Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
2ª Prova - 1o semestre de 2000

Turma A

Questão 1. Calcule a integral

$$\int_\gamma zdx - ydz$$

onde γ é a interseção do elipsóide $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{8} = \frac{5}{4}$ com o plano $y + z = 2$ orientada de forma que a projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário.

Solução: Seja γ_1 a projeção de γ no plano xy. Então, γ_1 satisfaz $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} + \frac{(2-y)^2}{8} = \frac{5}{4}$, isto é, $\frac{x^2}{9} + \frac{2y^2-4y+4}{8} = \frac{5}{4}$ ou $\frac{x^2}{9} + \frac{(y-1)^2+1}{4} = \frac{5}{4}$, ou ainda, $\frac{x^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$. Portanto, γ_1 é uma elipse, cuja equação paramétrica é:

$$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) &= 3\cos t \\ y(t) &= 1 + 2\sin t, \end{cases}$$

com $0 \leq t \leq 2\pi$.

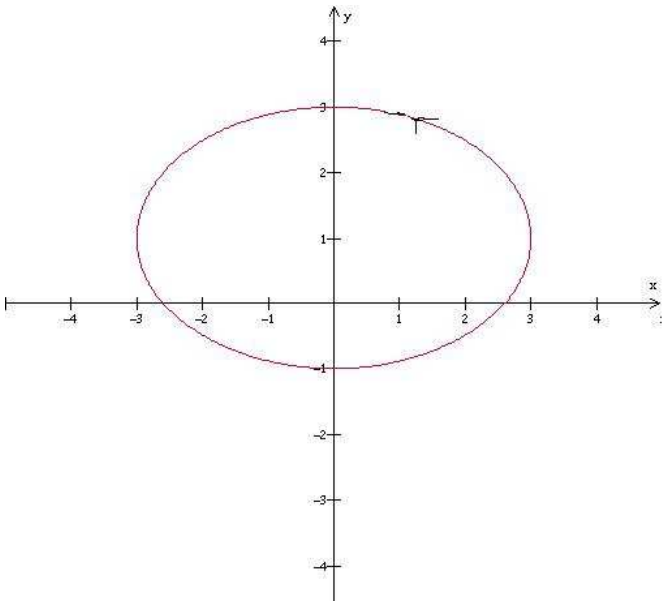

Figura 1: γ_1

Portanto uma parametrização para γ é:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) &= 3\cos t \\ y(t) &= 1 + 2\sin t \\ z(t) &= 1 - 2\sin t, \end{cases}$$

com $0 \leq t \leq 2\pi$.

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma zdx - ydz &= \int_0^{2\pi} [(1-2\sin t)(-3\sin t) - (1+2\sin t)(-2\cos t)]dt \\
&= \int_0^{2\pi} [-3\sin t + 3\sin^2 t + 2\cos t + 2\sin 2t]dt \\
&= \int_0^{2\pi} [-3\sin t + 3(1-\cos 2t) + 2\cos t + 2\sin 2t]dt \\
&= 6\pi
\end{aligned}$$

Questão 2. Calcule a integral

$$\int_\gamma \left(\frac{x}{x^2+y^2} + \ln(x+4)\right) dx + \left(\frac{y}{x^2+y^2} + y\right) dy$$

onde γ é a parte do gráfico da parábola $y = 4 - x^2$ no 1° quadrante, orientado no sentido horário.

Solução:

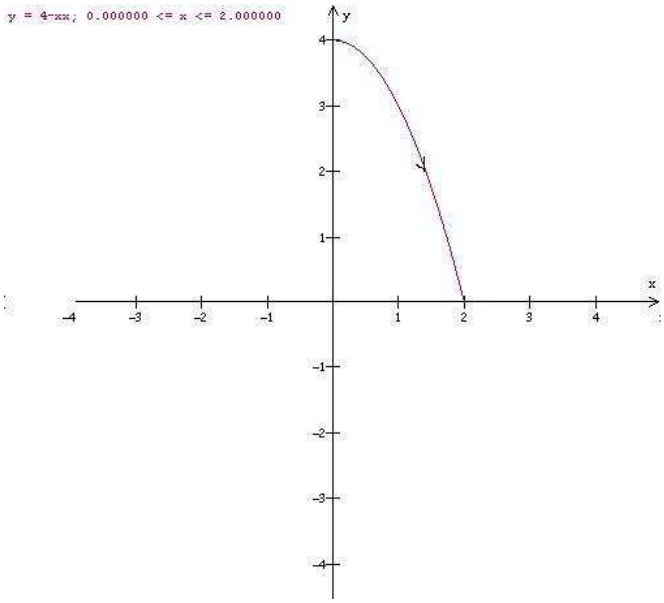

Figura 2: γ

Seja $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2} + \ln(x+4)\right)\vec{i} + \left(\frac{y}{x^2+y^2} + y\right)\vec{j}$. Como

$$rot\vec{F} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{y}{x^2+y^2} + y\right)\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2} + \ln(x+4)\right)\right\}\vec{k} = \vec{0}$$

e considerando o domínio $D = \{(x,y) : x > -4 \quad \text{e} \quad y > -x\}$ que é simplesmente conexo, $\vec{F}$ é conservativo em D e portanto, existe $U : D \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{x}{x^2+y^2} + \ln(x+4) \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{y}{x^2+y^2} + y \end{cases}$$

Da primeira equação, temos

$$U(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + (x+4)\ln(x+4) - (x+4) + c(y);$$

substituindo na segunda equação, obtemos

$$\frac{y}{x^2+y^2} + c'(y) = \frac{y}{x^2+y^2} + y$$

, logo $c'(y) = y$, e assim, $c(y) = \frac{y^2}{2}$.

Obs: $\int \ln(u)du = u\ln(u) - u$

Logo,

$$U(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + (x+4)\ln(x+4) - (x+4) + \frac{y^2}{2}$$

é um potencial para $\vec{F}$. Portanto

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F}d\vec{r} &= U(2,0) - U(0,4) = 2\ln 4 + 6\ln 6 - 6 - \left(\frac{1}{2}\ln 16 + 4\ln 4 - 4 + 8\right) \\ &= \ln 2 + 6\ln 2 + 6\ln 3 - 6 - 2\ln 2 - 8\ln 2 - 4 = -3\ln 2 + 6\ln 3 - 10\end{aligned}$$

Questão 3. Calcule a integral

$$\int_\gamma (xy - x^2)dx + (e^{3y^2} + 1)dy$$

onde γ é o gráfico de $y = \operatorname{sen} x$, no intervalo $0 \le x \le \pi$, percorrido no sentido de x crescente.

Solução:

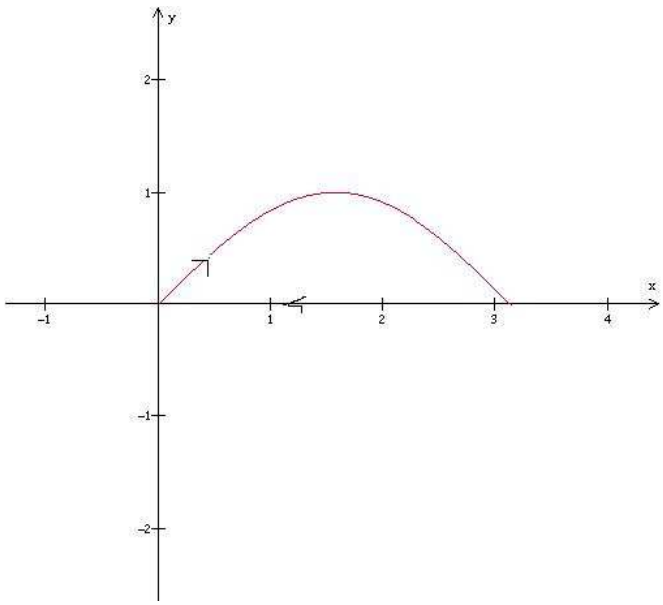

Figura 3: γ e γ_1

Seja γ_1 a curva consistindo do segmento de reta unindo $(\pi, 0)$ a $(0, 0)$. Junto com γ, obtemos uma curva simples e fechada, orientada no sentido negativo.

Como $\vec{F}(x, y) = (xy - x^2)\vec{i} + (e^{3y^2} + 1)\vec{j}$ é de classe C^1 em todo o $\mathbb{R}^2$, podemos aplicar o teorema de Green.

Resulta:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F} d\vec{r} + \int_{\gamma_1} \vec{F} d\vec{r} &= -\int\int_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left[e^{3y^2} + 1\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left(xy - x^2\right) \right\} dxdy \\
&= -\int\int_{\mathbb{R}} -xdxdy = \int\int_{\mathbb{R}} xdxdy \\
&= \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} xdy = \int_0^\pi x \sin x dx = (-x\cos x + \sin x)\Big|_0^\pi = \pi.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F} d\vec{r} &= \pi - \int_{\gamma_1} \vec{F} d\vec{r} = \pi + \int_0^\pi -t^2 dt \\
&= \pi - \frac{t^3}{3}\Big|_0^\pi = \pi - \frac{\pi^3}{3}.
\end{aligned}$$

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
2ª Prova - 1o semestre de 2000

Turma B

Questão 1. Calcule a integral

$$\int_\gamma z dy - x dz$$

onde γ é a interseção do elipsóide $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6} = \frac{4}{3}$ com o plano $x + z = 2$ orientada de forma que a projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário.

Solução: Seja γ_1 a projeção de γ no plano xy. Então, γ_1 satisfaz $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} + \frac{(2-x)^2}{6} = \frac{4}{3}$, isto é, $2x^2 + 3y^2 + 2(4 - 4x + x^2) = 16$ ou $4x^2 - 8x + 3y^2 = 8$ ou $4(x-1)^2 + 3y^2 = 12$ isto é, $\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$. Portanto, γ_1 é uma elipse, cuja equação paramétrica é:

$$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) &= 1 + \sqrt{3}\cos t \\ y(t) &= 2\sin t, \end{cases}$$

com $0 \leq t \leq 2\pi$.

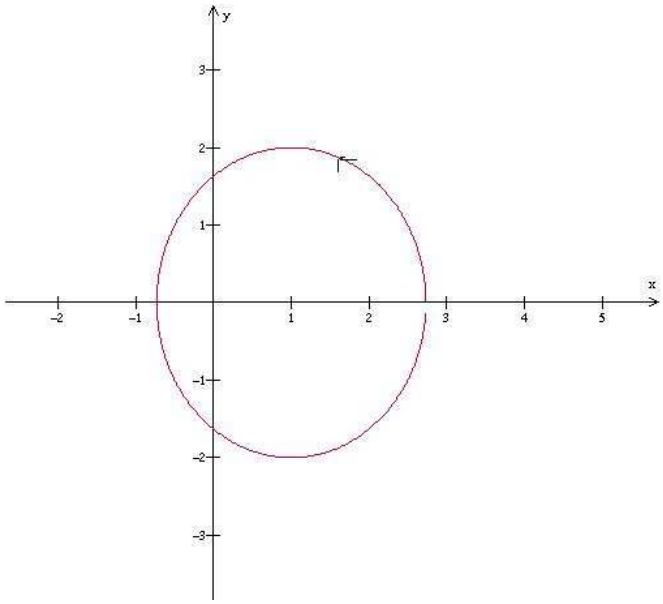

Figura 4: γ_1

Portanto uma parametrização para γ é:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) &= 1 + \sqrt{3}\cos t \\ y(t) &= 2\sin t \\ z(t) &= 1 - \sqrt{3}\cos t, \end{cases}$$

com $0 \leq t \leq 2\pi$.

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma zdy - xdz &= \int_0^{2\pi} [(1-\sqrt{3}\cos t)(2\cos t) - (1+\sqrt{3}\cos t)\sqrt{3}\sin t]dt \\
&= \int_0^{2\pi} [2\cos t - 2\sqrt{3}\cos^2 t - \sqrt{3}\sin t - 3\cos t \sin t]dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left[2\cos t - \sqrt{3}(1+\cos 2t) - \sqrt{3}\sin t - \frac{3}{2}\sin 2t\right] dt \\
&= -2\pi\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Questão 2. Calcule a integral

$$\int_\gamma \left(\frac{x}{x^2+y^2} - 2x\right) dx + \left(\frac{y}{x^2+y^2} + \ln(y+2)\right) dy$$

onde γ é a parte do gráfico da parábola $y = 4 - x^2$ no 2° quadrante, orientado no sentido horário.

Solução:

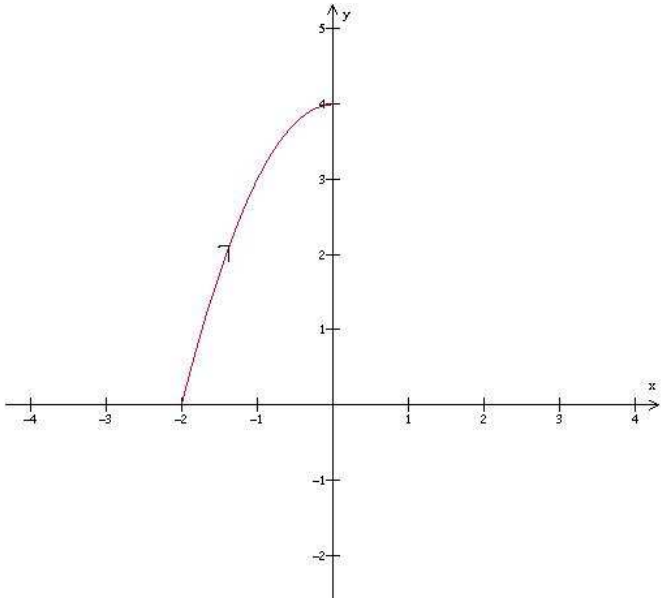

Figura 5: γ

Seja $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2} - 2x\right)\vec{i} + \left(\frac{y}{x^2+y^2} + \ln(y+2)\right)\vec{j}$. Como

$$rot\vec{F} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{y}{x^2+y^2} + \ln(y+2)\right)\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2} - 2x\right)\right\}\vec{k} = \left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)\vec{k} = \vec{0}$$

e considerando o domínio $D = \{(x,y) : x \leq y \quad \text{e} \quad y > -2\}$ que é simplesmente conexo, $\vec{F}$ é conservativo em D e portanto, existe $U : D \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{x}{x^2+y^2} - 2x \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{y}{x^2+y^2} + \ln(y+2) \end{cases}$$

Da primeira equação, temos

$$U(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - x^2 + c(y);$$

substituindo na segunda equação, obtemos

$$\frac{y}{x^2+y^2} + c'(y) = \frac{y}{x^2+y^2} + \ln(y+2),$$

donde $c'(y) = \ln(y+2)$,logo $c(y) = (y+2)(\ln(y+2)-1)$

Obs: $\int \ln(u)du = u\ln(u) - u$

Assim,

$$U(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - 2x + (y+2)(\ln(y+2)-1)$$

é um potencial para $\vec{F}$ e portanto

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F}d\vec{r} &= U(0,4) - U(-2,0) = \frac{1}{2}\ln 16 + 6\ln 6 - 6 - \left(\frac{1}{2}\ln 4 - 4 + 2\ln 2 - 2\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln 16 + 6\ln 6 - \frac{1}{2}\ln 4 - 2\ln 2 = 2\ln 2 + 6\ln 2 + 6\ln 3 - 3\ln 2 = 5\ln 2 + 6\ln 3\end{aligned}$$

Questão 3. Calcule a integral

$$\int_\gamma (-2xy + x^2)dx + (\sqrt{8-y^7})dy$$

onde γ é o gráfico de $y = \cos x$, no intervalo $\frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, percorrido no sentido de x crescente.

Solução:

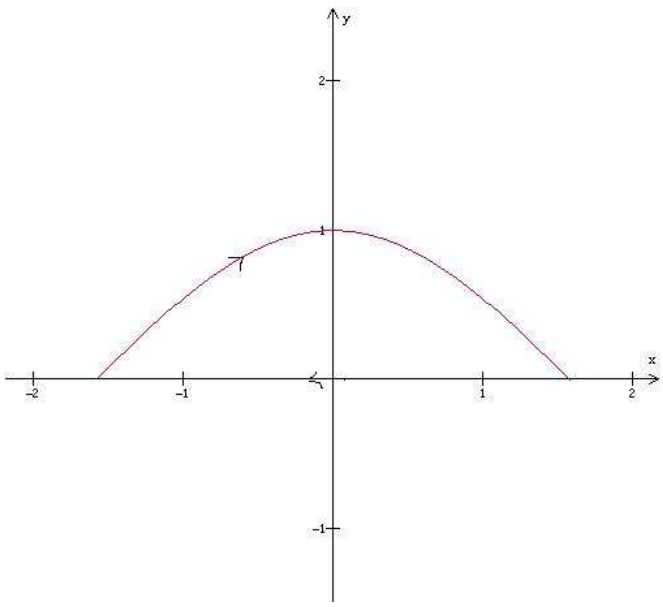

Figura 6: γ e γ_1

Seja γ_1 a curva consistindo do segmento de reta unindo $(\frac{\pi}{2}, 0)$ a $(\frac{-\pi}{2}, 0)$. Junto com γ, obtemos uma curva simples e fechada, orientada no sentido negativo.

Como $\vec{F}(x,y) = (-2xy + x^2)\vec{i} + (\sqrt{8 - y^7})\vec{j}$ é de classe C^1 na região $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < (8)^{7/2}\}$, podemos aplicar o teorema de Green.

Resulta:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F} d\vec{r} + \int_{\gamma_1} \vec{F} d\vec{r} &= -\int\int_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left[\sqrt{8 - y^7}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left(-2xy + x^2\right) \right\} dxdy \\
&= -\int\int_{\mathbb{R}} 2xdxdy = -\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\cos x} 2xdy \\
&= -\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos x dx = -2(x\sin x + \cos x)\Big|_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -2\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right] = 0.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F} d\vec{r} &= -\int_{\gamma_1} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [(-2t \cdot 0 + t^2)1 + \sqrt{8} \cdot 0] dt \\
&= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t^2 dt = \frac{1}{3}\left[\frac{\pi^3}{8} - \left(\frac{-\pi^3}{8}\right)\right] = \frac{\pi^3}{12}
\end{aligned}$$