Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
2ª Prova - 1° semestre de 2003

Questão 1. (Turma A) Calcule:

$$\iiint_R z^2 \, dx \, dy \, dz$$

onde R é a região interna à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ e externa ao cone $z^2 = 3(x^2 + y^2)$.

Solução:

Primeiro, identificamos o dominio de integração. Usamos coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} x &= \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y &= \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z &= \rho \cos\varphi \end{aligned}$$

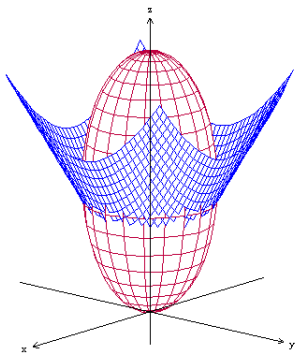
Usando isto, a esfera fica:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4z \Leftrightarrow \rho^2 = 4\rho\cos\varphi \Leftrightarrow \rho = 4\cos\varphi$$

E o cone:

$$z^2 = 3(x^2 + y^2) \Leftrightarrow 3\rho\cos\varphi = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \Leftrightarrow \tan^2\varphi = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$$

Ou seja, integramos desde o ángulo $\varphi = \frac{\pi}{6}$ até $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (região externa, ver figura abaixo).



Domínio de integração

Portanto

$$\iiint_R z^2 \, dx \, dy \, dz = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4\cos\varphi} \int_0^{2\pi} \rho^2 \cos^2\varphi \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\theta \, d\rho \, d\varphi =$$

$$2\pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4\cos\varphi} \rho^4 \cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi \, d\rho \, d\varphi = 2\pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi \cdot \frac{\rho^5}{5}\Big|_0^{4\cos\varphi} d\varphi =$$

$$\frac{2\pi.4^5}{5} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\varphi \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi = \frac{2.4^5\pi}{5} \frac{(-\cos^8\varphi)}{8}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{81\pi}{5}$$

Questão 2. (Turma A)

a) Mostre que o campo $\vec{F}(x,y) = (\cos x \cos y - y, -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y - x)$ é conservativo e calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ com $-1 \leq t \leq 1$.

b) Calcule $\int_\gamma f\, ds$, onde $f(x,y,z) = xz$ onde γ é a parte da curva obtida como intersecção das superfícies de equação $x^2 + 4y^2 = 1$ e $x^2 + z^2 = 1$, contida no primeiro octante ($x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$).

Solução: a) Calculemos o rotacional do campo. Para isso escrevamos $\vec{F}(x,y) = (\cos x \cos y - y, -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y - x) = (P(x,y), Q(x,y))$, logo:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\cos x \operatorname{sen} y - 1$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\cos x \operatorname{sen} y - 1$$

$$\therefore \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow \operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$$

Assim, $\vec{F}$ tem rotacional nulo e é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, que é simplesmente conexo. Segue que $\vec{F}$ é um campo conservativo. Portanto existe um potencial f tal que $\nabla f = F$, ou seja:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \cos y - y \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y - x \tag{2}$$

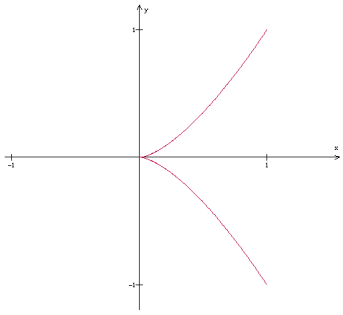


Gráfico da curva.

De (3) segue que $f(x,y) = \int (\cos x \cos y - y)\, dx = \operatorname{sen} x \cos y - xy + \varphi(y)$. Derivando em relação a y obtem-se $\frac{\partial f}{\partial y} = -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y - x + \varphi'(y)$. Da equação (4) temos $\varphi'(y) = 0$ então φ é constante. Logo um possível potencial é $f(x,y) = \operatorname{sen} x \cos y - xy$.
Calculamos agora a integral:

$$\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{-1}^{1} \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = f(\gamma(1)) - f(\gamma(-1)) = f(1,1) - f(1,-1) =$$

$$= \operatorname{sen} 1 \cos 1 - 1 - (\operatorname{sen} 1 \cos(-1) + 1) = \operatorname{sen} 1 \cos 1 - \operatorname{sen} 1 \cos 1 - 2 = -2$$

b) Procuremos uma parametrização de γ. Como $x^2 + 4y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + (\frac{y}{1/2})^2 = 1$ temos uma elipse no plano $x - y$. Então usamos $x(t) = \cos t$, e $y(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} t$. Para $z(t)$, resolvemos

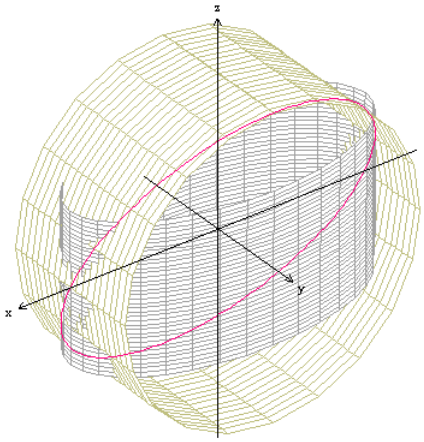


Gráfico da curva.

$x(t)^2 + z(t)^2 = 1$, e assim $z(t) = \operatorname{sen} t$. Paro o domínio de t, como estamos no primeiro octante, temos $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (ver figura).

Portanto $\gamma(t) = (\cos t, \frac{1}{2} \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t)$, $1 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Logo $\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \frac{1}{2}\cos t, \cos t)$, e também $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\cos^2 t}$. Assim, a integral fica

$$\int_\gamma f\, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \operatorname{sen} t \sqrt{1 + \frac{1}{4}\cos^2 t}\, dt$$

Para resolver esta integral fazemos a mudança $u = 1 + \frac{\cos^2 t}{4}$, então:

$$\int \cos t \operatorname{sen} t \sqrt{1 + \frac{1}{4}\cos^2 t}\, dt = -2\int u^{\frac{1}{2}}\, du = -\frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}}$$

Finalmente:

$$\int_\gamma f\, ds = \frac{4}{3}(1 + \frac{\cos^2 t}{4})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{3}\left[1 - (\frac{5}{4})^{\frac{3}{2}}\right]$$

Questão 3. (Turma A) Calcule $\int_\gamma (y^2 + \operatorname{sen} x^2)\, dx + (x^2 + 1)\, dy$ onde γ é o semi-círculo $x = \sqrt{1 - y^2}$ percorrido de $(0, -1)$ a $(0, 1)$

Solução: Para calcular a integral usamos a parametrização $\alpha(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$, para $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Com isso escrevemos:

$$I = \int_{\alpha_1} (y^2 + \operatorname{sen} x^2) + (x^2 + 1)\, dy = \int_{\alpha_1} y^2\, dx + x^2\, dy + \int_{\alpha_1} \operatorname{sen} x^2\, dx + dy = I_1 + I_2$$

Calculamos I_1:

$$I_1 = \int_{\alpha_1} y^2\, dx + x^2\, dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 t \cdot (-\operatorname{sen} t)\, dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \cdot \cos t\, dt =$$

$$-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 t\, dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\, dt = \left[\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \left[\operatorname{sen} t - \frac{\operatorname{sen}^3 t}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} - (-\frac{2}{3}) = \frac{4}{3}$$

Para obter I_2 precisamos a curva $\alpha_2(t) = (0, -t)$, com $t \in [-1, 1]$ (ver figura). Usando o Teorema de Green, com $P(x, y) = \operatorname{sen} x^2$ e $Q(x, y) = 1$, temos:

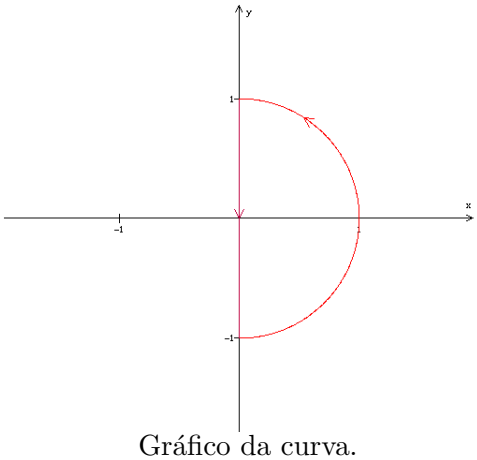


Gráfico da curva.

$$\int_{\alpha_1+\alpha_2} \operatorname{sen} x^2\, dx + dy = \int\int_R \frac{\partial}{\partial x}(1) - \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{sen} x^2) = 0$$

Logo

$$\int_{\alpha_1} \operatorname{sen} x^2\, dx + dy = -\int_{\alpha_2} \operatorname{sen} x^2\, dx + dy$$

Portanto, como $x = 0$ em α_2:

$$I_2 = \int_{\alpha_1} \operatorname{sen} x^2\, dx + dy = -\int_{\alpha_2} \operatorname{sen} x^2\, dx + dy = -\int_{\alpha_2} dy = -\int_{-1}^{1} -dt = 2$$

Segue que $I = I_1 + I_2 = \frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3}$.

Questão 1. (Turma B) Calcule

$$\iiint_R z^2\ dx\ dy\ dz$$

onde R é a região interna à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ e externa ao cone $3z^2 = x^2 + y^2$.

Solução: Primeiro, identificamos o dominio de integração. Usamos coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} x &= \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y &= \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z &= \rho \cos\varphi \end{aligned}$$

Usando isto, a esfera fica:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4z \Leftrightarrow \rho^2 = 4\rho\cos\varphi \Leftrightarrow \rho = 4\cos\varphi$$

E o cone:

$$z^2 = 3(x^2 + y^2) \Leftrightarrow 3\rho\cos\varphi = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \Leftrightarrow \tan^2\varphi = 3 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

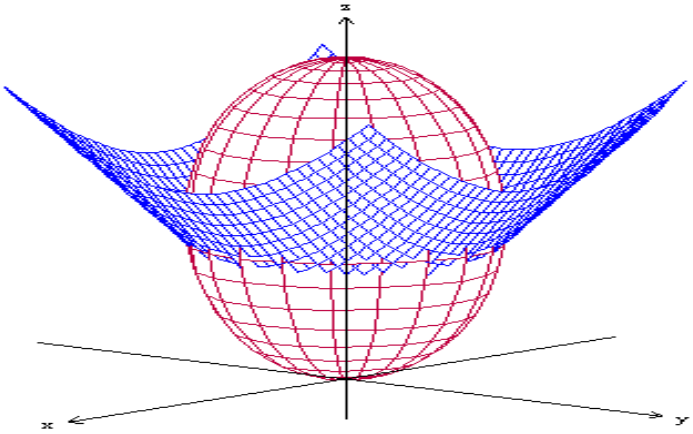


Gráfico do domínio de integração.

Ou seja, integramos desde o ángulo $\varphi = \frac{\pi}{3}$ até $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (região externa, ver figura).

Portanto,

$$\iiint_R z^2\,dx\,dy\,dz = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4\cos\varphi} \int_0^{2\pi} \rho^2\cos^2\varphi\rho^2\ \operatorname{sen}\varphi\,d\theta\,d\rho\,d\varphi =$$

$$2\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4\cos\varphi} \rho^4\cos^2\varphi\ \operatorname{sen}\varphi\,d\rho\,d\varphi = 2\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\ \operatorname{sen}\varphi\cdot\frac{\rho^5}{5}\Big|_0^{4\cos\varphi} d\varphi =$$

$$\frac{2\pi.4^5}{5}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\varphi\ \operatorname{sen}\varphi\,d\varphi = \frac{2.4^5\pi}{5}\ \frac{(-\cos^8\varphi)}{8}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-\pi}{5}$$

Questão 2. (Turma B)

a) Mostre que o campo $\vec{F}(x,y) = (\operatorname{sen}x\ \operatorname{sen}y\ + y, -\cos x\cos y\ + x)$ é conservativo e calcule $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ com $-1 \le t \le 1$.

b) Calcule $\int_\gamma f\,ds$, onde $f(x,y,z) = xz$ onde γ é a parte da curva obtida como intersecção das superfícies de equação $x^2 + 4y^2 = 1$ e $x^2 + z^2 = 1$, contida no primeiro octante ($x \ge 0$, $y \ge 0$ e $z \ge 0$).

Solução:
a) Calculemos o rotacional do campo. Para isso escrevamos $\vec{F}(x,y) = (\operatorname{sen}x\ \operatorname{sen}y + y, -\cos x\cos y + x) = (P(x,y), Q(x,y))$, logo:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \operatorname{sen}x\cos y\ + 1$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \operatorname{sen}x\cos y\ + 1$$

$$\therefore \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow \text{rot}\vec{F} = \vec{0}$$

Assim, $\vec{F}$ tem rotacional nulo e é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, que é simplesmente conexo. Segue que $\vec{F}$ é um campo conservativo. Portanto existe um potencial f tal que $\nabla f = F$, ou seja:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + y \tag{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\cos x \cos y + x \tag{4}$$

De (3) segue que $f(x,y) = \int(\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + y)\,dx = -\cos x \operatorname{sen} y + xy + \varphi(y)$. Derivando em relação a y obtem-se $\frac{\partial f}{\partial y} = -\cos x \cos y + x + \varphi'(y)$. Da equação (4) temos $\varphi'(y) = 0$ então φ é constante. Logo um possível potencial é $f(x,y) = -\cos x \operatorname{sen} y + xy$.

Calculamos agora a integral:

$$\int_\gamma \vec{F}\,d\vec{r} = \int_{-1}^{1} \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = f(\gamma(1)) - f(\gamma(-1)) = f(1,1) - f(1,-1) =$$
$$= -\cos 1 \operatorname{sen} 1 + 1 - (-\cos 1 \operatorname{sen}(-1) - 1) = -2\cos 1 \operatorname{sen} 1 + 2$$

b) Procuremos uma parametrização de γ. Como $x^2 + 4y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + (\frac{y}{1/2})^2 = 1$ temos uma elipse no plano $x - y$. Então usamos $x(t) = \cos t$, e $y(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t$. Para $z(t)$, resolvemos $x(t)^2 + z(t)^2 = 1$, e assim $z(t) = \operatorname{sen} t$. Paro o domínio de t, como estamos no primeiro octante, temos $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (ver figura).

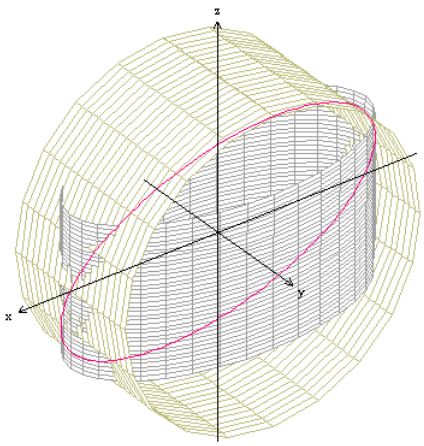


Gráfico da curva.

Por tanto $\gamma(t) = (\cos t, \frac{1}{2}\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t)$, $1 \le t \le \frac{\pi}{2}$. Logo $\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \frac{1}{2}\cos t, \cos t)$, e também $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\cos^2 t}$.
Assim, a integral fica:

$$\int_\gamma f\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \operatorname{sen} t \sqrt{1 + \frac{1}{4}\cos^2 t}\,dt$$

Para resolver esta integral fazemos a mudança $u = 1 + \frac{\cos^2 t}{4}$, então:

$$\int \cos t \operatorname{sen} t \sqrt{1 + \frac{1}{4}\cos^2 t}\,dt = -2\int u^{\frac{1}{2}}\,du = -\frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}}$$

Finalmente,

$$\int_\gamma f\,ds = \frac{4}{3}(1+\frac{\cos^2 t}{4})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{3}\left[1-(\frac{5}{4})^{\frac{3}{2}}\right]$$

Questão 3. (Turma B)

Calcule $\int_\gamma (y^2+1)\,dx + (x^2+\ \operatorname{sen} y^2)\,dy$ onde γ é o semi-círculo $y=\sqrt{1-x^2}$ percorrido de $(-1,0)$ a $(1,0)$

Solução: Para calcular a integral usamos a parametrização $\alpha(t) = (\cos(t),\ \operatorname{sen}(t))$, para $t\in[-\pi,0]$. Com isso escrevemos:

$$I = \int_{\alpha_1} (y^2+1)+(x^2+\ \operatorname{sen} y^2)\,dy = \int_{\alpha_1} y^2\,dx + x^2\,dy + \int_{\alpha_1} dx+\ \operatorname{sen} y^2 dy = I_1+I_2$$

Calculamos I_1:

$$I_1 = \int_{\alpha_1} y^2\,dx + x^2\,dy = \int_{-\pi}^{0} \operatorname{sen}^2 t\cdot(-\operatorname{sen} t)\,dt + \int_{-\pi}^{0}\cos^2 t\cdot\cos t\,dt =$$
$$-\int_{-\pi}^{0}\operatorname{sen}^3 t\,dt + \int_{-\pi}^{0}\cos^3 t\,dt = \left[\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\operatorname{sen} t - \frac{\operatorname{sen}^3 t}{3}\right]_{-\pi}^{0} = \frac{2}{3}-(-\frac{2}{3}) = \frac{4}{3}$$

Para obter I_2 precisamos a curva $\alpha_2(t) = (-t,0)$, com $t\in[-1,1]$ (ver figura). Usando o Teorema de Green, com $P(x,y)=1$ e $Q(x,y)=\ \operatorname{sen} y^2$, temos:

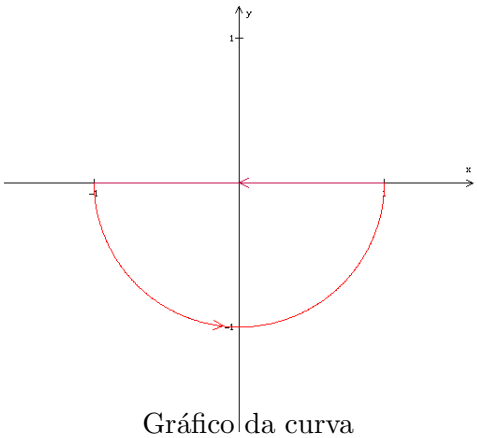


Gráfico da curva

$$\int_{\alpha_1+\alpha_2} dx+\ \operatorname{sen} y^2 dy = \int\int_R \frac{\partial}{\partial x}(\ \operatorname{sen} y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(1) = 0$$

Logo

$$\int_{\alpha_1} dx+\ \operatorname{sen} y^2 dy = -\int_{\alpha_2} dx+\ \operatorname{sen} y^2 dy$$

Portanto, como $y=0$ em α_2:

$$I_2 = \int_{\alpha_1} dx+\ \operatorname{sen} y^2 dy = -\int_{\alpha_2} dx+\ \operatorname{sen} y^2 dy = -\int_{\alpha_2} dx = -\int_{-1}^{1} -dt = 2$$

Segue que $I = I_1+I_2 = \frac{4}{3}+2 = \frac{10}{3}$.