Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
1a. Prova - 10/04/2012

Turma A

Questão 1:

(a) (2,0 pontos) Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{0}\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1} x \operatorname{sen}\left(y^2 - \frac{y^3}{3}\right) dy\, dx$.

(b) (2,0 pontos) Calcular a massa do sólido limitado por $|y| \leq 2 - x$, $|y| \leq 2 + x$ e $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, de densidade $\delta(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

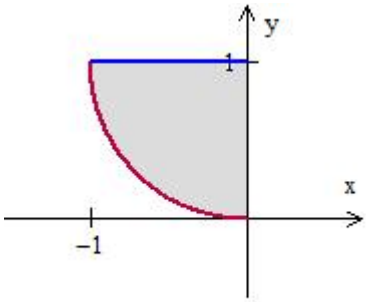
Solução :

(a) Para calcular a integral devemos trocar a ordem de integração e começar integrando na variável mais conveniente, que no caso é x. Para isso, vamos fazer um esboço da região de integração.

Para podermos esboçar a região de integração, precisamos saber como se comportam as curvas que descrevem a região. Assim, desenvolvendo a equação $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$:

$$y = 1 - \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow y - 1 = \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow (y - 1)^2 = 1 - x^2$$
$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

Sabendo que $y \leq 1$ e que $-1 \leq x \leq 0$ a região está na metade de baixo de uma circunferência centrada em $(0, 1)$ de raio 1, podemos esboçar a região de integração:



Assim temos:

$$\int_{-1}^{0}\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1} x \operatorname{sen}\left(y^2 - \frac{y^3}{3}\right) dy\, dx = \int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{0} x \operatorname{sen}\left(y^2 - \frac{y^3}{3}\right) dx\, dy =$$

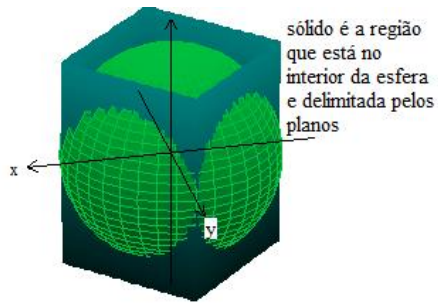
$$\int_{0}^{1} \frac{x^2}{2}\Big|_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{0} \operatorname{sen}\left(y^2 - \frac{y^3}{3}\right) dy = -\frac{1}{2}\int_{0}^{1} (1 - (1 - y)^2) \operatorname{sen}\left(y^2 - \frac{y^3}{3}\right) dy =$$

$$-\frac{1}{2}\int_{0}^{1} (-y^2 + 2y) \operatorname{sen}\left(y^2 - \frac{y^3}{3}\right) dy \;=$$

Realizando uma mudança de variável: $u = y^2 - \frac{y^3}{3} \Rightarrow du = (2y - y^2)dy$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{2}{3}} \operatorname{sen} u\, du \;= \frac{1}{2}\cos u\Big|_0^{\frac{2}{3}} = -\frac{1}{2}\Big[1-\cos\Big(\frac{2}{3}\Big)\Big]$$

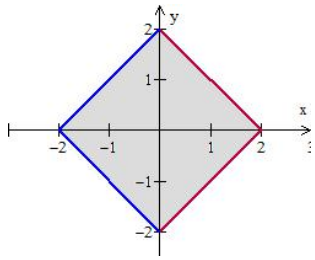
(b) O sólido é parte interior de uma esfera delimitada por planos. Os planos são $|y| \leq 2-x$ e $|y| \leq 2+x$ Um esboço do sólido:



Portanto

$$M = \iint_R \Big(\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \sqrt{4-x^2-y^2}\, dz\Big)\, dx\, dy$$

onde a região R é



Como a função é par em z e o intervalo é simétrico:

$$= 2\iint_R \Big(\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \sqrt{4-x^2-y^2}\, dz\Big)\, dx\, dy = 2\iint_R (4-x^2-y^2)\, dx\, dy =$$

Como o integrando é uma função par tanto em x quanto em y, assim como a região R é simétrica tanto em x, quando em y:

$$8\int_0^2\int_0^{2-x}(4-x^2-y^2)\, dy\, dx = 8\int_0^2\int_0^{2-x}\Big((4-x^2)y-\frac{y^3}{3}\Big)_{y=0}^{y=2-x} dy\, dx =$$

$$8\int_0^3 (2-x)\Big(4-x^2-\frac{(2-x)^2}{3}\Big)\, dx = 8\int_0^2 (2-x)\Big(4-x^2-\frac{4-4x+x^2}{3}\Big)\, dx =$$

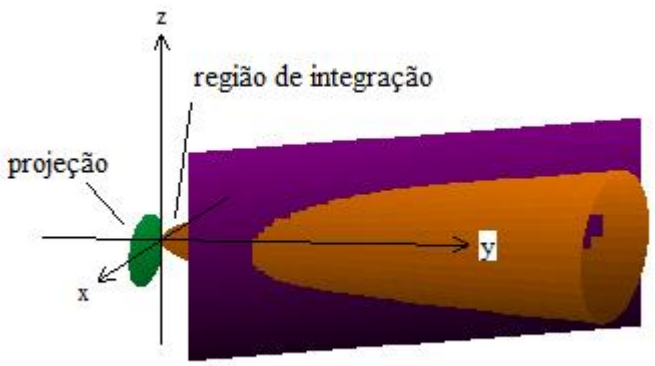
$$\frac{8}{3}\int_0^2 (2-x)\Big(-4x^2+4x+8\Big)\, dx = \frac{32}{3}\int_0^2 \Big(-2x^2+2x+4+x^3-x^2-2x\Big)\, dx =$$

$$\frac{32}{3}\int_0^2 \Big(x^3-3x^2+4\Big)\, dx = \frac{32}{3}\Big(\frac{x^4}{4}-\frac{3x^3}{3}+4x\Big)_0^2 dx = \frac{32}{3}(4-8+8) = \frac{128}{3}$$

Questão 2: (3,0 pontos) Calcule $\iiint_U z^2\,dx\,dy\,dz$ onde U é a região do $\mathbb{R}^3$ limitada por $y = x^2 + 9z^2$ e $y = 2x$.

Solução:

Para descobrirmos o jeito mais conveniente de realizar a integração devemos primeiro esboçar a região de integração:



Observando a região de integração, podemos perceber que é conveniente começar integrando em y e depois integrar em x e z a projeção da região U no plano xz.

Para descobrir como é a projeção de U no plano xz, calculamos a intersecção do parabolóide com o plano, igualando seus valores de y:

$$x^2 + 9z^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + 9z^2 = 1$$
$$(x-1)^2 + (3z)^2 = 1$$

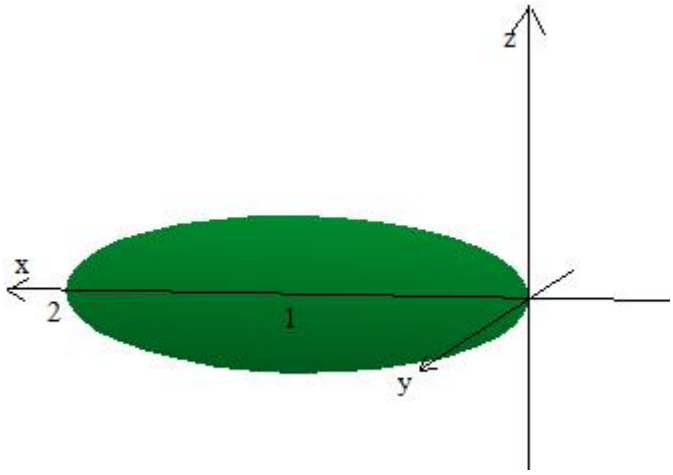


Figura 1: Projeção de U no plano xz

Assim temos:

$$\iiint_U z^2\,dx\,dy\,dz = \iint_R \Big(\int_{x^2+9z^2}^{2x} z^2\,dy\Big)\,dx\,dz = \iint_R (2x - x^2 - 9z^2)z^2\,dx\,dz =$$

Realizando a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} x = 1 + r\cos\theta \\ z = \frac{1}{3} r \operatorname{sen}\theta \end{cases} \tag{1}$$

$$J = det \begin{bmatrix} \cos\theta & \frac{1}{3}\operatorname{sen}\theta \\ -r\operatorname{sen}\theta & \frac{1}{3} r\cos\theta \end{bmatrix} = \frac{r}{3}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r}{3}(-r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta + 1)\frac{1}{9}r^2\operatorname{sen}^2\theta\,dr\,d\theta = \frac{1}{27}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)r^3\operatorname{sen}^2\theta\,dr\,d\theta =$$

$$\frac{1}{27}\int_0^{2\pi}\Big(\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6}\Big)_0^1 \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta = \frac{1}{27}\cdot\frac{1}{12}\int_0^{2\pi}\Big(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\Big)\,d\theta = \frac{1}{324}\Big(\frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{4}\Big)_0^{2\pi} = \frac{\pi}{324}$$

Questão 3: (3,0 pontos) Calcule a massa do sólido limitado por $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2$ e

$\sqrt{x^2 + y^2} \leq (2 - z)$, de densidade $\delta(x, y, z) = \dfrac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$.

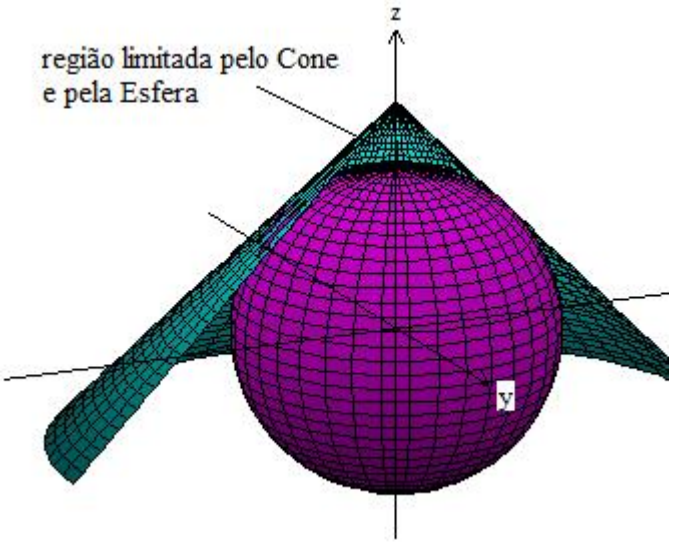
Solução:

Sabemos pelas equações dadas que o problema se trata de um cálculo de massa da intersecção de um cone com uma esfera. Assim, para conseguirmos descrever a região de integração em coordenadas convenientes, precisamos descobrir onde há a intersecção dos sólidos. Isolando o $x^2 + y^2$ da equação do cone e subtituindo na equação da esfera, temos:

$$(2 - z)^2 + z^2 = 2 \Rightarrow 2z^2 - 4z + 4 = 2 \Rightarrow z^2 - 2z + 1 = 0 \Rightarrow (z - 1)^2 = 0$$

$$z = 1$$

Como há apenas um valor de z onde ocorre a intersecção, temos que o cone tangencia a esfera. Agora podemos esboçar a região de integração:



Fazemos então uma mudança para coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \\ z = \rho \cos\phi \end{cases} \tag{2}$$

$$|J| = \rho^2 \operatorname{sen}\phi$$

Aplicando (2) na equação do cone:

$$\rho \cos\phi - 2 = -\rho \operatorname{sen}\phi \Rightarrow \rho(\cos\phi + \operatorname{sen}\phi) = 2$$

$$\rho = \frac{2}{\operatorname{sen}\phi + \cos\phi}$$

Observando o corte no plano xz, podemos facilmente perceber que $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$.

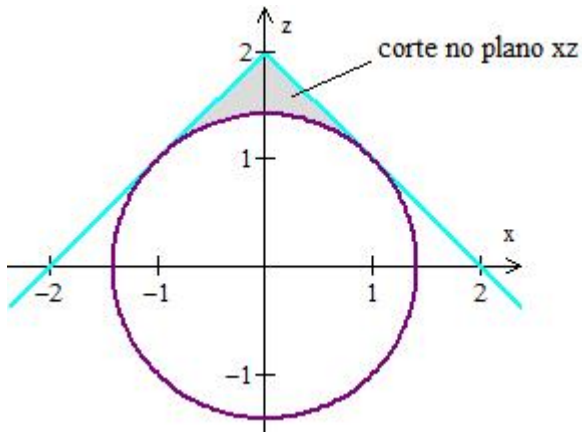


Figura 2: Corte no plano xz

Assim temos:

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sqrt{2}}^{\frac{2}{\operatorname{sen}\phi+\cos\phi}} \frac{\rho^3 \operatorname{sen}\phi \cos\phi}{\rho^5}\, d\rho\, d\phi\, d\theta \;= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\rho^{-1}\Big|_{\sqrt{2}}^{\frac{2}{\operatorname{sen}\phi+\cos\phi}} \operatorname{sen}\phi\cos\phi\, d\phi\, d\theta =$$

$$-\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big(\frac{\cos\phi + \operatorname{sen}\phi}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) \operatorname{sen}\phi\cos\phi\, d\phi\, d\theta =$$

$$-2\pi\Big(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\phi \operatorname{sen}\phi\, d\phi + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2\phi\cos\phi\, d\phi - \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}\phi\cos\phi\, d\phi\Big) =$$

Utilizando as seguintes mudanças de variáveis: $u = \cos\phi \Rightarrow du = -\operatorname{sen}\phi\, d\phi$ para a primeira integral e $v = \operatorname{sen}\phi \Rightarrow dv = \cos\phi\, d\phi$ para a segunda:

$$-2\pi\Big(-\frac{1}{2}\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} u^2\, du + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} v^2\, dv - \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen}(2\phi)}{2}\, d\phi\Big) =$$

$$-2\pi\Big(-\frac{1}{2}\frac{u^3}{3}\Big|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{2}\frac{v^3}{3}\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{-\cos(2\phi)}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\Big) = -2\pi\Big[-\frac{1}{6}\Big(-\frac{1}{2\sqrt{2}} + 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} - 0\Big) + \frac{1}{4\sqrt{2}}(0-1)\Big] =$$

$$2\pi\Big(\frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{6}\Big) = 2\pi \cdot \frac{3-2\sqrt{2}}{12\sqrt{2}} = \frac{\pi}{6\sqrt{2}}(3-2\sqrt{2}) = \frac{\pi}{12}(3\sqrt{2}-4)$$