Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
2ª Prova - 1° semestre de 2002

Questão 1. (Turma A) Calcule:

$$\iiint_S x \; dx \; dy \; dz$$

onde S é a região limitada pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ e pelo cone $x^2 = y^2 + z^2$, que contém o centro da esfera e tal que $y \geq 0$.

Solução: Primeiro, identificamos o dominio de integração. A esfera é:

$$\begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 4x \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 = 4 \\ (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 2^2 \end{array}$$

que tem centro em $(2, 0, 0)$ e raio 2. Da fórmula $x^2 = y^2 + z^2$ vemos que o cone tem simetria com respeito ao eixo x. Levando em conta isto e que $y \geq 0$, temos a figura abaixo mostrando a região S.

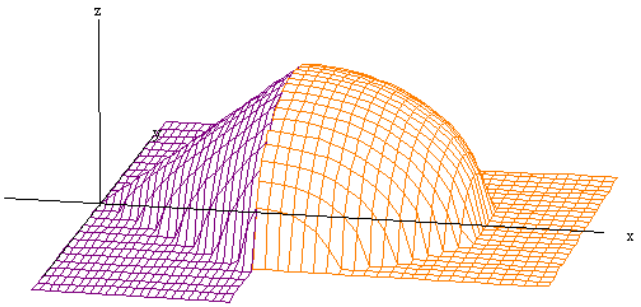


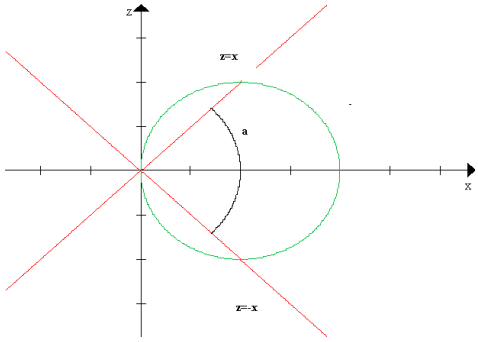
Gráfico do domínio de integração

Isto sugere usar coordenadas esféricas modificadas, pensando no eixo x como sendo o eixo vertical:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ z = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

cujo Jacobiano é dado por

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi\cos\theta & \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ -\rho \operatorname{sen}\varphi & \rho\cos\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta & \rho \operatorname{sen}\varphi\cos\theta \end{vmatrix} = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$$



Agora vejamos os limites de integração: como $y \geq 0$, deve ser $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. No plano $y = 0$ temos $x^2 = z^2$, ou seja, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$. E como ρ varia de 0 até encontrar a esfera temos:

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 + z^2 = 4x \\ &\rho^2 = 4\rho\cos\varphi \\ &\rho = 4\cos\varphi \quad \text{para } \rho \neq 0 \end{aligned}$$

Logo a integral é:

$$\int\int\int_S x dx dy dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{4\cos\varphi} \rho\cos\varphi\, \rho^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^{4\cos\varphi} d\varphi\, d\theta =$$
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi \frac{4^4}{4} \cos^4\varphi\, d\varphi\, d\theta = 4^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^5\varphi \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\, d\theta = 4^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\left.\frac{\cos^6\varphi}{6}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta =$$
$$4^3[-(\tfrac{\sqrt{2}}{2}^6) - (-1)]\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 4^3[1 - \tfrac{1}{8}]\pi = 2^6[\tfrac{7}{8}]\pi = 56\pi$$

Questão 2. (Turma A) Calcular:

$$\int_\gamma x \frac{e^{\frac{1}{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2} dx + y \frac{e^{\frac{1}{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2} dy$$

onde γ é dada em coordenadas polares por $r(\theta) = 2\pi + \theta$, para $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$

Solução: Vamos resolver de duas formas diferentes.
Forma 1: Procurando um potencial
Temos

$$P(x,y) = x\,\frac{e^{\frac{1}{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2} \quad ; \quad Q(x,y) = y\,\frac{e^{\frac{1}{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^4}(1 + 2(x^2+y^2))$$

Procuremos um potencial $\varphi(x,y)$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P(x,y) = x\,\frac{e^{\frac{1}{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2}$$

Integrando com respeito a x:

$$\int x \frac{e^{\frac{1}{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{e^{\frac{1}{u}}}{u^2} du = -\frac{1}{2}[e^{\frac{1}{u}}] + C = -\frac{1}{2}[e^{\frac{1}{(x^2+y^2)^2}}] + C(y)$$

Logo,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[-\tfrac{1}{2}(e^{\frac{1}{(x^2+y^2)^2}}) + C(y)] = y\,\frac{e^{\frac{1}{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2} + \frac{dC(y)}{dy}$$

Como devemos ter $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = Q(x,y)$, temos que $C(y) = C$. Portanto $\varphi(x,y) = -\frac{1}{2}(e^1x^2 + y^2)$ é um potencial. Assim, a integral não depende do caminho; somente depende dos pontos incial e final:

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \varphi(0,\frac{7\pi}{2}) - \varphi(0,\frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{4}{9\pi^2}} - e^{\frac{4}{49\pi^2}}\right]$$

Forma 2: Usando o Teorema de Green

Sejam γ_1 e γ_2 definidas por

$$\begin{array}{ll} \gamma_1(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t) & \text{para } t \in [0, 2\pi] \\ \gamma_2(t) = (0, t) & \text{para } t \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}] \end{array}$$

Levando em conta as orientações (ver figura abaixo), e usando o Teorema de Green temos

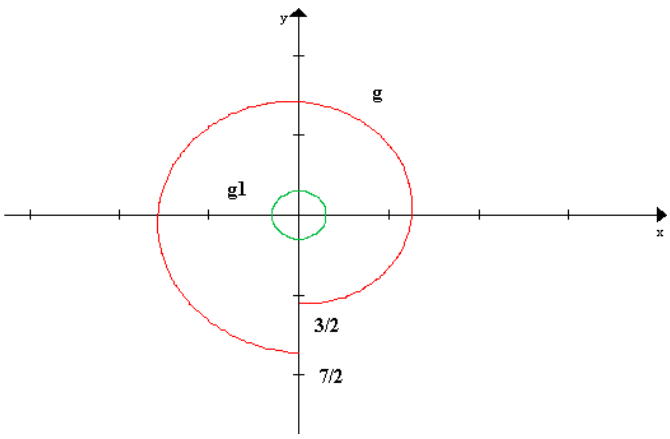


Gráfico das curvas γ e γ_1.

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy + \int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = 0$$

$$\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = -\int_0^{2\pi} [\cos t \cdot (-\operatorname{sen} t) + \operatorname{sen} t \cdot \cos t]\ dt = 0$$

$$\int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = -\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{2}} \frac{te^{\frac{1}{t^2}}}{t^4} dt = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{t^2}}\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{4}{49\pi^2}} - e^{\frac{4}{9\pi^2}}\right]$$

$$\therefore \int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{4}{9\pi^2}} - e^{\frac{4}{49\pi^2}}\right]$$

Questão 3. (Turma A) Calcular:

$$\int_\gamma \frac{-y^4 - y^2x^2 + x}{x^2 + y^2}\,dx + \left(\ln(1+y^2) + \frac{y}{x^2+y^2}\right) dy$$

onde γ é dada por $(x-2)^2+y^2=1$, com $y \geq 0$, orientada de $(1,0)$ para $(3,0)$.

Solução: Seja $\gamma_1(t)=(t,0)$, com $t \in [1,3]$, e seja a região $D=\left\{(x,y) : 1 \leq x \leq 3 \; 0 \leq y \leq \sqrt{1-(x-2)^2}\right\}$ (ver figura abaixo).

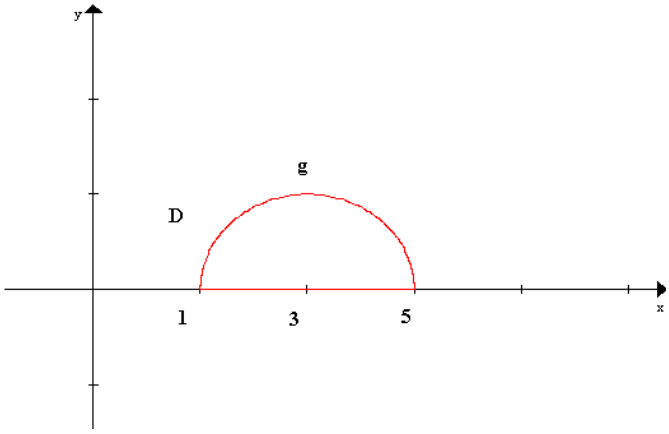


Gráfico das curvas

Aplicando o Teorema de Green, e tomando cuidado com as orientações, temos:

$$-\int_{\gamma} P\,dx + q\,dy + \int_{\gamma_1} P\,dx + q\,dy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Agora, fazendo as derivadas obtemos $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y$, então:

$$\int\int_D 2y\,dx\,dy = \int_1^3 \int_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}} 2y\,dx\,dy = \int_1^3 \left[1-(x-2)^2\right]\,dx = \left[x - \frac{(x-2)^3}{3}\right]_1^3 = \frac{4}{3}$$

E também

$$\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \int_1^3 \frac{1}{t}\,dt = \ln 3$$

Portanto

$$\int_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy - \int\int_D 2y\,dx\,dy = \ln 3 - \frac{4}{3}$$

Questão 1. (Turma B) Calcule:

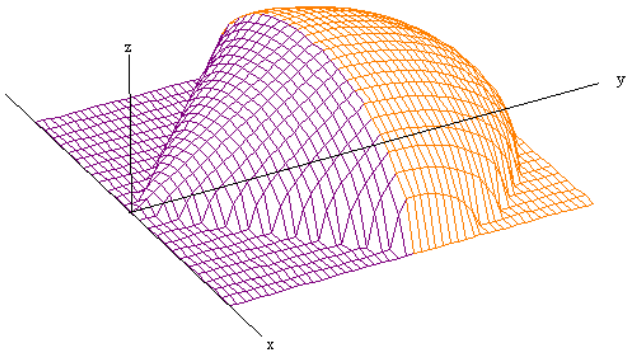
$$\iiint_S y\;dx\;dy\;dz$$

onde S é a região limitada pela esfera $x^2+y^2+z^2=6y$ e pelo cone $y^2=x^2+z^2$, que contém o centro da esfera e tal que $x \geq 0$.

Solução: Primeiro, identifiquemos o domínio de integração. A esfera é

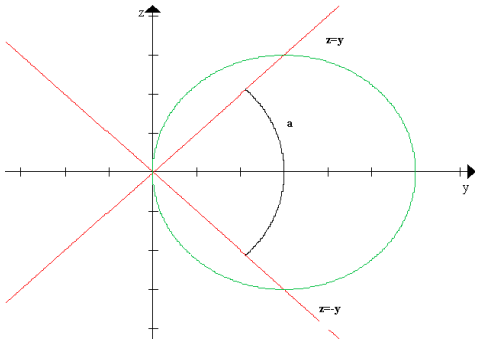
$$\begin{aligned} &x^2+y^2+z^2=6 \\ &x^2+y^2-6y+9+z^2=4 \\ &x^2+(y-3)^2+z^2=3^2 \end{aligned}$$

que tem centro em $(0,3,0)$ e raio 3. Da fórmula $y^2 = x^2 + z^2$ vemos que o cone tem simetria com respeito ao eixo y. Levando em conta isto e que $x \geq 0$, temos a figura abaixo mostrando a região S.



Domínio de integração

Isto sugere usar coordenadas esféricas modificadas, pensando no eixo y como sendo o eixo vertical:



Variação de φ.

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ y = \rho\cos\varphi \\ z = \rho \operatorname{sen}\varphi\cos\theta \end{cases}$$

cujo Jacobiano é dado por:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta & \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ \rho\cos\varphi \operatorname{sen}\theta & -\rho \operatorname{sen}\varphi & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \rho \operatorname{sen}\varphi\cos\theta & 0 & -\rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \end{vmatrix} = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$$

Agora vejamos os limites de integração: como $x \geq 0$, deve ser $0 \leq \theta \leq \pi$. No plano $x = 0$ temos $y^2 = z^2$, ou seja, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$. E como ρ varia de 0 até encontrar a esfera temos:

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 + z^2 = 6y \\ &\rho^2 = 6\rho\cos\varphi \\ &\rho = 6\cos\varphi \quad \text{para } \rho \neq 0 \end{aligned}$$

Logo a integral é

$$\int\int\int_S y dx dy dz = \int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{6\cos\varphi} \rho\cos\varphi\,\rho^2\,\operatorname{sen}\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta = \int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi\,\operatorname{sen}\varphi\,\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{6\cos\varphi} d\varphi\,d\theta =$$
$$\frac{6^4}{4}\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^5\varphi\,\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi\,d\theta = \frac{6^4}{4}[\frac{-\cos^6\varphi}{6}]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\pi} d\theta = \frac{6^3}{4}[1-\frac{1}{8}]\pi = \frac{6^3\cdot 7}{2^5}\pi = \frac{189}{4}\pi$$

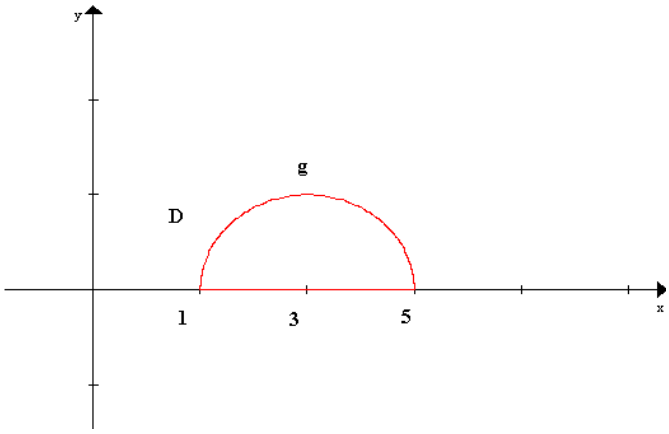
Questão 2. (Turma B) A resolução é análoga à da Turma A.

Questão 3. (Turma B) Calcular:

$$\int_\gamma \frac{2y^4+2x^2y^2+x}{x^2+y^2}\,dx + \left(\ln(1+y^3)+\frac{y}{x^2+y^2}\right)dy$$

onde γ é dada por $(x-3)^2+y^2=4$, com $y\geq 0$, orientada de $(5,0)$ para $(1,0)$.

Solução: Seja $\gamma_1(t)=(t,0)$, com $t\in[1,5]$, e seja a região $D=\left\{(x,y): 1\leq x\leq 5\ 0\leq y\leq\sqrt{4-(x-3)^2}\right\}$ (ver figura).



Aplicando o Teorema de Green, temos:

$$-\int_\gamma P\,dx + q\,dy + \int_{\gamma_1} P\,dx + q\,dy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

Agora, fazendo as derivadas obtemos $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-4y$, então:

$$\int\int_D -4y\,dx\,dy = \int_1^5\int_0^{\sqrt{4-(x-3)^2}} -4y\,dx\,dy = \int_1^5 \left[2(x-3)^2-8\right]\,dx = \left[\frac{2(x-2)^3}{3}-8x\right]_1^5 = \frac{-64}{3}$$

E também

$$\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \int_1^5 \frac{1}{t}\,dt = \ln 5$$

Portanto

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int\int_D -4y\,dx\,dy - \int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = -\frac{64}{3} - \ln 5$$