Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
2ª Prova - 1° semestre de 2006

Turma A

Questão 1.

a) (valor:1,0) Mostre que o campo $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (y^3\cos x, 3y^2\,\text{sen}x + z, y)$ é conservativo.
b) (valor 2,0) Calcule

$$\int_\gamma y^3\cos x dx + (3y^2\ \text{sen}\,x + z)dy + (y + z^2)dz$$

onde $\gamma(t) = (e^{t^2}\ln(t+1), t^3 - 1, 3t - 3)$, para $0 \le t \le 1$.

Solução: a) Devemos mostrar que existe uma função: $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla\varphi = \overrightarrow{F}$. Logo

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = y^3\cos x \tag{1}$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 3y^2\,\text{sen}x + z \tag{2}$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = y \tag{3}$$

Integrando a Eq. (1) em relação a x, temos:

$$\varphi(x,y,z) = y^3\,\text{sen}x + h(y,z) \tag{4}$$

Derivando Eq. (4) em relação a y, temos:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 3y^2\,\text{sen}x + \frac{\partial h}{\partial y} = 3y^2\,\text{sen}x + z$$

$$\therefore \frac{\partial h}{\partial y} = z, \quad h(y,z) = zy + g(z) \tag{5}$$

De Eq. (3), temos:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = y + g'(z) = y \Rightarrow g'(z) = 0 \tag{6}$$

Assim, podemos escolher:

$$g(z) = 0$$

Logo, substituindo esta última equação em Eq. (5) e esse valor em Eq. (4), temos:

$$\varphi(x,y,z) = y^3\,\text{sen}x + zy \quad \blacksquare \tag{7}$$

Solução: b)

$$\begin{aligned}
\int_\gamma (\overrightarrow{F} + z^2\overrightarrow{k})d\overrightarrow{r} &= \int_\gamma \overrightarrow{F}d\overrightarrow{r} + \int_\gamma z^2\overrightarrow{k}\,d\overrightarrow{r} \\
&= \varphi(e\ln 2, 0, 0) - \varphi(0,-1,-3) + \int_0^1 (3t-3)^2 3dt \\
&= -3 + \frac{(3t-3)^3}{3}\Big|_0^1 = -3 + \frac{3^3}{3} = 6 \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Questão 2. (valor:3,0) Calcule $\int_\gamma (\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}).d\overrightarrow{r}$, onde

$$\overrightarrow{F_1}(x,y,z) = \frac{-y\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j}}{x^2+2y^2} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{F_2}(x,y,z) = y(2x-1)\,\overrightarrow{i} + x^2\,\overrightarrow{j}$$

e γ a circunferência de centro $(1,0)$ e raio 4, percorrida no sentido anti-horário.

Solução: Sabemos que:

$$\int_\gamma (\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}).d\overrightarrow{r} = \underbrace{\int_\gamma \overrightarrow{F_1}.d\overrightarrow{r}}_{I_1} + \underbrace{\int_\gamma \overrightarrow{F_2}.d\overrightarrow{r}}_{I_2} \tag{8}$$

- **Cálculo de I_2 :**

Pelo Teorema de Green, temos:

$$I_2 = \int\int_D (2x - 2x + 1)dxdy = \pi(4)^2 = 16\pi \tag{9}$$

- **Cálculo de I_1 :**

Sejam γ_1 a elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ percorrida no sentido horário e R a região interior a γ e exterior a γ_1, dada na Fig. 1. Pelo Teorema de Green, temos:

$$\int_\gamma \overrightarrow{F_1}.d\overrightarrow{r} + \int_{\gamma_1} \overrightarrow{F_1}.d\overrightarrow{r} = \int\int_R \text{Rot}\overrightarrow{F_1}.\overrightarrow{k}\,dxdy = 0, \quad (\text{Rot}\overrightarrow{F_1} = \vec{0}) \tag{10}$$

Logo,

$$I_1 = -\int_{\gamma_1} \overrightarrow{F_1}.d\overrightarrow{r} \tag{11}$$

Por outro lado,

$$\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$\gamma_1(t) = (\text{sen}t, (1/\sqrt{2})\cos t)$$

Então

$$\int_{\gamma_1} \overrightarrow{F_1}.d\overrightarrow{r} = \int_0^{2\pi} \frac{-(1/\sqrt{2})\cos t\cos t + \text{sen}\,t(1/\sqrt{2})(-\text{sen}\,t)}{1}dt \tag{12}$$

$$= -(1/\sqrt{2})2\pi = -\sqrt{2}\pi \tag{13}$$

Logo substituindo em Eq. (11), temos:

$$I_1 = -(-\sqrt{2}\pi) = \sqrt{2}\pi \tag{14}$$

E finalmente substituindo equações (14) e (9) em Eq. (8), temos:

$$\int_\gamma (\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}).d\overrightarrow{r} = \sqrt{2}\pi + 16\pi = (\sqrt{2} + 16)\pi \quad \blacksquare \tag{15}$$

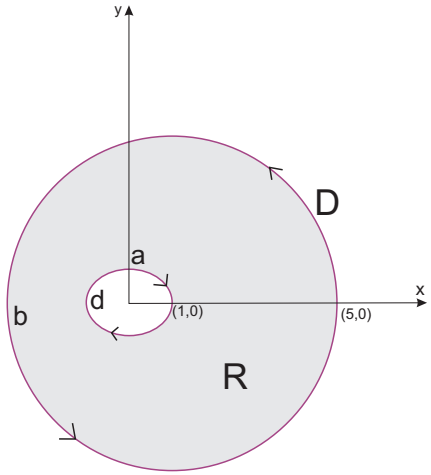

Figura 1: **D, Domínio de integração e, R o anel**

Questão 3. a) (valor:2,0) Calcule a massa da superfície cuja densidade é

$$\rho(x,y,z) = \sqrt{\frac{4-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}$$

e que tem a forma da região do gráfico de $z = xy$ limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

b) (valor 2,0) Calcule a integral de linha $\int_\gamma x ds$, onde γ é a intersecção da superfície $z = x^2 - y^2$ com o plano $x = 2y$, para $0 \leq x \leq 1$.

Solução: a) Considere-se a seguinte parametrização da superfície S:

$$\Gamma(u,v) = (u, v, uv) \tag{16}$$

onde o domínio D é dado por:

$$D = \{(u,v) : u^2 + v^2 \leq 2u\} \tag{17}$$

Calculemos a derivada da parametrização:

$$\begin{aligned} \Gamma_u &= (1,0,v) \\ \Gamma_v &= (0,1,u) \end{aligned}$$

$$\Gamma_u \wedge \Gamma_v = (-v, -u, 1)$$

Logo

$$|\Gamma_u \wedge \Gamma_v| = \sqrt{1+u^2+v^2} \tag{18}$$

A massa é definida por:

$$\begin{aligned}
\text{Massa} &= \int\int_D \frac{\sqrt{4-u^2-v^2}}{\sqrt{1+u^2+v^2}}\sqrt{1+u^2+v^2}dudv \\
&= \int\int_D \sqrt{4-u^2-v^2}dudv \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} \sqrt{4-r^2}rdrd\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(4-r^2)^{3/2}\Big|_0^{2\cos\theta}d\theta = -\frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(4^{3/2}|\text{sen}\theta|^3 - 4^{3/2})d\theta \\
&= \frac{4^{3/2}}{3}\pi - \frac{2}{3}4^{3/2}\int_0^{\pi/2}\text{sen}^3\theta d\theta \\
&= \frac{8}{3}\pi - \frac{32}{9} = \frac{8}{3}(\pi - \frac{4}{3}) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Solução: b) Dos dados do problema, obtemos o seguinte caminho:

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= (t, \frac{t}{2}, \frac{3t^2}{4}), \quad t \in [0,1] \\
\gamma'(t) &= (1, \frac{1}{2}, \frac{3t}{2}) \\
\left|\gamma'(t)\right| &= \sqrt{\frac{5}{4} + \frac{9t^2}{4}}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma xds &= \int_0^1 t\sqrt{\frac{5}{4} + \frac{9t^2}{4}}dt \\
&= \left(\frac{5}{4} + \frac{9t^2}{4}\right)^{3/2}\frac{41}{27}\Big|_0^1 \\
&= \frac{14^{3/2} - 5^{3/2}}{(27)2} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
2ª Prova - 1° semestre de 2006

Turma B

Questão 1.

a) (valor:1,0) Mostre que o campo $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (y^4\cos x, 4y^3\,\text{sen}x + z, y)$ é conservativo.
b) (valor 2,0) Calcule

$$\int_\gamma y^4\cos x dx + (4y^3\,\text{sen x} + z)dy + (y + z^4)dz$$

onde $\gamma(t) = (e^{t^2}\ln(t+1), t^3 - 1, 5t - 5)$, para $0 \leq t \leq 1$.

Solução: a) Devemos mostrar que existe uma função: $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla\varphi = \overrightarrow{F}$. Logo

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = y^4\cos x \tag{19}$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 4y^3\,\text{sen}x + z \tag{20}$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = y \tag{21}$$

Integrando a Eq. (1) em relação a x, temos:

$$\varphi(x,y,z) = y^4\,\text{sen}x + h(y,z) \tag{22}$$

Derivando Eq. (4) em relação a y, temos:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 4y^3\,\text{sen}x + \frac{\partial h}{\partial y} = 4y^3\,\text{sen}x + z$$

$$\therefore \frac{\partial h}{\partial y} = z, \quad h(y,z) = zy + g(z) \tag{23}$$

De Eq. (3), temos:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = y + g'(z) = y \Rightarrow g'(z) = 0 \tag{24}$$

Assim, podemos escolher:

$$g(z) = 0$$

Logo, substituindo esta última equação em Eq. (5) e esse valor em Eq. (4), temos:

$$\varphi(x,y,z) = y^4\,\text{sen}x + zy \quad \blacksquare \tag{25}$$

Solução: b)

$$\begin{aligned}\int_\gamma (\overrightarrow{F} + z^4\overrightarrow{k})d\overrightarrow{r} &= \int_\gamma \overrightarrow{F}d\overrightarrow{r} + \int_\gamma z^4\overrightarrow{k}\,d\overrightarrow{r} \\ &= \varphi(e\ln 2, 0, 0) - \varphi(0, -1, -5) + \int_0^1 (5t-5)^4 5dt \\ &= -5 + \frac{(5t-5)^5}{5}\Big|_0^1 = -5 + \frac{5^5}{5} = 620 \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Questão 2. (valor:3,0) Calcule $\int_\gamma (\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}).d\overrightarrow{r}$, onde

$$\overrightarrow{F_1}(x,y,z) = \frac{-y\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j}}{x^2+3y^2} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{F_2}(x,y,z) = y(2x-1)\overrightarrow{i} + x^2\overrightarrow{j}$$

e γ a circunferência de centro $(0,1)$ e raio 4, percorrida no sentido anti-horário.

Solução: Sabemos que:

$$\int_\gamma (\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}).d\overrightarrow{r} = \underbrace{\int_\gamma \overrightarrow{F_1}.d\overrightarrow{r}}_{I_1} + \underbrace{\int_\gamma \overrightarrow{F_2}.d\overrightarrow{r}}_{I_2} \tag{26}$$

- **Cálculo de** I_2 :

Pelo Teorema de Green, temos:

$$I_2 = \int\int_D (2x - 2x + 1)dxdy = \pi(4)^2 = 16\pi \tag{27}$$

- **Cálculo de** I_1 :

Sejam γ_1 a elipse $x^2 + 3y^2 = 1$ percorrida no sentido horário e R a região interior e γ e exterior a γ_1 dada na Fig. 2. Pelo Teorema de Green, temos:

$$\int_\gamma \overrightarrow{F_1}.d\overrightarrow{r} + \int_{\gamma_1} \overrightarrow{F_1}.d\overrightarrow{r} = \int\int_R \text{Rot}\overrightarrow{F_1}.\overrightarrow{k}\,dxdy = 0, \quad (\text{Rot}\overrightarrow{F_1} = 0) \tag{28}$$

Logo,

$$I_1 = -\int_{\gamma_1} \overrightarrow{F_1}.d\overrightarrow{r} \tag{29}$$

Por outro lado:

$$\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$\gamma_1(t) = (\text{sen}t, (1/\sqrt{3})\cos t)$$

Então

$$\int_{\gamma_1} \overrightarrow{F_1}.d\overrightarrow{r} = \int_0^{2\pi} \frac{-(1/\sqrt{3})\cos^2 t + \operatorname{sen} t(1/\sqrt{3})(-\operatorname{sen} t)}{1} dt \tag{30}$$

$$= -(1/\sqrt{3})2\pi = -\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi \tag{31}$$

Logo substituindo em Eq. (11), temos:

$$I_1 = -(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\pi \tag{32}$$

e finalmente substituindo equações (14) e (9) em Eq. (8), temos:

$$\int_\gamma (\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}).d\overrightarrow{r} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\pi + 16\pi = 2(\frac{\sqrt{3}}{3} + 8)\pi \quad \blacksquare \tag{33}$$

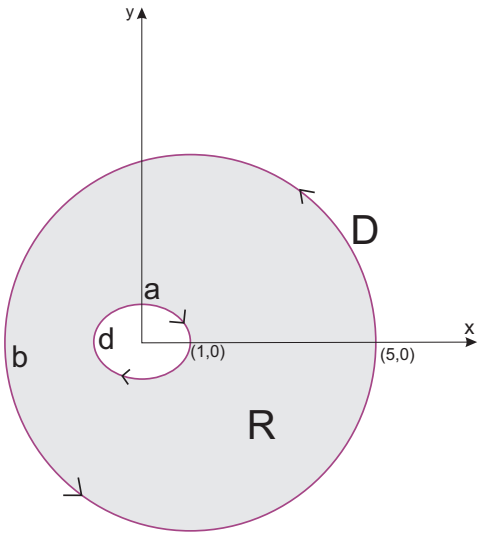

Figura 2: **D: Domínio de integração, R: Area do anel**

Questão 3. a) (valor:2,0) Calcule a massa da superfície cuja densidade é

$$\rho(x, y, z) = \sqrt{\frac{4 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}}$$

e que tem a forma da região do gráfico de $z = xy$ limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2y$.

b) (valor 2,0) Calcule a integral de linha $\int_\gamma x ds$, onde γ é a intersecção da superfície $z = x^2 - y^2$ com o plano $y = 2x$, para $0 \leq y \leq 1$.

Solução: a) Considere-se a seguinte parametrização da superfície S:

$$\Gamma(u, v) = (u, v, uv) \tag{34}$$

onde o domínio D é dado por:

$$D = \{(u,v) : u^2 + v^2 \leq 2v\} \tag{35}$$

Calculemos a derivada da parametrização:

$$\begin{aligned} \Gamma_u &= (1,0,v) \\ \Gamma_v &= (0,1,u) \end{aligned}$$

$$\Gamma_u \wedge \Gamma_v = (-v,-u,1)$$

Logo

$$|\Gamma_u \wedge \Gamma_v| = \sqrt{1+u^2+v^2} \tag{36}$$

A massa é definida por:

$$\begin{aligned} \text{Massa} &= \int\int_D \frac{\sqrt{4-u^2-v^2}}{\sqrt{1+u^2+v^2}}\sqrt{1+u^2+v^2}dudv \\ &= \int\int_D \sqrt{4-u^2-v^2}dudv \\ &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\operatorname{sen}\theta} \sqrt{4-r^2}rdrd\theta \\ &= -\frac{1}{3}\int_0^{\pi}(4-r^2)^{3/2}\Big|_0^{2\operatorname{sen}\theta}d\theta = -\frac{1}{3}\int_0^{\pi}(4^{3/2}|\cos\theta|^3 - 4^{3/2})d\theta \\ &= \frac{4^{3/2}}{3}\pi - \frac{2}{3}4^{3/2}\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta d\theta \\ &= \frac{8}{3}\pi - \frac{16}{3}\int_0^{\pi/2}\cos\theta(1-\operatorname{sen}^2\theta)d\theta = \frac{8}{3}(\pi - \frac{4}{3}) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Solução: b) Dos dados do problema, obtemos o seguinte caminho:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (\frac{t}{2}, t, \frac{3t^2}{4}), \quad t \in [0,1] \\ \gamma'(t) &= (\frac{1}{2}, 1, \frac{3t}{2}) \\ \Big|\gamma'(t)\Big| &= \sqrt{\frac{5}{4} + \frac{9t^2}{4}} = \frac{\sqrt{5+9t^2}}{2} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_\gamma xds &= \int_0^1 \frac{t}{2}\frac{\sqrt{5+9t^2}}{2}dt \\ &= \frac{1}{4}(5+9t^2)^{3/2}\frac{1}{27}\Big|_0^1 \\ &= (14^{3/2} - 5^{3/2})\frac{1}{4(27)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$