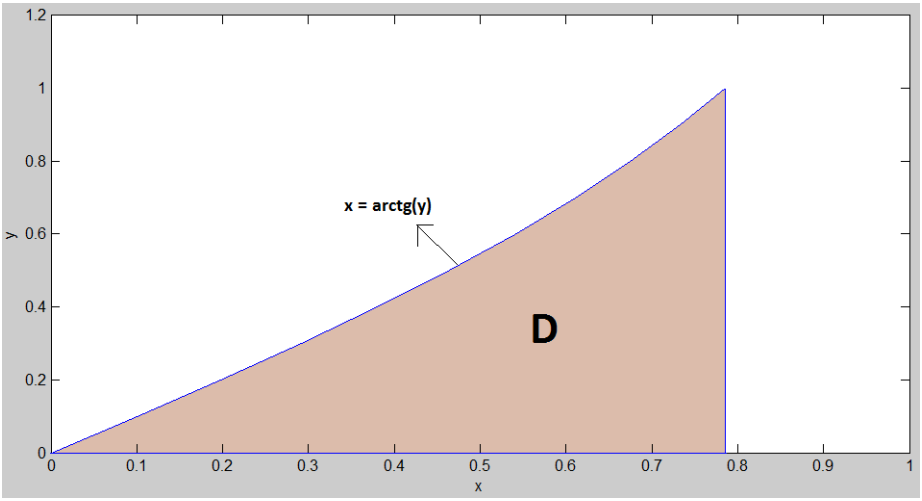
Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
1a. Prova - 1o. Semestre 2013 - 09/04/2013

Turma A

Questão 1. (3.0 pontos) Calcule as seguintes integrais:

$$(a) \int_0^1 [\int_{arctg(y)}^{\frac{\pi}{4}} \sec x \, \mathrm{d}x] \, \mathrm{d}y \qquad (b) \int_1^2 [\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \, \mathrm{d}y] \, \mathrm{d}x$$

Solução. (a) Note que podemos alterar a ordem de integração da seguinte forma: $(\int_0^1 [\int_{arctg(y)}^{\frac{\pi}{4}} \sec x \, \mathrm{d}x] \, \mathrm{d}y = \iint_D \sec x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x)$, onde D é o domínio de integração ($D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : arctg(y) \leq x \leq \dfrac{\pi}{4}, 0 \leq y \leq 1\}$), dado na figura abaixo:



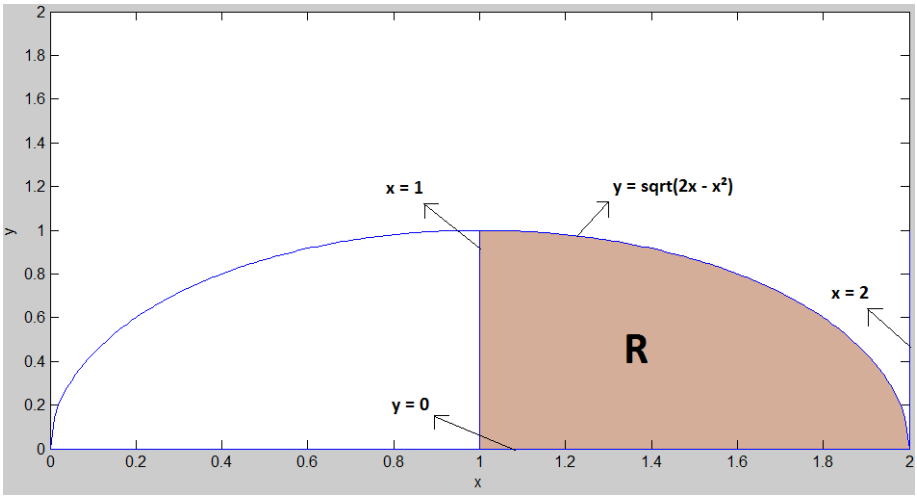
Dessa forma, podemos reescrever o domínio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \tfrac{\pi}{4}, \quad 0 \leq y \leq tg(x)\}$$

Com isso, pelo Teorema de Fubini, a integral a ser calculada fica:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} [\int_0^{tg(x)} \sec x \, \mathrm{d}y] \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg(x) \sec(x) \, \mathrm{d}x = [\sec(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1$$

(b) Abaixo, temos representada a região R, compreendida entre as retas $x = 1$, $x = 2$ e $y = 0$ e a curva $y = \sqrt{2x - x^2}$ (metade de uma circunferência):



Assim, podemos escrever R como

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0, 1 \leq x \leq 2\}$$

Fazemos, então, a seguinte transformação:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \\ J = \rho \end{cases}$$

Redefinindo, com essa tranformação, nossa região R, ficamos com:

$$\begin{cases} \rho^2 - 2\rho\cos\theta \leq 0 \Rightarrow 0 \leq \rho \leq 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta \geq 0 \\ \rho\sin\theta \geq 0 \Rightarrow \sin\theta \geq 0 \\ 1 \leq \rho\cos\theta \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{\cos\theta} \leq \rho \leq \frac{2}{\cos\theta} \end{cases}$$

Da intersecção de $\rho = \dfrac{1}{\cos\theta}$ com $\rho = 2\cos\theta$, ficamos com $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq \cos\theta \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$ e, da intersecção dos dois intervalos de ρ acima, como $\dfrac{2}{\cos\theta} \geq 2\cos\theta$, para quaisquer valores de $\cos\theta \geq 0$, ficamos com as delimitações:

$$\begin{cases} \frac{1}{\cos\theta} \leq \rho \leq 2\cos\theta \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \\ J = \rho \end{cases}$$

Por fim, atentando para o jacobiano $J = \rho$, ficamos com:

$$\int_1^2 [\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\, \mathrm{d}y]\, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2\cos\theta} \frac{\rho}{\rho^3}\, \mathrm{d}\rho]\, \mathrm{d}\theta = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\frac{1}{2\cos\theta} - \cos\theta)\, \mathrm{d}\theta$$

$$= [\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}[\ln|tg\theta + \sec\theta|]]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$$

Questão 2. (2.0 pontos) (a) Calcule $\displaystyle\iint_B \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, onde

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq xy \leq 2, \quad x^2 \leq y \leq 2x^2\}$$

Sugestão: Considere a mudança de variáveis satisfazendo $u = \dfrac{y}{x^2}$ e $v = xy$.

(2.0 pontos) (b) Calcule a massa da região limitada pelo cone $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$ e pela esfera $x^2+y^2+z^2 = 2z$, sabendo que a densidade é dada por $\delta(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Solução: (a) Da mudança de variáveis sugerida no enunciado, podemos escrever x e y da seguinte forma:

$$\begin{cases} x^3 = \dfrac{v}{u} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{v}{u}} \\ y^3 = xy \Rightarrow y = \sqrt[3]{uv^2} \\ J = ? \end{cases}$$

Calculemos o Jacobiano da transformação:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} \end{vmatrix} \Rightarrow |J| = \frac{1}{3}u^{-1}$$

Assim, podemos reescrever nossa região B como:

$$W = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq v \leq 2, \quad 1 \leq u \leq 2\}$$

Então, pelo Teorema de Fubini, ficamos com o cálculo da seguinte integral:

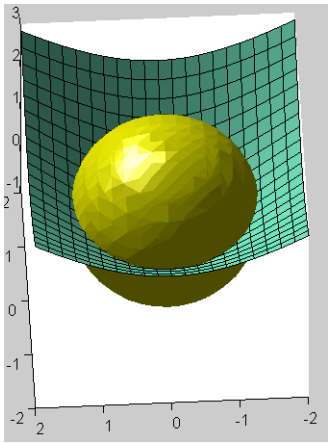
$$\iint_B \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_W |J| u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}}u^{-\frac{2}{3}}v^{-\frac{4}{3}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_1^2 [\int_1^2 \frac{1}{3}u^{-2}v^{-1}\,\mathrm{d}u]\,\mathrm{d}v$$

$$= \frac{1}{3}[-u^{-1}]_1^2[\ln(v)]_1^2 = -\frac{1}{3}(\frac{1}{2}-1)(\ln(2)-\ln(1)) = \frac{\ln(2)}{6}$$

(b) Rearranjando as desigualdades dadas, ficamos com:

$$\begin{cases} z \geq \sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 4 \end{cases}$$

Tal região do espaço está representada na figura abaixo (cone - azul claro, esfera - amarelo):



Façamos uma transformação por coordenadas esféricas, centradas em (0,0,0):

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\phi \\ y = \rho\sin\theta\sin\phi \\ z = \rho\cos\phi \\ J = \rho^2\sin\phi \end{cases}$$

Assim, reescrevendo as desigualdades, lembrando que, da transformação adotada, temos $\rho \geq 0$, $0 \leq \phi \leq \pi$ e θ entre um período, ficamos com:

$$\begin{cases} \rho\cos\phi \geq \rho\sin\phi \Rightarrow \cos\phi \geq \sin\phi \\ \rho^2 - 2\rho\cos\phi \leq 0 \Rightarrow 0 \leq \rho \leq 2\cos\phi \end{cases}$$

Dessa forma, podemos escrever nossa região S como

$$S = \{(\rho,\theta,\phi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq 2\cos\phi, \quad 0 \leq \phi \leq \tfrac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

e calcular a massa M de S pela integral tripla:

$$M = \iiint_S |J|\delta(\rho,\theta,\phi)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

Pelo Teorema de Fubini:

$$M = \int_0^{2\pi}[\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\int_0^{2\cos\phi}(\rho^2\sin\phi)\rho\,\mathrm{d}\rho]\,\mathrm{d}\phi]\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(2\cos\phi)^4}{4}\sin\phi\,\mathrm{d}\phi$$

Calculando a integral indefinida $\int(\cos\phi)^4\sin\phi\,\mathrm{d}\phi$ pela substituição $u = \cos\phi$, com $\mathrm{d}u = -\sin\phi\,\mathrm{d}\phi$, ficamos com:

$$\int(\cos\phi)^4\sin\phi\,\mathrm{d}\phi = -\int u^4\,\mathrm{d}u = -\frac{u^5}{5} + k$$

Voltando ao cálculo da massa M:

$$M = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(2\cos\phi)^4}{4}\sin\phi\,\mathrm{d}\phi = 8\pi[-\frac{(\cos\phi)^5}{5}]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{8\pi}{5}(-(\frac{1}{\sqrt{2}})^5 + 1)$$

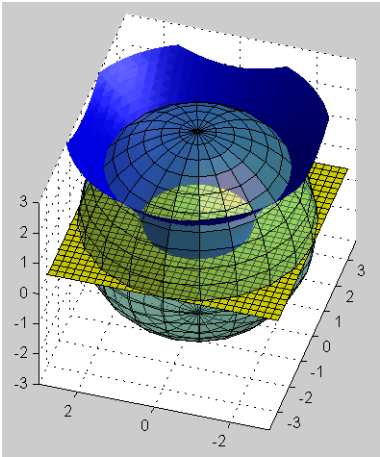
$$M = \frac{\pi}{5}(8 - \sqrt{2})$$

Questão 3. Seja R a região interior à esfera $x^2+y^2+z^2=9$ que satisfaz $x^2+y^2-z^2 \leq 1$ e $z \geq 0$.
(a) (1.0 ponto) Descreva R em coordenadas cilíndricas.
(b) (2.0 pontos) Supondo que a densidade é $\delta(x,y,z)=z$, determine a massa de R.

Solução (a) Temos R dado pelas desigualdades:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leq 9 \\ x^2+y^2-z^2 \leq 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

Tal região do espaço está representada na figura abaixo (esfera - azul claro transparente, hiperboloide - azul, plano - amarelo):



Usemos uma tranformação cilíndrica de coordenadas para descrever R:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Assim, ficamos com novas desigualdades:

$$\begin{cases} \rho^2+z^2 \leq 9 \Rightarrow z^2 \leq 9-\rho^2 \\ \rho^2-z^2 \leq 1 \Rightarrow z^2 \geq \rho^2-1 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

De maneira que podemos delimitar nossas variáveis da seguinte forma:

$$\begin{cases} 9-\rho^2 \geq \rho^2-1 \Rightarrow 0 \leq \rho \leq \sqrt{5} \\ z \leq \sqrt{9-\rho^2} \\ z \geq \sqrt{\rho^2-1}, \quad se \quad \rho^2-1 \geq 0 \\ z \geq 0, \quad se \quad \rho^2-1 \leq 0 \end{cases}$$

Desse modo, precisamos dividir nossa região R em duas partes U e V:

$$\begin{cases} U: \\ \sqrt{\rho^2-1} \leq z \leq \sqrt{9-\rho^2} \\ 1 \leq \rho \leq \sqrt{5} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \\ V: \\ 0 \leq z \leq \sqrt{9-\rho^2} \\ 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

(b) Tomando $\delta(\rho,\theta,z) = z$, podemos calcular a massa M da região R como $M_R = M_U + M_V$ a partir das integrais abaixo, lembrando do Jacobiano da transformação $J = \rho^2 \sin\phi$:

$$M_R = \iiint_U |J|\delta(\rho,\theta,z)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z + \iiint_V |J|\delta(\rho,\theta,z)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

Pelo Teorema de Fubini:

$$M_R = \int_0^{2\pi}[\int_0^{\sqrt{5}}[\int_{\sqrt{\rho^2-1}}^{\sqrt{9-\rho^2}} \rho z\,\mathrm{d}z]\,\mathrm{d}\rho]\,\mathrm{d}\theta + \int_0^{2\pi}[\int_0^1[\int_0^{\sqrt{9-\rho^2}} \rho z\,\mathrm{d}z]\,\mathrm{d}\rho]\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\pi\int_1^{\sqrt{5}} \rho[\frac{z^2}{2}]_{\rho^2-1}^{\sqrt{9-\rho^2}}\,\mathrm{d}\rho + 2\pi\int_0^1 \rho[\frac{z^2}{2}]_0^{\sqrt{9-\rho^2}}\,\mathrm{d}\rho = \pi\int_1^{\sqrt{5}} \rho(9-\rho^2-\rho^2+1)\,\mathrm{d}\rho \quad +$$

$$\pi\int_0^1 \rho(9-\rho^2)\,\mathrm{d}\rho = \pi[5\rho^2 - \frac{\rho^4}{2}]_1^{\sqrt{5}} + \pi[\frac{9\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}]_0^1 = \pi(25 - \frac{25}{2} - \frac{5}{2} + \frac{1}{2} + \frac{9}{2} - \frac{1}{4})$$

$$M_R = \frac{49\pi}{4}$$

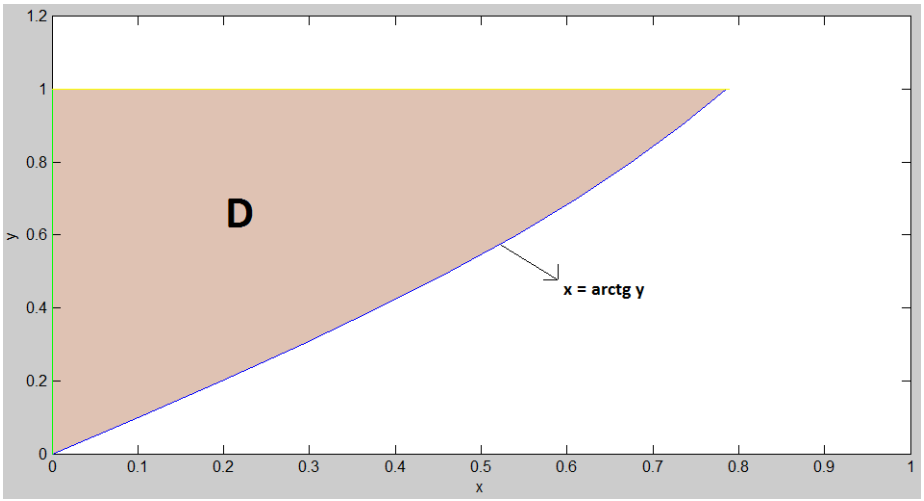
Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
1a. Prova - 1o. Semestre 2013 - 09/04/2013

Turma B

Questão 1. (3.0 pontos) Calcule as seguintes integrais:

$$(a) \int_0^1 [\int_0^{arctg(y)} \sec x \, \mathrm{d}x] \, \mathrm{d}y \qquad (b) \int_1^2 [\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \, \mathrm{d}y] \, \mathrm{d}x \tag{1}$$

Solução. (a) Note que podemos alterar a ordem de integração da seguinte forma: $(\int_0^1 [\int_0^{arctg(y)} \sec x \, \mathrm{d}x] \, \mathrm{d}y = \iint_D \sec x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x)$, onde D é o domínio de integração $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq arctg(y), 0 \leq y \leq 1\}$, dado na figura abaixo:



Dessa forma, podemos reescrever o domínio

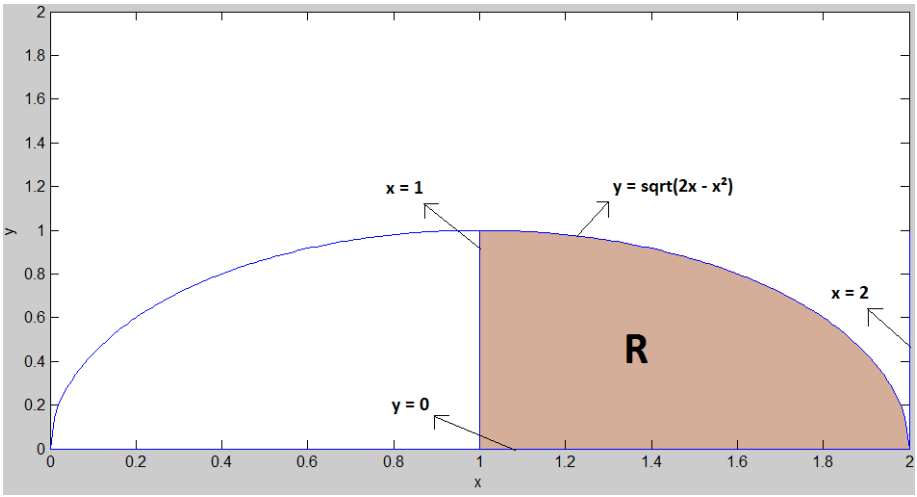
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \tfrac{\pi}{4}, \quad tg(x) \leq y \leq 1\}$$

Com isso, pelo Teorema de Fubini, a integral a ser calculada fica:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} [\int_{tg(x)}^1 \sec x \, \mathrm{d}y] \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - tg(x)) \sec(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec(x) \, \mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg(x) \sec(x) \, \mathrm{d}x$$

$$= [\ln|tg(x) + \sec(x)|]_0^{\frac{\pi}{4}} - [\sec(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(1+\sqrt{2}) + 1 - \sqrt{2}$$

(b) Abaixo, temos representada a região R, compreendida entre as retas $x = 1$, $x = 2$ e $y = 0$ e a curva $y = \sqrt{2x - x^2}$ (metade de uma circunferência):



Assim, podemos escrever R como

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0, 1 \leq x \leq 2\}$$

Fazemos, então, a seguinte transformação:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \\ J = \rho \end{cases}$$

Redefinindo, com essa tranformação, nossa região R, ficamos com:

$$\begin{cases} \rho^2 - 2\rho\cos\theta \leq 0 \Rightarrow 0 \leq \rho \leq 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta \geq 0 \\ \rho\sin\theta \geq 0 \Rightarrow \sin\theta \geq 0 \\ 1 \leq \rho\cos\theta \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{\cos\theta} \leq \rho \leq \frac{2}{\cos\theta} \end{cases}$$

Da intersecção de $\rho = \dfrac{1}{\cos\theta}$ com $\rho = 2\cos\theta$, ficamos com $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq \cos\theta \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$ e, da intersecção dos dois intervalos de ρ acima, como $\dfrac{2}{\cos\theta} \geq 2\cos\theta$, para quaisquer valores de $\cos\theta \geq 0$, ficamos com as delimitações:

$$\begin{cases} \frac{1}{\cos\theta} \leq \rho \leq 2\cos\theta \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \\ J = \rho \end{cases}$$

Por fim, atentando para o jacobiano $J = \rho$, ficamos com:

$$\int_1^2 [\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \, \mathrm{d}y] \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2\cos\theta} \frac{\rho}{\rho} \, \mathrm{d}\rho] \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2cos\theta - \frac{1}{\cos\theta}) \, \mathrm{d}\theta$$

$$= [2 \operatorname{sen}\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} - [\ln|tg\theta + \sec\theta|]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})$$

Questão 2. (2.0 pontos) (a) Calcule $\displaystyle\iint_B \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, onde

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq xy \leq 4, \quad 2x^2 \leq y \leq 4x^2\}$$

Sugestão: Considere a mudança de variáveis satisfazendo $u = \dfrac{y}{x^2}$ e $v = xy$.

(2.0 pontos) (b) Calcule a massa da região limitada pelo cone $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$ e pela esfera $x^2+y^2+z^2 = 4z$, sabendo que a densidade é dada por $\delta(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Solução: (a) Da mudança de variáveis sugerida no enunciado, podemos escrever x e y da seguinte forma:

$$\begin{cases} x^3 = \dfrac{v}{u} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{v}{u}} \\ y^3 = xy \Rightarrow y = \sqrt[3]{uv^2} \\ J = ? \end{cases}$$

Calculemos o Jacobiano da transformação:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} \end{vmatrix} \Rightarrow |J| = \frac{1}{3}u^{-1}$$

Assim, podemos reescrever nossa região B como:

$$W = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq v \leq 4, \quad 2 \leq u \leq 4\}$$

Então, pelo Teorema de Fubini, ficamos com o cálculo da seguinte integral:

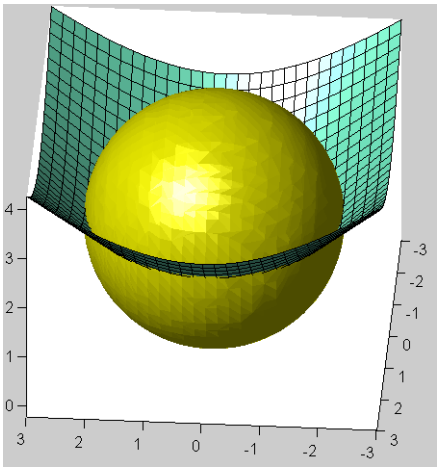
$$\iint_B \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_W |J| u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}}u^{-\frac{2}{3}}v^{-\frac{4}{3}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_2^4 [\int_2^4 \frac{1}{3}u^{-2}v^{-1}\,\mathrm{d}u]\,\mathrm{d}v$$

$$= \frac{1}{3}[u^{-1}]_2^4[\ln(v)]_2^4 = -\frac{1}{3}(\frac{1}{4} - \frac{1}{2})(\ln(4) - \ln(2)) = \frac{\ln(2)}{12}$$

(b) Rearranjando as desigualdades dadas, ficamos com:

$$\begin{cases} z \geq \sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2+(z-2)^2 \leq 4 \end{cases}$$

Tal região do espaço está representada na figura abaixo (cone - azul claro, esfera - amarelo):



Façamos uma transformação por coordenadas esféricas, centradas em (0,0,0):

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\phi \\ y = \rho\sin\theta\sin\phi \\ z = \rho\cos\phi \\ J = \rho^2\sin\phi \end{cases}$$

Assim, reescrevendo as desigualdades, lembrando que, da transformação adotada, temos $\rho \geq 0$, $0 \leq \phi \leq \pi$ e θ entre um período, ficamos com:

$$\begin{cases} \rho\cos\phi \geq \rho\sin\phi \Rightarrow \cos\phi \geq \sin\phi \\ \rho^2 - 4\rho\cos\phi \leq 0 \Rightarrow 0 \leq \rho \leq 4\cos\phi \end{cases}$$

Dessa forma, podemos escrever nossa região S como

$$S = \{(\rho,\theta,\phi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq 4\cos\phi, \quad 0 \leq \phi \leq \tfrac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

e calcular a massa M de S pela integral tripla:

$$M = \iiint_S |J|\delta(\rho,\theta,\phi)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

Pelo Teorema de Fubini:

$$M = \int_0^{2\pi}[\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\int_0^{4\cos\phi}(\rho^2\sin\phi)\rho\,\mathrm{d}\rho]\,\mathrm{d}\phi]\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(4\cos\phi)^4}{4}\sin\phi\,\mathrm{d}\phi$$

Calculando a integral indefinida $\int(\cos\phi)^4\sin\phi\,\mathrm{d}\phi$ pela substituição $u = \cos\phi$, com $\mathrm{d}u = -\sin\phi\,\mathrm{d}\phi$, ficamos com:

$$\int(\cos\phi)^4\sin\phi\,\mathrm{d}\phi = -\int u^4\,\mathrm{d}u = -\frac{u^5}{5} + k$$

Voltando ao cálculo da massa M:

$$M = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(4\cos\phi)^4}{4}\sin\phi\,\mathrm{d}\phi = 128\pi[-\frac{(\cos\phi)^5}{5}]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{128\pi}{5}(-(\frac{1}{\sqrt{2}})^5 + 1)$$

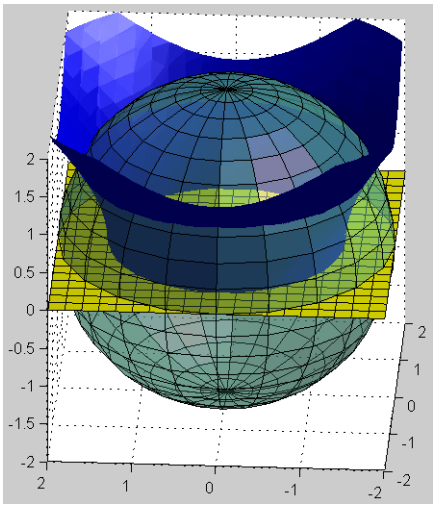
$$M = \frac{16\pi}{5}(8 - \sqrt{2})$$

Questão 3. Seja R a região interior à esfera $x^2+y^2+z^2=4$ que satisfaz $x^2+y^2-z^2 \leq 1$ e $z \geq 0$.
(a) (1.0 ponto) Descreva R em coordenadas cilíndricas.
(b) (2.0 pontos) Supondo que a densidade é $\delta(x,y,z)=z$, determine a massa de R.

Solução (a) Temos R dado pelas desigualdades:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leq 4 \\ x^2+y^2-z^2 \leq 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

Tal região do espaço está representada na figura abaixo (esfera - azul claro transparente, hiperboloide - azul, plano - amarelo):



Usemos uma tranformação cilíndrica de coordenadas para descrever R:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Assim, ficamos com novas desigualdades:

$$\begin{cases} \rho^2+z^2 \leq 4 \Rightarrow z^2 \leq 4-\rho^2 \\ \rho^2-z^2 \leq 1 \Rightarrow z^2 \geq \rho^2-1 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

De maneira que podemos delimitar nossas variáveis da seguinte forma:

$$\begin{cases} 4-\rho^2 \geq \rho^2-1 \Rightarrow 0 \leq \rho \leq \sqrt{\frac{5}{2}} \\ z \leq \sqrt{4-\rho^2} \\ z \geq \sqrt{\rho^2-1}, \quad se \quad \rho^2-1 \geq 0 \\ z \geq 0, \quad se \quad \rho^2-1 \leq 0 \end{cases}$$

Desse modo, precisamos dividir nossa região R em duas partes U e V:

$$\begin{cases} U: \\ \sqrt{\rho^2-1} \leq z \leq \sqrt{4-\rho^2} \\ 1 \leq \rho \leq \sqrt{\frac{5}{2}} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \\ V: \\ 0 \leq z \leq \sqrt{4-\rho^2} \\ 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

(b) Tomando $\delta(\rho,\theta,z) = z$, podemos calcular a massa M da região R como $M_R = M_U + M_V$ a partir das integrais abaixo, lembrando do Jacobiano da transformação $J = \rho^2 \sin\phi$:

$$M_R = \iiint_U |J|\delta(\rho,\theta,z)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z + \iiint_V |J|\delta(\rho,\theta,z)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

Pelo Teorema de Fubini:

$$M_R = \int_0^{2\pi} [\int_0^{\sqrt{\frac{5}{2}}} [\int_{\sqrt{\rho^2-1}}^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho z\,\mathrm{d}z]\,\mathrm{d}\rho]\,\mathrm{d}\theta + \int_0^{2\pi} [\int_0^1 [\int_0^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho z\,\mathrm{d}z]\,\mathrm{d}\rho]\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\pi \int_1^{\sqrt{\frac{5}{2}}} \rho[\frac{z^2}{2}]_{\rho^2-1}^{\sqrt{4-\rho^2}}\,\mathrm{d}\rho + 2\pi \int_0^1 \rho[\frac{z^2}{2}]_0^{\sqrt{4-\rho^2}}\,\mathrm{d}\rho = \pi \int_1^{\sqrt{\frac{5}{2}}} \rho(4-\rho^2-\rho^2+1)\,\mathrm{d}\rho$$

$$+\pi \int_0^1 \rho(4-\rho^2)\,\mathrm{d}\rho = \pi[\frac{5\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{2}]_1^{\sqrt{\frac{5}{2}}} + \pi[2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}]_0^1 = \pi(\frac{25}{4} - \frac{25}{8} - \frac{5}{2} + \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{4})$$

$$M_R = \frac{23\pi}{8}$$