Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
2ª Prova - 1o semestre de 2001

Turma A

Questão 1.(4,0 pontos) Calcule as integrais:

(a) $\int_\gamma ydx - zdy + xdz$, onde γ é a intersecção das superficies $z = \sqrt{1 - x^2 - 2y^2}$ e $z = \sqrt{2}y$, de $(1, 0, 0)$ a $(-1, 0, 0)$

(b) $\int_\gamma \left(x^2y - \cos x + \frac{y^2}{2}\right) dx + (xy + \sin y)dy$, onde γ é a fronteira da região do plano limitada pelas curvas $y = x^2 + x$ e $y = -x^2 + x + 2$, orientada no sentido anti-horário.

Solução:
a)

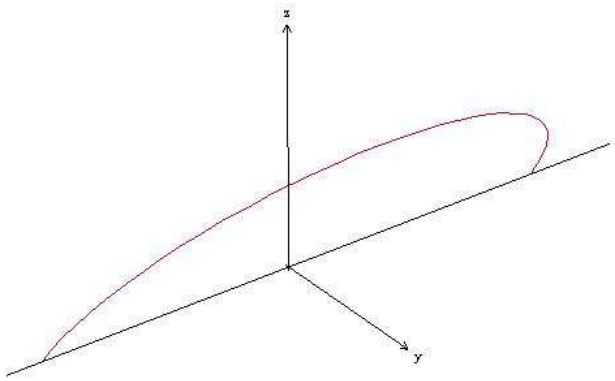

Figura 1: γ_1

Seja γ_1 a projeção de γ no plano xy. Para obter a equação de γ_1 eliminamos a variável z das equações dadas, obtendo $\sqrt{1 - x^2 - 2y^2} = \sqrt{2}y$, isto é, $x^2 + 4y^2 = 1$. Como $y \geq 0$, γ é parte da elipse $x^2 + 4y^2 = 1$ contida no semiplano superior $y \geq 0$ orientada no sentido anti-horário. Logo, γ_1 é dada por $\gamma_1(t) = (\cos t, \frac{1}{2}\sin t)$, com $0 \leq t \leq \pi$. Assim, γ é dada por $\gamma(t) = (\cos t, \frac{1}{2}\sin t, \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t)$, com $0 \leq t \leq \pi$.

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma ydx - zdy + xdz &= \int_0^\pi \left[\frac{1}{2}\sin t(-\sin t) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t \cdot \frac{1}{2}\sin t + \cos t\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\right] dt \\
&= \int_0^\pi \left[-\frac{1}{2}\sin^2 t - \frac{\sqrt{2}}{8}\sin 2t + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos^2 t\right] dt \\
&= \int_0^\pi \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{8}\sin 2t + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)\right] dt \\
&= \int_0^\pi \left[\frac{\sqrt{2}-1}{4} + \frac{\sqrt{2}+1}{4}\cos 2t - \frac{\sqrt{2}}{8}\sin 2t\right] dt = \frac{(\sqrt{2}-1)\pi}{4}
\end{aligned}$$

b)

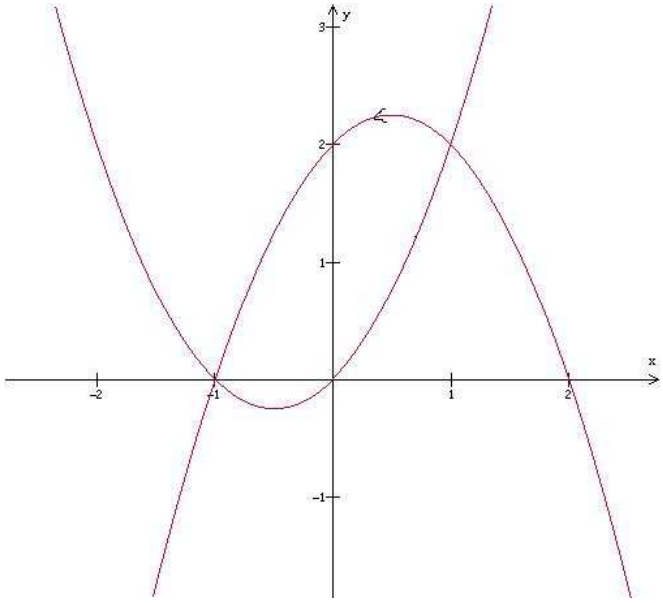

Figura 2: γ

Como γ é uma curva fechada e o campo é de classe C^1 em todo $\mathbb{R}^2$, podemos usar o teorema de Green. Assim,

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma \left(x^2y - \cos x + \frac{y^2}{2}\right) dx + (xy + \sin y)dy \\
= &\int\int_D (y - x^2 - y)dxdy = -\int\int_D x^2 dxdy,
\end{aligned}$$

onde D é a região do plano limitada pelas curvas $y = x^2 + x$ e $y = -x^2 + x + 2$. Agora usando o Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma \left(x^2y - \cos x + \frac{y^2}{2}\right) dx + (xy + \sin y)dy \\
= &-\int_{-1}^1 dx \int_{x^2+x}^{-x^2+x+2} x^2 dy = \int_{-1}^1 (2x^4 - 2x^2)dx = \left(\frac{2x^5}{5} - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^1 \\
= &\left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{-2}{5} + \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{5} - \frac{4}{3} = -\frac{8}{15}.
\end{aligned}$$

Questão 2.(3,0 pontos) Seja

$$\vec{F}(x,y) = \frac{-y}{4x^2+9y^2}\vec{i} + \frac{x}{4x^2+9y^2}\vec{j}$$

(a) Calcule $rot\vec{F}$.

(b) Calcule $\int_\gamma \vec{F}d\vec{r}$, onde γ é a circunferência de centro $(0,1)$ e raio 2, percorrida no sentido horário.

(c) $\vec{F}$ é um campo conservativo em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$? Justifique.

Solução:

a)

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{4x^2+9y^2} & \frac{x}{4x^2+9y^2} & 0 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{4x^2+9y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{4x^2+9y^2}\right)\right]\vec{k}$$

$$= \left[\frac{4x^2+9y^2-8x^2}{(4x^2+9y^2)^2} - \frac{-4x^2-9y^2+18y^2}{(4x^2+9y^2)^2}\right]\vec{k} = \vec{0}.$$

b)

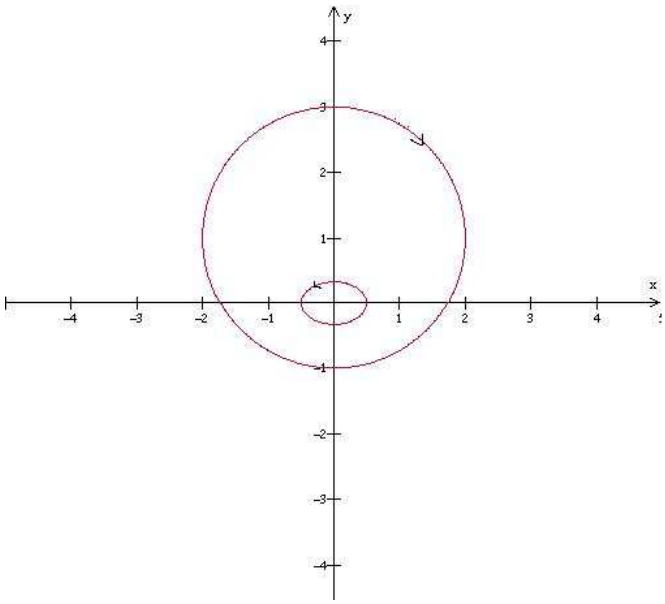

Figura 3: γ e γ_1

Consideremos a elipse $\gamma_1 : 4x^2 + 9y^2 = 1$ orientada no sentido horário. Pelo Teorema de Green, temos

$$\int_\gamma \vec{F}d\vec{r} - \int_{\gamma_1} \vec{F}d\vec{r} = -\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

onde D é a região entre a elipse γ_1 e a circunferência dada.

Como $rot\vec{F} = 0$ em D, e $\gamma_1(t) = \left(\frac{1}{2}\sin t, \frac{1}{3}\cos t\right)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$, temos

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F} d\vec{r} &= \int_{\gamma_1} \vec{F} d\vec{r} \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{3}\cos t \cdot \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t \cdot \frac{-1}{3}\sin t \right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{-1}{6} dt = -\frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

c) Se $\vec{F}$ fosse um campo conservativo em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, então a integral $\int_\gamma \vec{F} d\vec{r}$ seria zero, para qualquer curva fechada γ contida em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Como a integral ao longo da circunferência no item b) não é zero, segue-se que $\vec{F}$ não é um campo conservativo em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Questão 3.(3,0 pontos) Seja

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, \quad z \geq \sqrt{x^2+y^2}, \quad z \leq \sqrt{3(x^2+y^2)}\}.$$

Calcule $\int\int\int_D z dx dy dz$.

Solução: O conjunto D é a região do espaço limitada pelas seguintes superfícies: a esfera $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ e os cones de equações $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e $z = \sqrt{3(x^2+y^2)}$.

Vamos usar coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x &= r\sin\varphi\cos\theta \\ y &= r\sin\varphi\sin\theta \\ z &= r\cos\varphi, \end{cases}$$

cujo jacobiano é $J = r^2 \sin\varphi$.

Em coordenadas esféricas, a equação da esfera dada é $r = 2\cos\varphi$ e a região D pode ser descrita tomando $0 \leq r \leq 2\cos\varphi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.

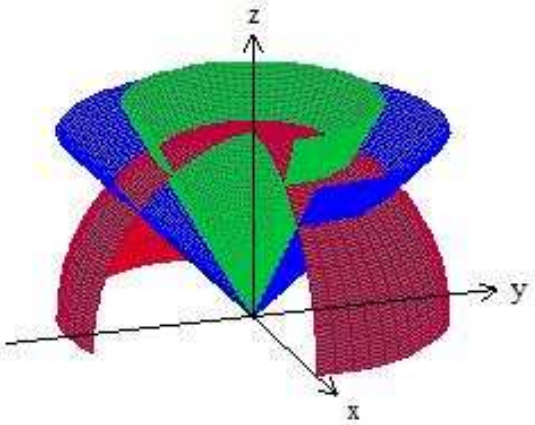

Figura 4: D

Logo,

$$
\begin{aligned}
\int\int\int_D z dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r\cos\varphi \cdot r^2 \sin\varphi dr \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 4\cos^5\varphi \sin\varphi d\varphi = 4\int_0^{2\pi} \left(\frac{-\cos^6\varphi}{6}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\
&= \frac{8\pi}{6}\left[-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6\right] = \frac{19\pi}{48}.
\end{aligned}
$$

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
2ª Prova - 1o semestre de 2001

Turma B

Questão 1.(4,0 pontos) Calcule as integrais:

(a) $\int_\gamma ydx - zdy + xdz$, onde γ é a intersecção das superficies $z = \sqrt{1 - x^2 - 4y^2}$ e $z = \sqrt{5}y$, de $(1, 0, 0)$ a $(-1, 0, 0)$

(b) $\int_\gamma (x^2y - \cos x + xy^2)\, dx + (x^2y + \sin y)dy$, onde γ é a fronteira da região do plano limitada pelas curvas $y = x^2 + x$ e $y = -x^2 + x + 2$, orientada no sentido anti-horário.

Solução:

a)

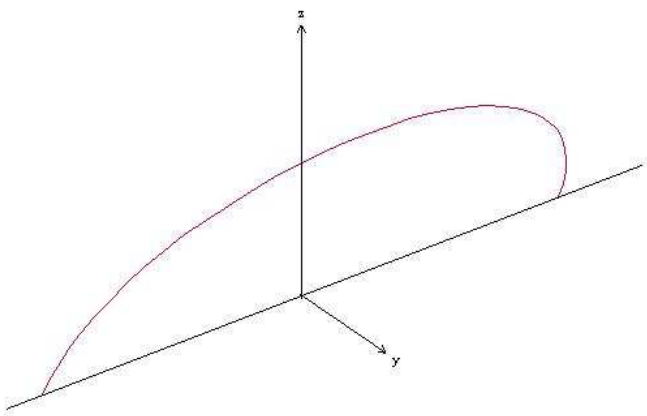

Figura 5: γ_1

Seja γ_1 a projeção de γ no plano xy. Para obter a equação de γ_1 eliminamos a variável z das equações dadas, obtendo $\sqrt{1 - x^2 - 4y^2} = \sqrt{5}y$, isto é, $x^2 + 9y^2 = 1$. Como $y \geq 0$, γ é parte da elipse $x^2 + 9y^2 = 1$ contida no semiplano superior $y \geq 0$, orientada no sentido anti-horário. Logo, γ_1 é dada por $\gamma_1(t) = (\cos t, \frac{1}{3}\sin t)$, com $0 \leq t \leq \pi$. Assim, γ é dada por

$\gamma(t) = (\cos t, \frac{1}{3}\sin t, \frac{\sqrt{5}}{3}\sin t)$, com $0 \leq t \leq \pi$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma ydx - zdy + xdz &= \int_0^\pi \left[\frac{1}{3}\sin t(-\sin t) - \frac{\sqrt{5}}{3}\sin t \cdot \frac{1}{3}\cos t + \cos t\frac{\sqrt{5}}{3}\cos t\right] dt \\
&= \int_0^\pi \left[-\frac{1}{3}\sin^2 t - \frac{\sqrt{5}}{18}\sin 2t + \frac{\sqrt{5}}{3}\cos^2 t\right] dt \\
&= \int_0^\pi \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right) - \frac{\sqrt{5}}{18}\sin 2t + \frac{\sqrt{5}}{3}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)\right] dt \\
&= \int_0^\pi \left[\frac{\sqrt{5}-1}{6} + \frac{\sqrt{5}+1}{6}\cos 2t - \frac{\sqrt{5}}{18}\sin 2t\right] dt = \frac{(\sqrt{5}-1)\pi}{6}.
\end{aligned}$$

b)

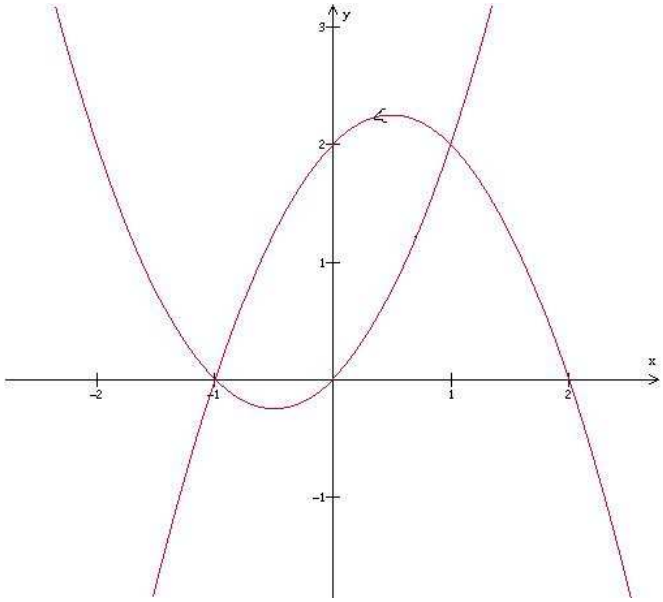

Figura 6: γ

Como γ é uma curva fechada e o campo é de classe C^1 em todo $\mathbb{R}^2$, podemos usar o teorema de Green. Assim,

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma \left(x^2y - \cos x + xy^2\right) dx + (x^2y + \sin y)dy \\
= &\int\int_D (2xy - x^2 - 2xy)dxdy = -\int\int_D x^2 dxdy,
\end{aligned}$$

onde D é a região do plano limitada pelas curvas $y = x^2 + x$ e $y = -x^2 + x + 2$. Agora usando o Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma \left(x^2y - \cos x + \frac{y^2}{2}\right) dx + (xy + \sin y)dy \\
= &-\int_{-1}^1 dx \int_{x^2+x}^{(-x^2+x+2)} x^2 dy = \int_{-1}^1 (2x^4 - 2x^2)dx = \left(\frac{2x^5}{5} - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^1 \\
= &\left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{-2}{5} + \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{5} - \frac{4}{3} = -\frac{8}{15}.
\end{aligned}$$

Questão 2.(3,0 pontos) Seja

$$\vec{F}(x,y) = \frac{-y}{9x^2+4y^2}\vec{i} + \frac{x}{9x^2+4y^2}\vec{j}$$

(a) Calcule $rot\vec{F}$.

(b) Calcule $\int_\gamma \vec{F}d\vec{r}$, onde γ é a circunferência de centro $(0,1)$ e raio 2, percorrida no sentido horário.

(c) $\vec{F}$ é um campo conservativo em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$?. Justifique.

Solução:

a)

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{9x^2+4y^2} & \frac{x}{9x^2+4y^2} & 0 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{9x^2+4y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{9x^2+4y^2}\right)\right]\vec{k}$$

$$= \left[\frac{9x^2+4y^2-18x^2}{(9x^2+4y^2)^2} - \frac{-9x^2-4y^2+8y^2}{(9x^2+4y^2)^2}\right]\vec{k} = \vec{0}.$$

b)

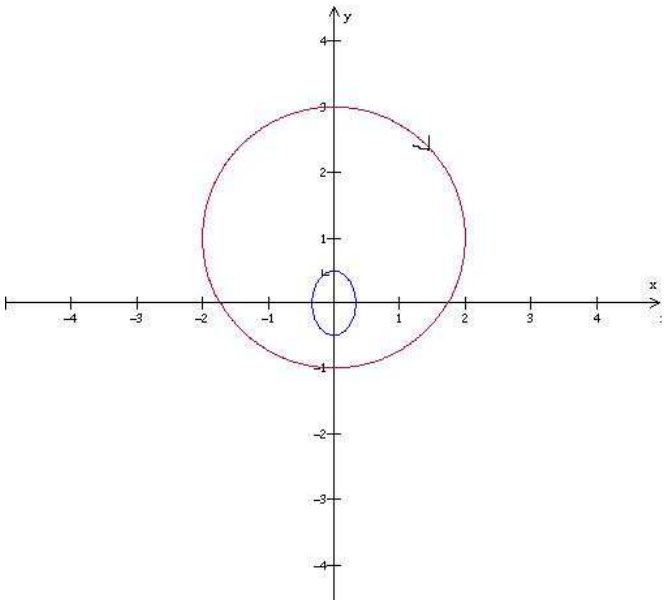

Figura 7: γ e γ_1

Consideremos a elipse $\gamma_1 : 9x^2 + 4y^2 = 1$, orientada no sentido horário. Pelo Teorema de Green Generalizado, temos

$$\int_\gamma \vec{F}d\vec{r} - \int_{\gamma_1} \vec{F}d\vec{r} = -\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

onde D é a região entre a elipse γ_1 e a circunferência dada.

Como $rot\vec{F} = 0$ em D, e $\gamma_1(t) = \left(\frac{1}{3}\sin t, \frac{1}{2}\cos t\right)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$, temos

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F} d\vec{r} &= \int_{\gamma_1} \vec{F} d\vec{r} \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2}\cos t \cdot \frac{1}{3}\cos t + \frac{1}{3}\sin t \cdot \frac{-1}{2}\sin t \right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{-1}{6} dt = -\frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

c) Se $\vec{F}$ fosse um campo conservativo em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, então a integral $\int_\gamma \vec{F} d\vec{r}$ seria zero, para qualquer curva fechada γ contida em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Como a integral ao longo da circunferência no item b) não é zero, segue-se que $\vec{F}$ não é um campo conservativo em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Questão 3.(3,0 pontos) Seja

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, \quad z \geq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}, \quad z \leq \sqrt{x^2+y^2} \right\}.$$

Calcule $\int\int\int_D z dx dy dz$.

Solução:

D é a região do espaço limitada pelas seguintes superfícies: a esfera $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ e os cones de equações $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e $z = \sqrt{\frac{(x^2+y^2)}{3}}$.

Vamos usar coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x &= r\sin\varphi\cos\theta \\ y &= r\sin\varphi\sin\theta \\ z &= r\cos\varphi, \end{cases}$$

cujo jacobiano é $J = r^2 \sin\varphi$.

Em coordenadas esféricas, a equação da esfera dada é $r = 2\cos\varphi$ e a região D pode ser descrita tomando $0 \leq r \leq 2\cos\varphi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$.

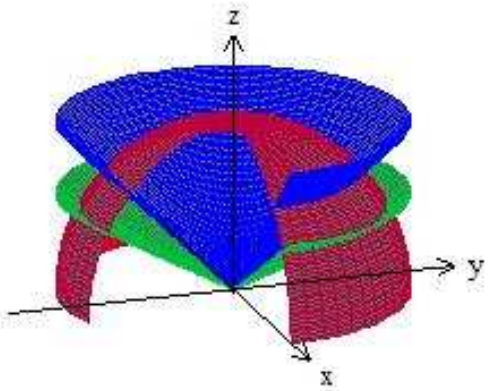

Figura 8: D

Logo,

$$\begin{aligned}
\int\int\int_D zdxdydz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r\cos\varphi \cdot r^2 \sin\varphi dr \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 4\cos^5\varphi \sin\varphi d\varphi = 4\int_0^{2\pi} \left(\frac{-\cos^6\varphi}{6}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \\
&= -\frac{8\pi}{6}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^6 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6\right] = \frac{7\pi}{48}.
\end{aligned}$$