MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia III
Escola Politécnica - 1ª Prova - 29/03/2016

Turma A
1ª Questão:

(a) (1,5) Calcule $\displaystyle\int_0^{\sqrt{a}} \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^4}} \left(a^2-y^2\right)^{\frac{3}{4}} dy \right) dx$, com $a > 0$.

(b) (2,0) Calcule $\displaystyle\iint_D (3x+2y)^2 \cos\left(9x^2-4y^2\right) dxdy$, sendo D a região do plano limitada por $3x+2y=1$, $3x+2y=2$, $x=0$, $y=0$.

Solução:

(a) A integração direta com a ordem de integração imposta é complicada e, por isso, é desejado alterar a ordem de integração. Para isso, deve-se observar que, no domínio de integração, o integrando é uma função contínua e limitada e, portanto, o Teorema de Fubini pode ser aplicado. Reescrevendo o domínio acha-se os novos limites de integração.

$$\begin{cases} 0 \le x \le \sqrt{a} \\ 0 \le y \le \sqrt{a^2-x^4} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 0 \le y \le a \\ 0 \le x \le \left(a^2-y^2\right)^{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

A integral então fica

$$\int_0^a \int_0^{\left(a^2-y^2\right)^{\frac{1}{4}}} \left(a^2-y^2\right)^{\frac{3}{4}} dxdy = \int_0^a \left(a^2-y^2\right) dy = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3}a^3$$

(b) Para facilitar o cálculo da integral, é feita uma mudança de variável. Para simplificar tanto o integrando quanto os limites de integração, a expressão de uma das novas variáveis é $u = 3x+2y$. A outra variável pode ser obtida observando a relação $9x^2-4y^2 = (3x+2y)(3x-2y)$, e pode ser expressa por $v = 3x-2y$. Deste modo simplifica-se ainda mais o integrando.

$$\begin{cases} u = 3x+2y \\ v = 3x-2y \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{6} \\ y = \frac{u-v}{4} \end{cases} \quad J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} = -\frac{1}{12}$$

Os novos limites de integração são achados escrevendo a fronteira da região D nas novas váriaveis.

$$\begin{cases} 1 \le u \le 2 \\ -u \le v \le u \end{cases}$$

A integral então fica

$$\int_{1}^{2}\int_{-u}^{u} u^2 \cos(uv)\,\frac{1}{12} dv du = \frac{1}{12}\int_{1}^{2} u\left[\operatorname{sen}(uv)\right]\Big|_{-u}^{u} du = \frac{1}{12}\int_{1}^{2} u\left[\operatorname{sen}\left(u^2\right) - \operatorname{sen}\left(-u^2\right)\right] du$$

Utilizando que a função seno é ímpar,

$$\frac{1}{12}\int_{1}^{2} u\left[\operatorname{sen}\left(u^2\right) - \operatorname{sen}\left(-u^2\right)\right] du = \frac{1}{6}\int_{1}^{2} u \operatorname{sen}\left(u^2\right) du = \frac{1}{12}\int_{1}^{4} \operatorname{sen} w dw = \frac{1}{12}\left(\cos 1 - \cos 4\right)$$

2ª Questão: (3,0)

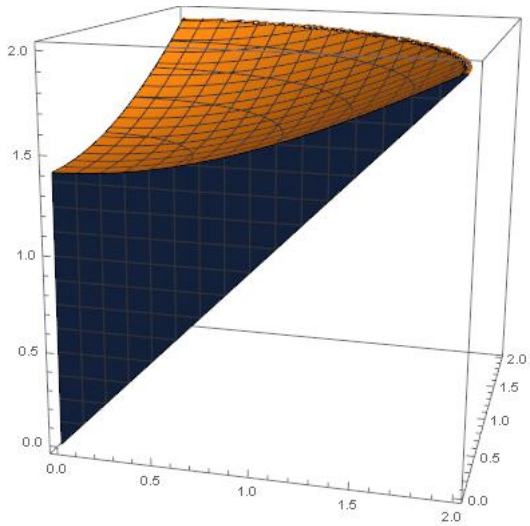
Ache a massa do sólido limitado pela superfícies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $2z^2 - x^2 - y^2 = 4$ com densidade $\delta(x, y, z) = z$.

Solução:

O sólido é limitado pelas superfícies de um cone e de um hiperbolóide de duas folhas em $z \geq 0$. Para entender melhor como é a região limitada, analisa-se a intersecção entre essas superfícies.

$$z^2 = 2z^2 - 4 \rightarrow z = 2$$
$$2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Portanto, as superfícies se tangenciam em $z = 2$, assim como mostrado na figura abaixo. A figura representa somente a parte do sólido no primeiro octante para facilitar a visualização.



Para calcular a massa do sólido, é conveniente utilizar coordenadas cilíndricas para descrevê-lo.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\theta \\ z = w \end{cases} \qquad J = r$$

Os limites de w são dados por

$$z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow w \geq r$$
$$2z^2 - x^2 - y^2 \leq 4 \rightarrow w \leq \sqrt{\frac{r^2 + 4}{2}}$$

r varia de 0 até a intersecção entre as superfícies, ou seja,

$$z = 2 \rightarrow 2 = r$$

A massa do sólido é, então,

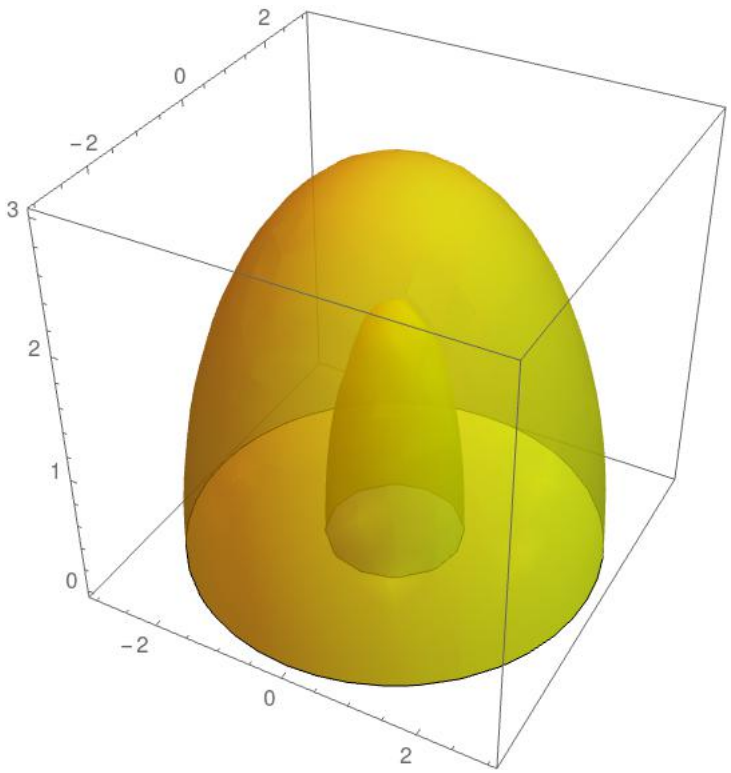
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_r^{\sqrt{\frac{r^2+4}{2}}} wrdwdrd\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\left(4-r^2\right)rdrd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

3ª Questão: (3,5)

Calcule a massa do sólido dado por $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2 \leq 9; x^2+y^2+\dfrac{z^2}{4} \geq 1; z \geq 0\right\}$ com densidade $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2$.

Solução:

O sólido está exibido na figura abaixo



Para calcular seu volume faz-se uso de coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\theta \\ z = z \end{cases} \qquad J = \rho$$

Substituindo a mudança na equação da esfera, temos:

$$\rho^2 + z^2 = 9$$

Substituindo a mudança na equação do elipsóide, temos:

$$\rho^2 + \frac{z^2}{4} = 1$$

Para calcular a massa, será necessário dividir o domínio em duas partes, com ρ variando do elipsóide até a esfera, para $0 \leq z \leq 2$, e com ρ variando de zero até a esfera, para $2 \leq z \leq 3$, ou seja:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 |\, \sqrt{1-\frac{z^2}{4}} \le \rho \le \sqrt{9-z^2};\, 0\le z\le 2;\, 0\le\theta\le 2\pi\right\} \\
S_2 &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 |\, 0 \le \rho \le \sqrt{9-z^2};\, 2\le z\le 3;\, 0\le\theta\le 2\pi\right\}
\end{aligned}
$$

Assim, a massa pode ser calculada:

$$
\begin{aligned}
M &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\sqrt{1-\frac{z^2}{4}}}^{\sqrt{9-z^2}} \rho^3\, d\rho\, dz\, d\theta + \int_0^{2\pi}\int_2^3\int_0^{\sqrt{9-z^2}} \rho^3\, d\rho\, dz\, d\theta \\
&= 2\pi\left\{\int_0^2 \frac{\rho^4}{4}\Big|_{\sqrt{1-\frac{z^2}{4}}}^{\sqrt{9-z^2}} dz + \int_2^3 \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{9-z^2}} dz\right\} \\
&= \frac{\pi}{2}\left\{\int_0^2 (9-z^2)^2 - \left(1-\frac{z^2}{4}\right)^2 dz + \int_2^3 (9-z^2)^2\, dz\right\} \\
&= \frac{\pi}{2}\left\{\int_0^3 (9-z^2)^2\, dz - \int_0^2 \left(1-\frac{z^2}{4}\right)^2 dz\right\} \\
&= \frac{\pi}{2}\left\{\int_0^3 81-18z^2-z^4\, dz - \int_0^2 1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{16}\, dz\right\} \\
&= \frac{\pi}{2}\left\{\left(81z-6z^3-\frac{z^5}{5}\right)_0^3 - \left(z-\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{80}\right)_0^2\right\} \\
&= \frac{\pi}{2}\left\{243-162+\frac{243}{5}-2+\frac{4}{3}-\frac{2}{5}\right\} \\
&= \frac{964\pi}{15}
\end{aligned}
$$

Turma B
1ª Questão:

(a) (1,5) Calcule $\displaystyle\int_0^{\sqrt{b}} \left(\int_0^{\sqrt{b^2-y^4}} \left(b^2-x^2\right)^{\frac{3}{4}} dx \right) dy$, com $b > 0$.

(b) (2,0) Calcule $\displaystyle\iint_D (2x+3y)^2 \cos\left(9y^2-4x^2\right) dxdy$, sendo D a região do plano limitada por $2x+3y=1$, $2x+3y=2$, $x=0$, $y=0$.

Solução:

(a) A integração direta com a ordem de integração imposta é complicada e, por isso, é desejado alterar a ordem de integração. Para isso, deve-se observar que, no domínio de integração, o integrando é uma função contínua e limitada e, portanto, o Teorema de Fubini pode ser aplicado. Reescrevendo o domínio acha-se os novos limites de integração.

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq \sqrt{b} \\ 0 \leq x \leq \sqrt{b^2-y^4} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq \left(b^2-x^2\right)^{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

A integral então fica

$$\int_0^b \int_0^{\left(b^2-x^2\right)^{\frac{1}{4}}} \left(b^2-x^2\right)^{\frac{3}{4}} dydx = \int_0^b \left(b^2-x^2\right) dx = b^3 - \frac{b^3}{3} = \frac{2}{3}b^3$$

(b) Para facilitar o cálculo da integral, é feita uma mudança de variável. Para simplificar tanto o integrando quanto os limites de integração, a expressão de uma das novas variáveis é $u = 2x+3y$. A outra variável pode ser obtida observando a relação $9y^2-4x^2 = (2x+3y)(3y-2x)$, e pode ser expressa por $v = 3y-2x$. Deste modo simplifica-se ainda mais o integrando.

$$\begin{cases} u = 2x+3y \\ v = 3y-2x \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{u-v}{4} \\ y = \frac{u+v}{6} \end{cases} \quad J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{vmatrix} = \frac{1}{12}$$

Os novos limites de integração são achados escrevendo a fronteira da região D nas novas váriaveis.

$$\begin{cases} 1 \leq u \leq 2 \\ -u \leq v \leq u \end{cases}$$

A integral então fica

$$\int_{1}^{2}\int_{-u}^{u} u^2 \cos(uv)\,\frac{1}{12}dvdu = \frac{1}{12}\int_{1}^{2} u\left[\operatorname{sen}(uv)\right]\Big|_{-u}^{u} du = \frac{1}{12}\int_{1}^{2} u\left[\operatorname{sen}\left(u^2\right) - \operatorname{sen}\left(-u^2\right)\right] du$$

Utilizando que a função seno é ímpar,

$$\frac{1}{12}\int_{1}^{2} u\left[\operatorname{sen}\left(u^2\right) - \operatorname{sen}\left(-u^2\right)\right] du = \frac{1}{6}\int_{1}^{2} u\operatorname{sen}\left(u^2\right) du = \frac{1}{12}\int_{1}^{4} \operatorname{sen} w dw = \frac{1}{12}\left(\cos 1 - \cos 4\right)$$

2ª Questão: (3,0)

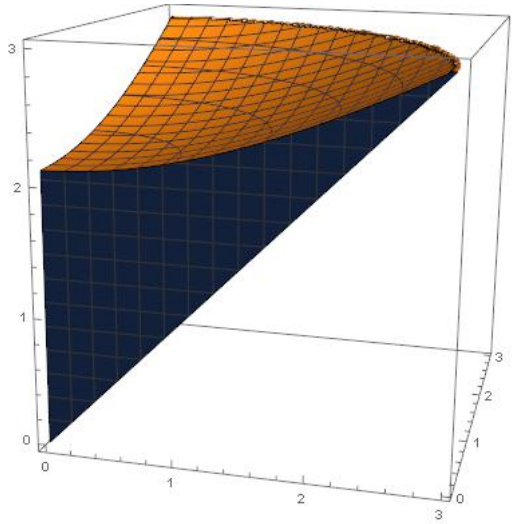
Ache a massa do sólido limitado pela superfícies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $2z^2 - x^2 - y^2 = 9$ com densidade $\delta(x, y, z) = z$.

Solução:

O sólido é limitado pelas superfícies de um cone e de um hiperbolóide de duas folhas em $z \geq 0$. Para entender melhor como é a região limitada, analisa-se a intersecção entre essas superfícies.

$$z^2 = 2z^2 - 9 \to z = 3$$
$$3 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Portanto, as superfícies se tangenciam em $z = 3$, assim como mostrado na figura abaixo. A figura representa somente a parte do sólido no primeiro octante para facilitar a visualização.



Para calcular a massa do sólido, é conveniente utilizar coordenadas cilíndricas para descrevê-lo.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\theta \\ z = w \end{cases} \qquad J = r$$

Os limites de w são dados por

$$z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \to w \geq r$$
$$2z^2 - x^2 - y^2 \leq 9 \to w \leq \sqrt{\frac{r^2 + 9}{2}}$$

r varia de 0 até a intersecção entre as superfícies, ou seja,

$$z = 3 \to 3 = r$$

A massa do sólido é, então,

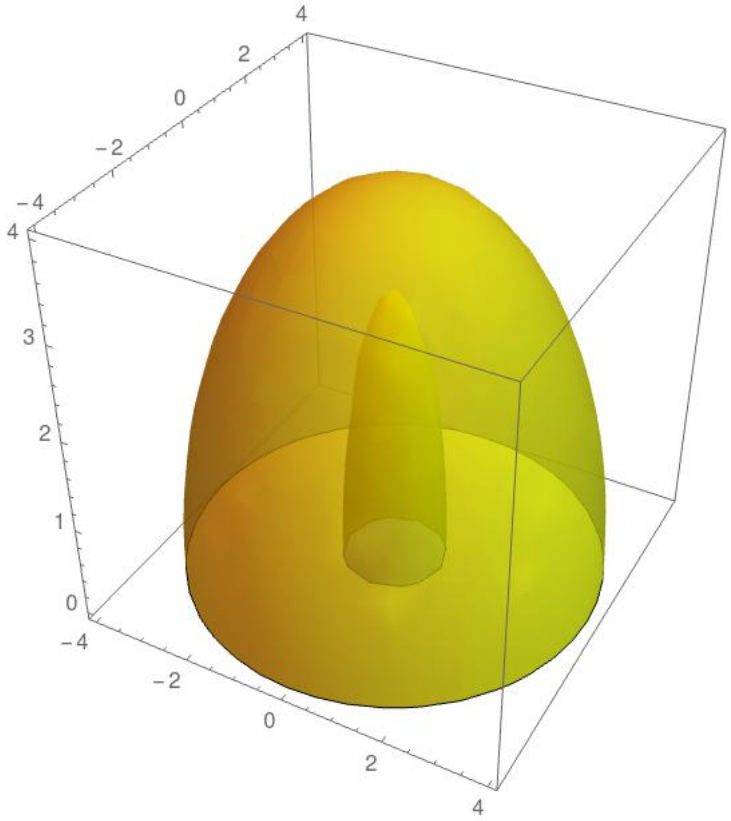
$$\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_r^{\sqrt{\frac{r^2+9}{2}}} wrdwdrd\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^3 \left(9-r^2\right) rdrd\theta = \frac{81}{16}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{81\pi}{8}$$

3ª Questão: (3,5)

Calcule a massa do sólido dado por $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2 \leq 16; x^2+y^2+\dfrac{z^2}{9} \geq 1; z \geq 0\right\}$ com densidade $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2$.

Solução:

O sólido está exibido na figura abaixo



Para calcular seu volume faz-se uso de coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\theta \\ z = z \end{cases} \qquad J = \rho$$

Substituindo a mudança na equação da esfera, temos:

$$\rho^2 + z^2 = 16$$

Substituindo a mudança na equação do elipsóide, temos:

$$\rho^2 + \frac{z^2}{9} = 1$$

Para calcular a massa, será necessário dividir o domínio em duas partes, com ρ variando do elipsóide até a esfera, para $0 \leq z \leq 3$, e com ρ variando de zero até a esfera, para $3 \leq z \leq 4$, ou seja:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, \sqrt{1-\frac{z^2}{9}} \le \rho \le \sqrt{16-z^2};\ 0\le z\le 3;\ 0\le\theta\le 2\pi\right\} \\
S_2 &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, 0 \le \rho \le \sqrt{16-z^2};\ 3\le z\le 4;\ 0\le\theta\le 2\pi\right\}
\end{aligned}
$$

Assim, a massa pode ser calculada:

$$
\begin{aligned}
M &= \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{\sqrt{1-\frac{z^2}{9}}}^{\sqrt{16-z^2}} \rho^3\,d\rho\,dz\,d\theta + \int_0^{2\pi}\int_3^4\int_0^{\sqrt{16-z^2}} \rho^3\,d\rho\,dz\,d\theta \\
&= 2\pi\left\{\int_0^3 \frac{\rho^4}{4}\Big|_{\sqrt{1-\frac{z^2}{9}}}^{\sqrt{16-z^2}}\,dz + \int_3^4 \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{16-z^2}}\,dz\right\} \\
&= \frac{\pi}{2}\left\{\int_0^3 (16-z^2)^2 - \left(1-\frac{z^2}{9}\right)^2 dz + \int_3^4 (16-z^2)^2\,dz\right\} \\
&= \frac{\pi}{2}\left\{\int_0^4 (16-z^2)^2\,dz - \int_0^3 \left(1-\frac{z^2}{9}\right)^2 dz\right\} \\
&= \frac{\pi}{2}\left\{\int_0^4 256-32z^2-z^4\,dz - \int_0^3 1-\frac{2z^2}{9}+\frac{z^4}{81}\,dz\right\} \\
&= \frac{\pi}{2}\left\{\left(256z-\frac{32z^3}{3}-\frac{z^5}{5}\right)_0^4 - \left(z-\frac{2z^3}{27}+\frac{z^5}{5\cdot 81}\right)_0^3\right\} \\
&= \frac{\pi}{2}\left\{1024-\frac{2048}{3}+\frac{1024}{5}-3+2-\frac{3}{5}\right\} \\
&= \frac{4084\pi}{15}
\end{aligned}
$$