Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
2ª Prova - 1° semestre de 2007

Turma A

Questão 1.

a) (valor: 1,5) Calcule $\int_\gamma (xe^{z^2} - y)ds$, onde γ é o arco circular dado por $x = 0$, $y^2 + z^2 = 4$ de (0,2,0) a (0,0,2), e sendo $z \geq 0$.

b) (valor: 2,5) Calcule $\int_\gamma (y+e^x)dx+(2x+\ln(1+e^y))dy$, e sendo γ o arco da curva $y = \operatorname{sen} x$ percorrido de (0,0) até $(\pi, 0)$.

Solução: a) A curva γ (veja Fig. 1) é dada pela seguinte parametrização:

$$\begin{aligned} x(t) &= 0 \\ y(t) &= 2\cos t, \quad t \in [0, \pi/2] \\ z(t) &= 2\operatorname{sen} t \end{aligned}$$

e então $\gamma'(t) = (0, -2 \text{ sen } t, 2\cos t)$. Então $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-2\operatorname{sen} t)^2 + (2\cos t)^2} = 2$. Logo,

$$\int_\gamma (xe^{z^2} - y)ds = \int_0^{\pi/2} \Big(-2\cos t\,(2)\Big)dt = -4\operatorname{sen} t|_0^{\pi/2} = -4 \quad \blacksquare$$

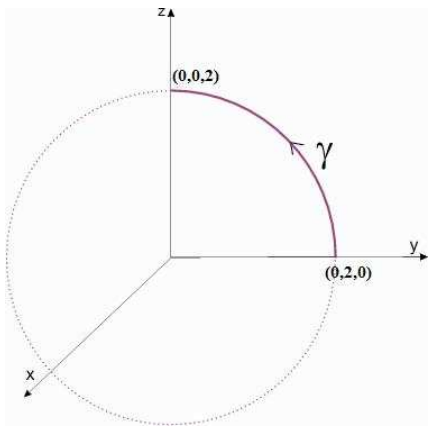

Figura 1: Gráfico da curva γ

Solução: b) Uma parametrização da curva γ (veja Fig. 2) é $\gamma(t) = (t, \text{ sen } t)$ para $t \in [0, \pi]$.

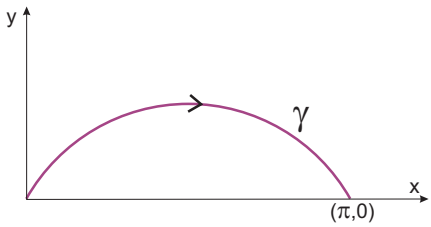

Figura 2: Gráfico da curva γ

As componentes do campo são:

$$\begin{aligned} P(x,y) &= y + e^x \\ Q(x,y) &= 2x + \ln(1+e^y) \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= 1 \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= 2 \end{aligned}$$

Para aplicar o Teorema de Green, completamos γ para uma curva fechada que delimita a região D, assim como mostrada a Fig. 3, onde

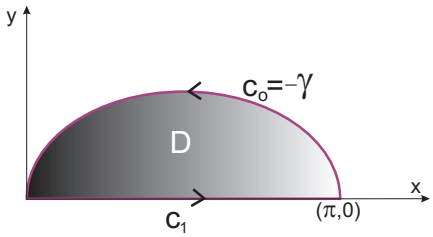

Figura 3: Região D limitada pelas curvas c_0 e c_1.

$$\begin{aligned} c_0 &= -\gamma \\ c_1 &= \text{segmento de reta de} \quad (0,0) \quad \text{até} \quad (\pi,0) \end{aligned}$$

Note que a curva $c_0 \cup c_1$ é fechada e orientada de modo a deixar a região interior D a esquerda.

E

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = -\int_{-\gamma} Pdx + Qdy = -\int_{c_0} Pdx + Qdy \tag{1}$$

Agora, pelo Terema de Green temos que

$$\oint_{c_0 \cup c_1} Pdx + Qdy = \int\int_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dA = \int\int_D dA \tag{2}$$

De Eq. (2), temos:

$$\int_{c_0} Pdx + Qdy = \underbrace{\int\int_D dA}_{I_1} - \underbrace{\int_{c_1} Pdx + Qdy}_{I_2} \tag{3}$$

- **Cálculo de I_1:**

$$I_1 = \int_0^\pi \int_0^{\operatorname{sen} x} dydx = \int_0^\pi \operatorname{sen} x dx = -\cos x|_0^\pi = 2 \tag{4}$$

- **Cálculo de I_2:**

$$I_2 = \int_0^{\pi} dt = e^{\pi} - 1 \tag{5}$$

Substituindo equações (4) e (5) em Eq. (3), temos:

$$\int_{c_0} Pdx + Qdy = 2 - e^{\pi} + 1 = 3 - e^{\pi} \tag{6}$$

Finalmente, substituindo Eq. (6) em Eq. (1), temos:

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = -(3 - e^{\pi}) = e^{\pi} - 3 \quad \blacksquare \tag{7}$$

Questão 2. (valor:2,5) Calcule $\int_{\gamma} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ onde

$$\overrightarrow{F}(x,y) = [(x^2 + y^2 + 2x)e^x - \operatorname{sen} x]\,\overrightarrow{i} + 2ye^x\,\overrightarrow{j}$$

e $\gamma(t) = (t, \operatorname{sen} t), \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Solução: As componentes do campo $\overrightarrow{F}$ são

$$\begin{aligned} P(x,y) &= (x^2 + y^2 + 2x)e^x - \operatorname{sen} x \\ Q(x,y) &= 2ye^x \end{aligned}$$

Existe uma função escalar $\varphi(x,y)$ tal que $\nabla\varphi = \overrightarrow{F}$. De fato, se

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (x^2 + y^2 + 2x)e^x - \operatorname{sen} x \tag{8}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2ye^x \tag{9}$$

temos de (9) que

$$\varphi(x,y) = y^2e^x + h(x) \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = y^2e^x + h'(x). \tag{10}$$

Igualando Eq. (10) com Eq. (8), temos:

$$(x^2 + y^2 + 2x)e^x - \operatorname{sen} x = y^2e^x + h'(x) \tag{11}$$

Logo,

$$h'(x) = (x^2 + 2x)e^x - \operatorname{sen} x \tag{12}$$

Integrando Eq. (12), temos:

$$\begin{aligned} h(x) &= \int (x^2 + 2x)e^x dx + \cos x + k_0, \quad (k_0 : \text{constante}) \\ &= x^2e^x + \cos x + k_0 \end{aligned} \tag{13}$$

Obs: $\frac{d(x^2e^x)}{dx} = 2xe^x + x^2e^x$

Substituindo Eq. (13)em Eq. (10):

$$\varphi(x,y) = y^2e^x + x^2e^x + \cos x + k_0 \tag{14}$$

Logo a integral de linha do campo $\overrightarrow{F}$ é independente do caminho, ou seja, é conservativo. Portanto,

$$\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \varphi(\gamma(\pi/2)) - \varphi(\gamma(0)) = \varphi(\frac{\pi}{2}, 1) - \varphi(0,0) = e^{\pi/2}(1 + \frac{\pi^2}{4}) - 1 \quad \blacksquare$$

Questão 3.(valor: 3,5) Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{-ydx + xdy}{\frac{x^2}{4} + y^2}$ onde γ é a curva $\frac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 1$ percorrida uma vez no sentido anti-horário.

Solução: A curva γ, mostrada na Fig. 4, tem a seguinte equação:

$$\frac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 1$$

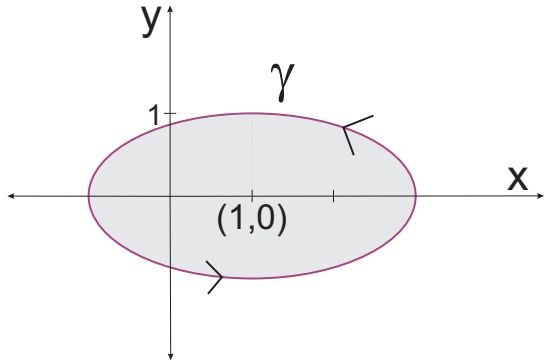

Figura 4: A curva γ.

As componentes do campo $\overrightarrow{F}$ são:

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \frac{-y}{\frac{x^2}{4} + y^2} \\ Q(x,y) &= \frac{x}{\frac{x^2}{4} + y^2} \end{aligned}$$

Logo, suas derivadas são:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - \frac{x^2}{4}}{(\frac{x^2}{4} + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \tag{15}$$

Para aplicar o Teorema de Green, consideremos a região D exterior a c e interior a γ, veja Fig. 5, onde c é o gráfico da elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = a^2$, com $a > 0$ sufucientemente pequeno, e orientada no sentido horário. Assim

$$\int\int_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dA = \oint_\gamma Pdx + Qdy + \oint_c Pdx + Qdy \tag{16}$$

Substituindo Eq. (15) em Eq. (16), temos:

$$\oint_\gamma Pdx + Qdy = -\oint_c Pdx + Qdy = \underbrace{\oint_{-c} Pdx + Qdy}_{I_1} \tag{17}$$

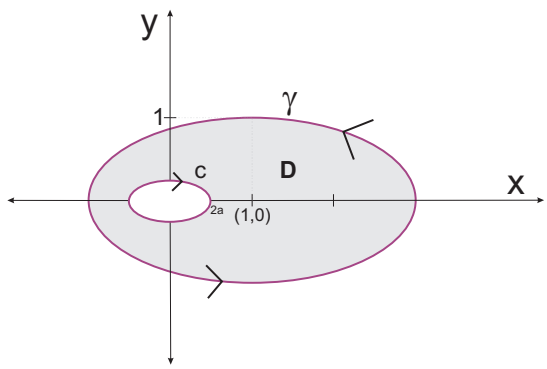

Figura 5: Região D.

- **Cálculo de I_1:**

A curva $-c$, é definida por:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2a\cos t \\ y(t) &= a\,\mathrm{sen}\,t, \quad t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

Logo,

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{2a^2\,\mathrm{sen}^2\,t + 2a^2\cos^2 t}{a^2} dt = 2\int_0^{2\pi} dt = 4\pi \tag{18}$$

Finalmente, substituindo Eq. (18) em Eq. (17), temos:

$$\oint_\gamma P dx + Q dy = 4\pi \quad \blacksquare \tag{19}$$

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
2ª Prova - 1° semestre de 2007

Turma B

Questão 1.

a) (valor: 1,5) Calcule $\int_\gamma (xe^{y^2} - z)ds$, onde γ é o arco circular dado por $x = 0$, $y^2 + z^2 = 4$ de (0,2,0) a (0,0,2), e sendo $z \geq 0$.

b) (valor: 2,5) Calcule $\int_\gamma (y+e^x)dx+(2x+\ln(1+e^y))dy$, e sendo γ o arco da curva $y = \operatorname{sen} x$ percorrido de (0,0) até $(\pi, 0)$.

Solução: a) A curva γ (veja Fig. 1) é dada por:

$$\begin{aligned} x(t) &= 0 \\ y(t) &= 2\cos t, \quad t \in [0, \pi/2] \\ z(t) &= 2\operatorname{sen} t \end{aligned}$$

e $\gamma'(t) = (0, -2\operatorname{sen} t, 2\cos t)$. Então $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-2\operatorname{sen} t)^2 + (2\cos t)^2} = 2$.
Logo,

$$\int_\gamma (xe^{y^2} - z)ds = \int_0^{\pi/2} \Big[-2\operatorname{sen} t\,(2)\Big]dt = 4\cos t|_0^{\pi/2} = -4 \quad \blacksquare$$

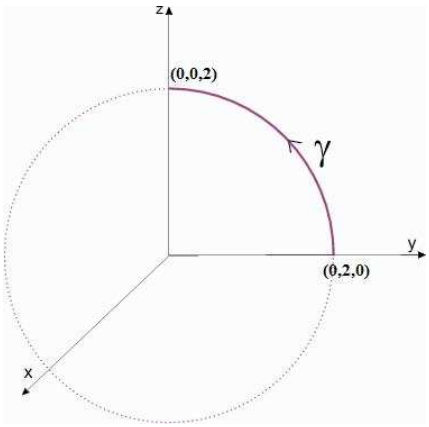

Figura 6: **Gráfico da curva** γ

Solução: b) Uma parametrização da curva γ (veja Fig. 2) é $\gamma(t) = (t,\ \operatorname{sen} t)$ para $t \in [0, \pi]$.

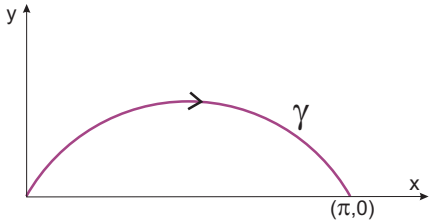

Figura 7: Gráfico da curva γ

As componentes do campo são:

$$\begin{aligned} P(x,y) &= y + e^x \\ Q(x,y) &= 2x + \ln(1+e^y) \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} &= 1 \\ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} &= 2 \end{aligned}$$

Para aplicar o Teorema de Green, completamos γ para obter uma curva fechada que delimita a região D, assim como mostrada a Fig. 3, onde

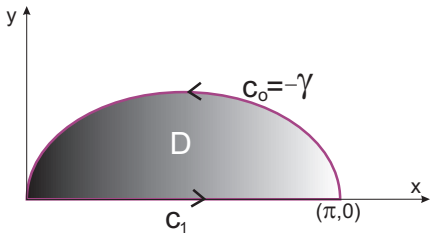

Figura 8: Região D limitada pelas curvas c_0 e c_1.

$$\begin{aligned} c_0 &= -\gamma \\ c_1 &= \text{segmento de reta de} \quad (0,0) \quad \text{até} \quad (\pi,0) \end{aligned}$$

Note que a curva $c_0 \cup c_1$ é fechada e orientada de modo a deixar a região interior D a esquerda. Logo,

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = -\int_{-\gamma} Pdx + Qdy = -\int_{c_0} Pdx + Qdy \tag{20}$$

Agora, Green implica:

$$\oint_{c_0 \cup c_1} Pdx + Qdy = \int\int_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dA = \int\int_D dA \tag{21}$$

De Eq. (2), temos:

$$\int_{c_0} Pdx + Qdy = \underbrace{\int\int_D dA}_{I_1} - \underbrace{\int_{c_1} Pdx + Qdy}_{I_2} \tag{22}$$

- **Cálculo de I_1:**

$$I_1 = \int_0^\pi \int_0^{\operatorname{sen} x} dydx = \int_0^\pi \operatorname{sen} x dx = -\cos x|_0^\pi = 2 \tag{23}$$

- **Cálculo de I_2:**

$$I_2 = \int_0^{\pi} dt = e^{\pi} - 1 \tag{24}$$

Substituindo equações (4) e (5) em Eq. (3), temos:

$$\int_{c_0} Pdx + Qdy = 2 - e^{\pi} + 1 = 3 - e^{\pi} \tag{25}$$

Finalmente, substituindo Eq. (6) em Eq. (1), temos:

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = -(3 - e^{\pi}) = e^{\pi} - 3 \quad \blacksquare \tag{26}$$

Questão 2. a) (valor:2,5) Calcule $\int_{\gamma} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ onde $\overrightarrow{F}(x,y) = [(x^2+y^2+2x)e^x - \cos x]\overrightarrow{i} + 2ye^x\overrightarrow{j}$ e $r(t) = (t, \cos t), \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Solução: Defina-se as componentes do campo $\overrightarrow{F}$ como:

$$\begin{aligned} P(x,y) &= (x^2+y^2+2x)e^x - \cos x \\ Q(x,y) &= 2ye^x \end{aligned}$$

Demonstraremos que existe uma função escalar $\varphi(x,y)$ tal que $\nabla\varphi = \overrightarrow{F}$. Então, se:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (x^2+y^2+2x)e^x - \cos x \tag{27}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2ye^x \tag{28}$$

temos que:

$$\varphi(x,y) = y^2e^x + h(x) \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = y^2e^x + h'(x). \tag{29}$$

Igualando Eq. (10) com Eq. (8), temos:

$$(x^2+y^2+2x)e^x - \cos x = y^2e^x + h'(x) \tag{30}$$

Logo,

$$h'(x) = (x^2+2x)e^x - \cos x \tag{31}$$

Integrando Eq. (12), temos:

$$\begin{aligned} h(x) &= \int (x^2+2x)e^x dx - \operatorname{sen} x + k_0, \quad (k_0 : \text{constante}) \\ &= x^2e^x - \operatorname{sen} x + k_0 \end{aligned} \tag{32}$$

Substituindo Eq. (13)em Eq. (10):

$$\varphi(x,y) = y^2e^x + x^2e^x - \operatorname{sen} x + k_0 \tag{33}$$

Logo o campo $\overrightarrow{F}$ é independente do caminho (também, conservativo). Portanto,

$$\int_{\gamma} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \varphi(\gamma(\pi/2)) - \varphi(\gamma(0)) = \varphi(\frac{\pi}{2}, 0) - \varphi(0,1) = \frac{\pi^2}{4}e^{\pi/2} - 2 \quad \blacksquare$$

Questão 3. a) (valor:3,5) Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{-ydx + xdy}{\frac{x^2}{9} + y^2}$ onde γ é a curva $\frac{(x-1)^2}{9} + y^2 = 1$ percorrida uma vez no sentido anti-horário.

Solução: A curva γ, mostrada na Fig. 4, tem a seguinte equação:

$$\frac{(x-1)^2}{9} + y^2 = 1$$

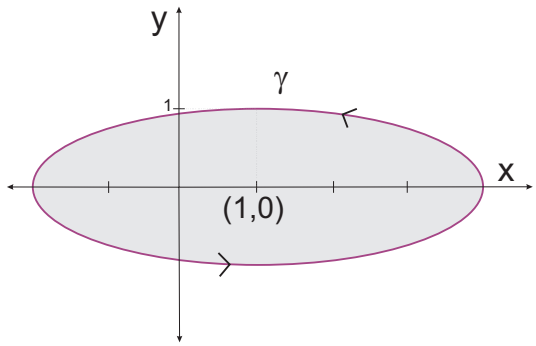

Figura 9: A curva γ.

As componentes do campo $\overrightarrow{F}$ são:

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \frac{-y}{\frac{x^2}{9} + y^2} \\ Q(x,y) &= \frac{x}{\frac{x^2}{9} + y^2} \end{aligned}$$

Logo, suas derivadas são:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - \frac{x^2}{9}}{(\frac{x^2}{9} + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \tag{34}$$

Para aplicar o Teorema de Green, consideremos c a elipse $\frac{x^2}{9} + y^2 = a^2$, com $a > 0$ suficientemente pequeno e orientada no sentido horário. Assim

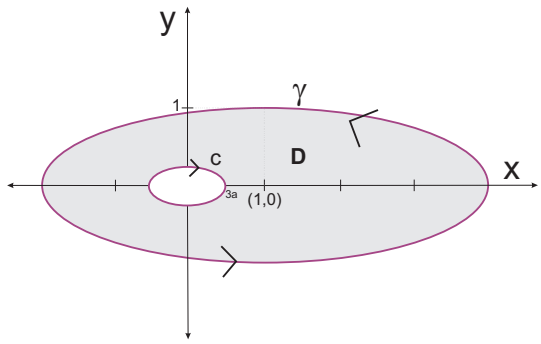

Figura 10: Região D.

Assim, para D região interior a γ e exterior a c temos

$$\int\int_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dA = \oint_\gamma P dx + Q dy + \oint_c P dx + Q dy \tag{35}$$

Substituindo Eq. (15) em Eq. (16), temos:

$$\oint_\gamma P dx + Q dy = -\oint_c P dx + Q dy = \underbrace{\oint_{-c} P dx + Q dy}_{I_1} \tag{36}$$

- **Cálculo de I_1:**

A curva $-c$, é definida por:

$$\begin{aligned} x(t) &= 3a\cos t \\ y(t) &= a\,\mathrm{sen}\, t, \quad t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

Logo,

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{3a^2\,\mathrm{sen}^2\, t + 3a^2\cos^2 t}{a^2} dt = 3\int_0^{2\pi} dt = 6\pi \tag{37}$$

Finalmente, substituindo Eq. (18) em Eq. (17), temos:

$$\oint_\gamma P dx + Q dy = 6\pi \quad \blacksquare \tag{38}$$