frac{2(x-1)^2}{((x-1)^2+4y^2)^2} + \frac{1}{(x-1)^2+4y^2}$$

$$-\frac{8y^2}{(x-1)^2+4y^2} = \frac{2}{(x-1)^2+4y^2} - \frac{2((x-1)^2+4y^2)}{((x-1)^2+4y^2)^2} = 0$$

e $Dom(\vec{F_1}) = \mathbb{R}^2 - (1,0)$. Para calcular $\int_\gamma \vec{F_1}\cdot d\vec{r}$ NÃO podemos aplicar o Teorema de Green diretamente pois o campo $\vec{F_2}$ não está definido em (1,0). Assim, escolhe-se $a > 0$ suficientemente pequeno tal que a circunferência $\gamma_a : (x-1)^2 + 4y^2 = a^2$ esteja contida no interior de γ, ver Fig. 3. Note que basta tomar $a = 1$.

Seja $R = Ext(\gamma_a) \cap Int(\gamma)$ e aplicando o Teorema de Green:

$$\int_\gamma \vec{F_1}\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_a} \vec{F_1}\cdot d\vec{r} = \int\int_R Rot(\vec{F_1})\cdot\vec{k}dxdy = 0$$

Assim,

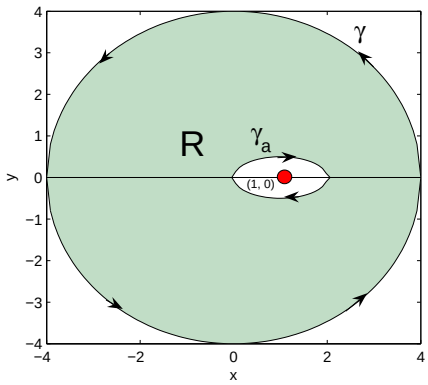

Figura 3: **Região R e fronteira γ, γ_a.**

$$\int_\gamma \vec{F_1} \cdot d\vec{r} = -\int_{\gamma_a} \vec{F_1} \cdot d\vec{r}.$$

Parametrizamos γ_a no sentido horário, $\gamma_a(t) = (1 + sen(t), \frac{cos(t)}{2})$, $t \in [-\pi, \pi]$. Então:

$$\int_\gamma \vec{F_1} \cdot d\vec{r} = -\int_{\gamma_a} \vec{F_1} \cdot d\vec{r} = -\int_{-\pi}^{\pi} -\frac{(\frac{-cos(t)}{2},\ sen(t))}{1} \cdot (cos(t),\ -\frac{sen(t)}{2})dt = \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{1}{2}dt = -\pi$$

(2) Agora, calculemos $\int_\gamma \vec{F_2} \cdot d\vec{r}$.

$$Rot(\vec{F_2}) \cdot \vec{k} = -y^2 - x^2$$

e $Dom(\vec{F_2}) = \mathbb{R}^2$. Seja $R = Int(\gamma) \subset Dom(\vec{F_2})$ e orientamos γ no sentido anti-horário. Aplicando o Teorema de Green:

$$\int_\gamma \vec{F_2} \cdot d\vec{r} = \int\int_R -(y^2 + x^2)dxdy,$$

onde a região R em coordenadas polares fica:

$$R = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq \rho \leq 4; -\pi \leq \theta \leq \pi\}$$

Então:

$$\int_\gamma \vec{F_2} \cdot d\vec{r} = \int_0^4 \int_{-\pi}^{\pi} \rho^3 d\theta d\rho = -2\pi \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^4 = -128\pi$$

Finalmente de (1) e (2):

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \pi - 128\pi = -127\pi$$

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
2ª Prova - 1° semestre de 2008

Turma B

Questão 1.

(a) (2 pontos) Determine a massa de um fio com densidade $\delta(x, y, z) = yz$ e formato de curva dada pela intersecção das superfícies $y^2 + z^2 = 9$ e $x = 1 - \frac{y}{3}$, com $y \geq 0$ e $z \geq 0$.

(b) (2 pontos) Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ sendo dados $\gamma(t) = (2t^3, 1 - t^5, 2t)$, $\quad t \in [0, 1]$ e

$$\vec{F} = \left(2x + \frac{xe^{yz}}{\sqrt{x^2+1}}, y + ze^{yz}\sqrt{x^2+1}, z + ye^{yz}\sqrt{x^2+1}\right).$$

Solução:

(a) A curva dada pela intersecção das superfícies $y^2 + z^2 = 9$ e $x = 1 - \frac{y}{3}$ com $y \geq 0$ e $z \geq 0$ é representada pela seguinte parametrização:

$$\gamma(t) = (1 - \cos t, 3\cos t, 3\sin t), t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Então $\gamma'(t) = (\sin t, -3\sin t, 3\cos t)$ com $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Usando que $\delta(x, y, z) = yz$, a massa M é

$$\begin{aligned} M = \int_\gamma \delta(x, y, z)ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta(\gamma(t))||\gamma'(t)||dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9\sin t\cos t\sqrt{9 + \sin^2 t}dt \\ &= 3(9 + \sin^2 t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 3(10\sqrt{10} - 27). \end{aligned}$$

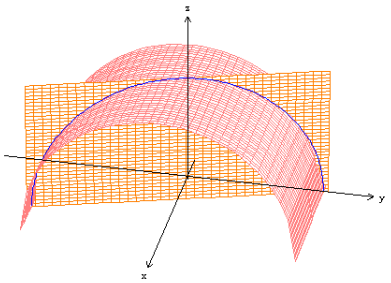

Figura 4: **Gráfico da curva.**

(b) $\vec{F}$ é um campo conservativo em $\mathbb{R}^3$ pois

$$\text{Rot } \vec{F} = (e^{yz}\sqrt{x^2+1} + yz\, e^{yz}\sqrt{x^2+1} - e^{yz}\sqrt{x^2+1} - yz\, e^{yz}\sqrt{x^2+1},$$

$$\tfrac{xy\, e^{yz}}{\sqrt{x^2+1}} - \tfrac{xy\, e^{yz}}{\sqrt{x^2+1}}, \tfrac{zx\, e^{yz}}{\sqrt{x^2+1}} - \tfrac{zx\, e^{yz}}{\sqrt{x^2+1}}) = (0, 0, 0)$$

Logo $\vec{F} = \nabla\varphi$ em $\mathbb{R}^3$ onde

$$\varphi(x,y,z) = x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + e^{yz}\sqrt{x^2+1},$$

assim

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \varphi(\gamma(1)) - \varphi(\gamma(0)) = \varphi(2,0,2) - \varphi(0,1,0) = 6 + \sqrt{5} - \frac{1}{2} - 1 = \frac{9}{2} + \sqrt{5}.$$

Questão 2. (3 pontos) Calcule

$$\int_\gamma \left[\frac{2xy}{1+x^2} + e^{1+x^2}\right]dx + [x^3 + y^2 + ln(1+x^2)]dy$$

sendo γ a semi-elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, $x \leq 0$, orientada no sentido anti-horário.

Solução: Queremos calcular $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r}$, onde

$$\vec{F} = (P,Q) = \left(\frac{2xy}{1+x^2} + e^{1+x^2}\ ,\ x^3 + y^2 + ln(1+x^2)\right).$$

Vamos usar o Teorema de Green.

(1) $\displaystyle\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \left(3x^2 + \frac{2x}{1+x^2}\right) - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = 3x^2.$

(2) Sendo D a região do $\mathbb{R}^2$ limitada por γ e α, onde $\alpha(t) = (0,t)$, com $-3 \leq t \leq 3$, vem que:

(2.1) $\vec{F}$ é de classe C^1 no $\mathbb{R}^2$.

(2.2) $\partial D = \alpha \cup \gamma$ é orientada positivamente (sentido anti-horário).

Observar Fig. 2.

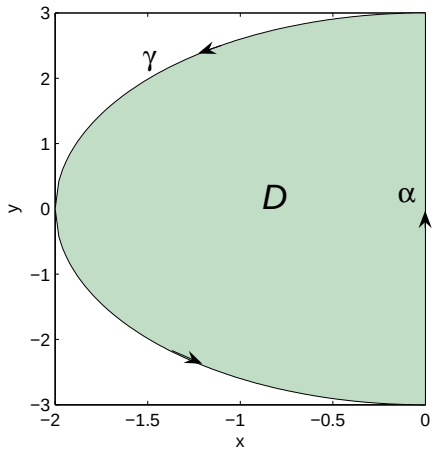

Figura 5: **Região D e fronteira γ, α**

Pelo Teorema de Green (e informações 1 e 2 acima):

$$\int_{\gamma\cup\alpha}\vec{F}.d\vec{r}=\int_{\gamma}Pdx+Qdy+\int_{\alpha}Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

Mas

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint_D 3x^2dx\,dy$$

A integral acima torna-se mais fácil com uso de coordenadas polares. Sendo $x=2r\cos\theta$ e $y=3r\sin\theta$, o domínio D de integração fica $D_{r\theta}=\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2:0\leq r\leq 1\ e\ \frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{3\pi}{2}\}$ e o módulo do Jacobiano é $|J|=6r$. Assim,

$$\iint_D 3x^2dx\,dy=\iint_{D_{r\theta}}3.(2r\cos\theta)^2.6rdr\,d\theta=18\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\int_0^1\cos^2\theta.4r^3dr\,d\theta=$$

$$=18\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}.\left(r^4\Big|_0^1\right)d\theta=18.\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=9\pi$$

$$\int_{\alpha}Pdx+Qdy=\int_{-3}^{3}(P(0,t),Q(0,t)).(0,1)dt=\int_{-3}^{3}t^2dt=\frac{t^3}{3}\Big|_{-3}^{3}=18$$

Portanto,

$$\int_{\gamma}Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy-\int_{\alpha}Pdx+Qdy=9\pi-18$$

Questão 3. Seja

$$\vec{F}=\frac{(-y,\ x-1)}{(x-1)^2+4y^2}\vec{i}+(e^{x^3}+yx^2,\ e^y-xy^2)\vec{j}$$

e γ a curva $x^2+y^2=16$, percorrida uma vez no sentido anti-horário. Calcule $\displaystyle\int_{\gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}$

Solução: Sendo

$$\begin{cases}\vec{F_1}=\frac{(-y,\,x-1)}{(x-1)^2+4y^2}\\ \vec{F_2}=((e^{x^3}+yx^2,\ e^y-xy^2)\end{cases}$$

temos:

$$\begin{cases}\vec{F}=\vec{F_1}+\vec{F_2}\ e\\ \displaystyle\int_{\gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{\gamma}\vec{F_1}\cdot d\vec{r}+\int_{\gamma}\vec{F_2}\cdot d\vec{r}\end{cases}$$

1. Passemos a calcular $\int_{\gamma}\vec{F_1}\cdot d\vec{r}$,

$$Rot(\vec{F_1})\cdot\vec{k}=\frac{1}{(x-1)^2+4y^2}-\frac{2(x-1)^2}{((x-1)^2+4y^2)^2}+\frac{1}{(x-1)^2+4y^2}$$

$$-\frac{8y^2}{(x-1)^2+4y^2}=\frac{2}{(x-1)^2+4y^2}-\frac{2((x-1)^2+4y^2)}{((x-1)^2+4y^2)^2}=0$$

e $Dom(\vec{F_1}) = \mathbb{R}^2 - (1,0)$. Para calcular $\int_\gamma \vec{F_1} \cdot d\vec{r}$ NÃO podemos aplicar o Teorema de Green diretamente pois o campo F_2 não está definido em (1,0). Assim,escolhe-se $a > o$ suficientemente pequeno tal que a circunferência $\gamma_a : (x-1)^2 + 4y^2 = a^2$ esteja contida no interior de γ, ver Fig. 3.Note que basta tomar $a = 1$.

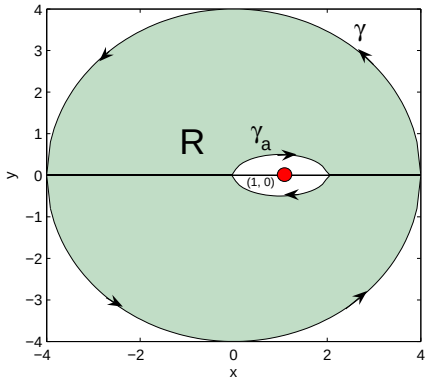

Figura 6: **Região R e fronteira γ, γ_a .**

Seja $R = Ext(\gamma_a) \cap Int(\gamma)$ e aplicando o Teorema de Green:

$$\int_\gamma \vec{F_1} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_a} \vec{F_1} \cdot d\vec{r} = \int\int_R Rot(\vec{F_1}) \cdot \vec{k} dxdy = 0$$

Assim,

$$\int_\gamma \vec{F_1} \cdot d\vec{r} = -\int_{\gamma_a} \vec{F_1} \cdot d\vec{r}.$$

Parametrizamos γ_a no sentido horário, $\gamma_a(t) = (1 + sen(t), \frac{cos(t)}{2})$, $t \in [-\pi, \pi]$. Então:

$$\int_\gamma \vec{F_1} \cdot d\vec{r} = -\int_{\gamma_a} \vec{F_1} \cdot d\vec{r} = -\int_{-\pi}^{\pi} -\frac{(\frac{-cos(t)}{2},\ sen(t))}{1} \cdot (cos(t),\ -\frac{sen(t)}{2})dt = \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{1}{2}dt = -\pi$$

2. Agora, calculemos $\int_\gamma \vec{F_2} \cdot d\vec{r}$.

$$Rot(\vec{F_2}) \cdot \vec{k} = -y^2 - x^2$$

e $Dom(\vec{F_2}) = \mathbb{R}^2$. Seja $R = Int(\gamma) \subset Dom(\vec{F_2})$ e orientamos γ no sentido anti-horário. Aplicando o Teorema de Green:

$$\int_\gamma \vec{F_2} \cdot d\vec{r} = \int\int_R -(y^2 + x^2)dxdy,$$

onde a região R em coordenadas polares fica:

$$R = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq \rho \leq 4; -\pi \leq \theta \leq \pi\}$$

Então:

$$\int_\gamma \vec{F_2} \cdot d\vec{r} = \int_0^4 \int_{-\pi}^{\pi} \rho^3 d\theta d\rho = -2\pi \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^4 = -128\pi$$

Finalmente de (1) e (2):

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \pi - 128\pi = -127\pi$$