Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
2ª Prova - 1o semestre de 2005

Questão 1. (2,0 pontos) Calcule $\int_\gamma x\,dy + 2xy\,dz$, sendo γ a curva obtida pela interseção das superfícies $2x^2 + y^2 = 2 + z^2$ e $x - z = 1$, tal que a sua projeção no plano Oxy seja percorrida uma vez no sentido anti-horário.

Solução: A expressão da curva γ é obtida da interseção das superfícies:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 2 + z^2 \\ z = x - 1, \end{cases}$$

então:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 2 + (x-1)^2 \\ (x+1)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Assim, uma parametrização da curva γ no sentido anti-horário é:

$$\begin{cases} x(t) = -1 + 2\cos(t) \\ y(t) = 2\text{sen}\,(t) \\ z(t) = 2\cos(t) - 2, \ (pois\ z = x - 1), \ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x'(t) = -2\text{sen}\,(t) \\ y'(t) = 2\cos(t) \\ z'(t) = -2\text{sen}\,(t) \end{cases}$$

Agora passamos a calcular a integral pedida

$$\int_\gamma x\,dy + 2xy\,dz = \int_0^{2\pi} [2(2\cos(t) - 1)\cos(t) + 4\text{sen}\,(t)(2\cos(t) - 1)(-2\text{sen}\,(t))]\,dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(4\cos^2(t) - 2\cos(t) - 16\text{sen}^2(t)\cos(t) + 8\text{sen}^2(t)\right) dt =$$

$$-2\text{sen}\,(t)\Big|_0^{2\pi} - 16\frac{\text{sen}^3(t)}{3}\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} (4 + 4\text{sen}^2(t))dt =$$

$$0 - 0 + \int_0^{2\pi} (4 + 2 - 2\cos(2t))dt = 6t\Big|_0^{2\pi} - \text{sen}\,(2t)\Big|_0^{2\pi} = 12\pi$$

Então

$$\int_\gamma x\,dy + 2xy\,dz = 12\pi.$$

Questão 2. (3,0 pontos) Seja $\vec{F}(x,y) = (x(e^x)^2 - \dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2} + y\cos(y) + x)$. Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ sendo γ a fronteira da região do plano determinada por $-1 \le y \le 1 - x^2$, orientada no sentido horário.

Solução:

Sejam

$$\vec{F_1}(x,y) = (x(e^x)^2,\ y\cos(y)+x) \ \text{ e } \ \vec{F_2}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2}\right),$$

então

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} \ \text{ e } \ \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F_1}\cdot d\vec{r} + \int_\gamma \vec{F_2}\cdot d\vec{r}$$

Seja B_1 a região $-1 \leq y \leq 1-x^2$. Isto é,

$$B_1 = \left\{(x,y)/-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2},\ -1 \leq y \leq 1-x^2\right\}$$

Aplicando o Teorema de Green para o campo $\vec{F_1}$ na região B_1 temos

$$\int_{\partial B_1} \vec{F_1}\cdot d\vec{r} = \int\int_{B_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

onde

$$P(x,y) = x(e^x)^2 \ \text{ e } \ Q(x,y) = y\cos(y)+x$$

E então

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \ \text{ e } \ \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

Logo,

$$\int_{\partial B_1} \vec{F_1}\cdot d\vec{r} = \int\int_{B_1} 1dxdy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1-x^2} 1dydx =$$

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2-x^2)dx = \left(2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

Para calcular $\int_\gamma \vec{F_2}\cdot d\vec{r}$ NÃO podemos aplicar o Teorema de Green diretamente pois o campo $\vec{F_2}$ não está definido em (0,0) e $(0,0) \in B_1$. Para calcular essa integral, escolhe-se $a > o$ suficientemente grande para que a circunferência $\gamma_a(t) = (a\cos(t), a\text{sen}\,(t))$, $t \in [0, 2\pi]$ contenha B_1 em seu interior; e aplica-se o Teorema de Green na região B_2 comprendida entre as curvas γ e γ_a.

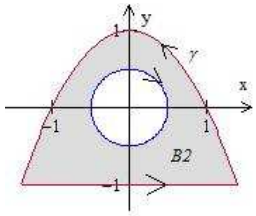

Figura 1. Região B_2 e fronteiras γ, γ_a .

Assim,

$$\int_\gamma \vec{F_2}\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_a} \vec{F_2}\cdot d\vec{r} = \int_{\partial B_2} \vec{F_2}\cdot d\vec{r} = \int\int_{B_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

Onde

$$P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \ \text{ e } \ Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

e

$$\int_{\gamma} \vec{F_2} \cdot d\vec{r} = -\int_{\gamma_a} \vec{F_2} \cdot d\vec{r}.$$

Calculamos a integral na curva γ_a:

$$\int_{\gamma_a} \vec{F_2} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left[\frac{(-a\text{sen}\,(t))(-a\text{sen}\,(t))}{a^2\cos^2(t) + a^2\text{sen}^2(t)} + \frac{(a\cos(t))(a\cos(t))}{a^2\cos^2(t) + a^2\text{sen}^2(t)} \right] dt = \int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi,$$

então

$$\int_{\gamma} \vec{F_2} \cdot d\vec{r} = -2\pi$$

Finalmente,

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \vec{F_1} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma} \vec{F_2} \cdot d\vec{r} = -\frac{8\sqrt{2}}{3} - 2\pi$$

Questão 3.(4,0 pontos)

a)(2,0 pontos) Verifique que o campo $\vec{F} = (yz\cos(xz) + 1,\ \text{sen}\,(xz + 2,\ xy\cos(xz) + 3)$ é conservativo e calcule $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ onde $\gamma(t) = (t,\ 2t^2,\ t^3),\ t \in [0, 1]$.

b)(2,0 pontos) Calcule a massa do fio dado pela interseção da calha $y = x^2$ com o plano $z = x$ e tal que $0 \leq x \leq 1$, sendo a densidade dada por $\delta(x, y, z) = z$.

Solução: a) Para verificar que o campo é conservativo calculemos

a.1)O Rotacional de $\vec{F}$ é dado por:

$$Rot(\vec{F}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz\cos(xz) + 1 & \text{sen}\,(xz) + 2 & xy\cos(xz) + 3 \end{vmatrix} =$$

$$(x\cos(xz) - x\cos(xz),\ y\cos(xz) - xyz\text{sen}\,(xz) - y\cos(xz) + xyz\text{sen}\,(xz),\ z\cos(xz) - z\cos(xz)) =$$
$$= (0, 0, 0)$$

a.2)O Domínio de definição de $\vec{F}$ é $\mathbb{R}^3$, o qual é simplesmente conexo.

De (a.1) e (a.2) concluimos que $\vec{F}$ é conservativo.

Agora vamos obter um potencial φ de $\vec{F}$, isto é, $\vec{\nabla}\varphi = \vec{F}$. Sabendo que:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = yzcos(xz) + 1\ (*) \\ \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = sen(xz) + 2\ (**) \\ \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = xycos(xz) + 3\ (***) \end{cases}$$

Integrando (**) em relação a y:

$$\varphi(x, y, z) = \int (\text{sen}\,(xz) + 2)dy = y\text{sen}\,(xz) + 2y + \eta(x, z)\ (1)$$

Derivando em relação a x:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = yz\cos(xz) + \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

devido a (*) temos $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 1$. Então: $\eta(x,z) = x + \beta(z)$.

Daí, por (1), $\varphi(x,y,z) = y\text{sen}\,(xz) + x + 2y + \beta(z)$ e derivando em relação a z: $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = xy\cos(xz) + \beta^{'}(z)$, e devido a (***) temos: $\beta^{'}(z) = 3$ de onde $\beta(z) = 3z + c$.

Assim temos que os potenciais de $\vec{F}$ são da forma $\varphi(x,y,z) = y\text{sen}\,(xz) + x + 2y + 3z + c$ com $c \in \mathbb{R}$.

Portanto a integral do campo $\vec{F}$ na curva γ fica

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(\gamma(1)) - \varphi(\gamma(0)) = \varphi(1,2,1) - \varphi(0,0,0) = 2\text{sen}\,(1) + 8$$

Observação: Exibir um potencial de $\vec{F}$ é suficiente para provar que ele é conservativo, pois o domínio é $\mathbb{R}^3$, que é conexo.

b)A curva que resulta da interseção de

$$\begin{cases} y = x^2 \\ z = x, \ x \in [0,1] \end{cases}$$

é $\gamma(t) = (t, t^2, t), \ t \in [0,1]$ de onde temos: $\gamma^{'}(t) = (1, 2t, 1)$ e $\left\|\gamma^{'}(t)\right\| = \sqrt{2+4t^2}$.

Assim, a expressão da massa fica:

$$M = \int_0^1 \delta(\gamma(t)) \left\|\gamma^{'}(t)\right\| dt = \int_0^1 z(t) \left\|\gamma^{'}(t)\right\| dt = \int_0^1 t\sqrt{2+4t^2}dt = \frac{1}{12}(6\sqrt{6} - 2\sqrt{2}).$$