**Instituto de Matemática e Estatística da USP**
**MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia**
**2ª Prova - 1o semestre de 2004**

**Questão 1.** (2 pontos) Seja $\gamma(t) = (t, sen(t) - tcos(t), cos(t) + tsen(t)), t \in [0,1]$. Calcule a massa de $\gamma$ se $\delta(x,y,z) = x$.

**Solução:**

A expressão da massa é dada por

$$M = \int_0^1 \delta(\gamma(t)) \left\|\gamma^{'}(t)\right\| dt,$$

onde $\delta$ é a densidade linear no ponto $(x,y,z)$.

Temos que $\gamma(t) = (t, sen(t) - tcos(t), cos(t) + tsen(t))$, então

$$\gamma^{'}(t) = (1, cos(t) - cos(t) + tsen(t), -sen(t) + sen(t) + tcos(t)) = (1, tsen(t), tcos(t))$$

e $\left\|\gamma^{'}(t)\right\| = \sqrt{1+t^2}$. Assim, substituindo na expressão da massa, temos

$$M = \int_0^1 \delta(\gamma(t)) \left\|\gamma^{'}(t)\right\| dt = \int_0^1 t\sqrt{1+t^2}dt = \frac{1}{3}\left(\sqrt{1+t^2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

**Questão 2.** (2,5 pontos) Calcule $\int_\alpha \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde:

$$\vec{F}(x,y) = \left(-\tfrac{y^3}{3}sen(x) + e^x,\ y^2cos(x) + 1 + y\right) \text{ e}$$

$$\alpha(t) = \left(sen(t),\ \tfrac{t}{\pi}\right), t \in [0, 2\pi]$$

**Solução**: Para esse campo $\vec{F}$ temos

$$P(x,y) = -\frac{y^3}{3}sen(x) + e^x$$
$$Q(x,y) = y^2cos(x) + 1 + y$$

Sabendo que
(a) $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = -y^2sen(x) - (3\dfrac{y^2}{3}sen(x)) = 0$, então $Rot(\vec{F}) = \vec{0}$ e
(b) Domínio$(\vec{F}) = \mathbb{R}^2$ é simplesmente conexo. Logo de (a) e (b) concluímos que o campo $\vec{F}$ é conservativo. Agora vamos obter um potencial $\phi$ de $\vec{F}$. Como devemos ter $\vec{\nabla}\phi = \vec{F}$.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{y^3}{3}sen(x) + e^x \Rightarrow \phi = \frac{y^3}{3}cos(x) + e^x + \alpha(y)$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = y^2cos(x) + 1 + y \Rightarrow y^2cos(x) + 1 + y = y^2cos(x) + \alpha^{'}(y)$$

então $\alpha'(y) = 1+y$ donde segue que $\alpha(y) = y+\frac{y^2}{2}+c$. Logo $\phi(x,y) = \frac{y^3}{3}cos(x)+e^x+y+\frac{y^2}{2}$. Além disso, $\alpha(0) = (0,0)$ $e$ $\alpha(2\pi) = (0,2)$.

Então,

$$\int_\alpha \vec{F}\cdot d\vec{r} = \phi(\alpha(2\pi)) - \phi(\alpha(0)) = \phi(0,2) - \phi(0,0) = \frac{8}{3}+4.$$

**Questão 3.** (2,5 pontos) Seja $\gamma$ a curva $\frac{x^2}{4}+(y-1)^2 = 1, x \geq 0$, percorrida de (0,2) a (0,0). Calcule

$$\int_\gamma ((e^x)^2 + xln(1+y^2))\,dx + \left(\frac{yx^2}{1+y^2}+2y+x\right)dy.$$

**Solução:** O campo $\vec{F}$ é dado por:

$$\vec{F}(x,y) = \left((e^x)^2 + xln(1+y^2), \frac{yx^2}{1+y^2}+2y+x\right),$$

então o Rotacional desse campo é

$$Rot(\vec{F}) = \left(0,0,1+\frac{2yx}{1+y^2}-\frac{-2yx}{1+y^2}\right) = (0,0,1)$$

Assim o campo não é conservativo.

Seja $\gamma_1$ o segmento de reta de (0,0) a (0,2) e $R$ a região interior às curvas $\gamma$ e $\gamma_1$. Observamos que $R$ estácontida no domínio de $\vec{F}$ e que o bordo da região $R$ é uma curva fechada lisa por partes.

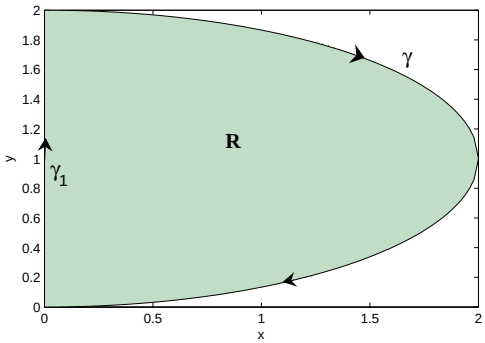


Figura 1. Região $R$ e fronteira $\gamma, \gamma_1$ .

Então podemos aplicar o Teorema de Green para o cálculo da integral.

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int\int_R Rot(\vec{F})\cdot(0,0,1)dxdy = -\int\int_R dxdy = -Area(R) = -\pi.$$

Pois, fazendo a mudança de variável $x = 2r\cos(\theta)$ e $y = r\text{sen}\,(\theta)+1$ temos $|Jac| = 2r$ e então

$$\int\int_R dxdy = \int_0^\pi \int_0^1 2rdrd\theta = \pi$$

Uma parametrização para a curva $\gamma_1$ é $\gamma_1(t) = (0,t), t \in [0,2]$.

Assim temos que

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^2 \vec{F}(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)dt = \int_0^2 \vec{F}(0,t) \cdot (0,1)dt = \int_0^2 2tdt = t^2\Big|_0^2 = 4.$$

Finalmente,

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\pi - 4.$$

**Questão 4.** (3 pontos)

a) Calcule $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + \frac{y^2}{2}}$, onde $\gamma$ é a curva dada por $(x-1)^2 + y^2 = 4$, percorrida uma vez no sentido anti-horário.

b) O campo dado é conservativo?

**Solução:**

(a) Para o campo $\vec{F}$ temos

$$P(x,y) = \frac{-y}{x^2 + \frac{y^2}{9}}$$
$$Q(x,y) = \frac{x}{x^2 + \frac{y^2}{9}}$$

Então $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$ Assim, $Rot(\vec{F}) = \vec{0}$.

Observamos que o campo não está definido em $(0,0)$, então para calcular a integral pedida consideramos a seguinte elipse:

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = a^2$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(3a)^2} = 1$$

e a orientamos no sentido horário como mostra a Figura (2).

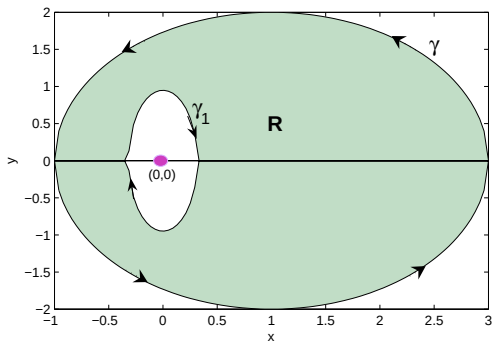


Figura 2. Região $R$ e fronteira $\gamma, \gamma_1$ .

Aplicando o Teorema de Green, temos que

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\int_R Rot(\vec{F}) \cdot (0,0,1) dxdy = 0,$$

então

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Para calcular a integral da direita, fazemos a seguinte parametrização da elipse centrada na origem e com orientação no sentido horário:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} asen(t) \\ y = acos(t), t \in [0, 2\pi], \end{cases}$$

onde $a$ é suficientemente pequeno. Então

$$-\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_0^{2\pi} \frac{-acos(t)(\frac{1}{3}acos(t)) + \frac{1}{3}asen(t)(asen(t))}{\frac{a^2}{9}} dt = -\int_0^{2\pi} \frac{-1/3}{1/9} = 6\pi$$

Assim

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 6\pi.$$

b) O campo $\vec{F}$ dado não é conservativo em $\mathbb{R}^2 - (0,0)$ pois a integral do item (a) sobre uma curva fechada é diferente de zero. Este campo é um exemplo de campo vetorial com rotacional nulo e que não é conservativos.