Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
Prova 1 - 1o. Semestre de 2011

Turma A

Questão 1.

(a) (2 pontos) Calcule a integral $\displaystyle\int_0^{e-1}\left(\int_{\ln(1+x)}^1 \sqrt{e^y-y}dy\right)dx$

(b) (2 pontos) Calcule $\displaystyle\iint_D x^2y \operatorname{sen}(xy)\,dx\,dy$, onde D é limitado por $xy=1, xy=2, xy^2=1, xy^2=2$.

Solução:

(a) Temos $\ln(1+x)\le y\le 1$. Note que $\ln(1+x)=y \Leftrightarrow 1+x=e^y \Leftrightarrow x=e^y-1$. Então

$$\begin{aligned}\int_0^{e-1}\left(\int_{\ln(1+x)}^1 \sqrt{e^y-y}\,dy\right)dx &= \int_0^1\int_0^{e^y-1}\sqrt{e^y-y}\,dx\,dy = \\ &= \int_0^1 (e^y-1)\sqrt{e^y-y}\,dy = \frac{2}{3}\left((e^y-y)^{3/2}\right)_0^1 \\ &= \frac{2}{3}(e-1)^{3/2}-\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

(b) Vamos fazer uma mudança de variável. Considere $u=xy$ e $v=y$. Logo $x=\frac{u}{v}$ e $y=v$. Então D é tal que $1\le u\le 2$ e $\frac{1}{u}\le v\le\frac{2}{u}$.

O Jacobiano da trnsformação é

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{v}$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_{uv}} \frac{u}{v}v^2 \operatorname{sen} u\frac{1}{v}\,du\,dv = \int_1^2\int_{1/u}^{2/u} u \operatorname{sen} u\,dv\,du = \int_1^2 \operatorname{sen} u\,du = \cos 1-\cos 2.$$

Questão 2. (3 pontos) Calcule a massa do sólido S limitado por $z\le 2a (a>0)$, $x^2+y^2+z^2\ge a^2$, e $z^2\ge x^2+y^2$, com densidade $\delta(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

Solução:

O sólido S é uma região limitada. Logo é a região "dentro´´ do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$, abaixo do plano $z=2a$ e fora da esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$. Em coordenadas esféricas $x=\rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi$, $y=\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$ e $z=\rho\cos\varphi$ sua descrição fica

$$S_{\rho\theta\varphi}=\left\{(\rho,\theta,\varphi): 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}, a\le\rho\le\frac{2a}{\cos\varphi}\right\}.$$

Temos assim, que

$$\text{Massa}(S) = \iiint_S \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_a^{\frac{2a}{\cos\varphi}} \frac{1}{\rho^2}\cdot\rho^2\,\text{sen}\,\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi/4} a\left(2\frac{\text{sen}\,\varphi}{\cos\varphi} - \text{sen}\,\varphi\right)d\varphi == 2\pi a\left(-2\ln(cos\varphi)+\cos\varphi\right)_0^{\pi/4} = 2\pi a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1+\ln 2\right)$$

Questão 3. (3 pontos) Calcule a massa do sólido limitado por $z^3 = x^2+y^2$ e $z^4 = x^2+y^2$, com densidade $\delta(x,y,z) = x^2+y^2$.

Solução:

As superfícies tem intersecção em $z^3 = z^4 \Leftrightarrow z = 1$ ou $z = 0$. Assim

$$S = \left\{(x,y,z) : z^4 \le x^2+y^2 \le z^3, 0 \le z \le 1\right\}.$$

Em coordenadas cilíndricas

$$S_{r\theta z} = \left\{(r,\theta,z) : 0 \le \theta \le 2\pi, z^4 \le r^2 \le z^3, 0 \le z \le 1\right\}.$$

Logo, como $z \ge 0$ e $r \ge 0$

$$\text{Massa}(S) = \iiint_S (x^2+y^2)dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_{z^2}^{z^{3/2}}\int_0^{2\pi} r^2 r\,d\theta\,dr\,dz$$

$$= 2\pi\int_0^1 \left(\frac{r^4}{4}\right)_{z^2}^{z^{3/2}} dz = \frac{\pi}{2}\int_0^1 (z^6-z^8)dz = \frac{\pi}{63}$$

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
Prova 1 - 1o. Semestre de 2011

Turma B

Questão 1.

(a) (2 pontos) Calcule a integral $\displaystyle\int_0^{e-1}\left(\int_0^{\ln(1+x)}\sqrt{e^y-ey}dy\right)dx$

(b) (2 pontos) Calcule $\displaystyle\iint_D x^2y\,\mathrm{sen}\,(xy)\,dx\,dy$, onde D é limitado por $xy=1, xy=2, x^2y=1, x^2y=2$.

Solução:

(a)Temos $0\le y\le \ln(1+x)$. Note que $\ln(1+x)=y \Leftrightarrow 1+x=e^y \Leftrightarrow x=e^y-1$. Então

$$\begin{aligned}\int_0^{e-1}\left(\int_0^{\ln(1+x)}\sqrt{e^y-y}\,dy\right)dx &= \int_0^1\int_{e^y-1}^{e-1}\sqrt{e^y-ey}\,dx\,dy\\ &= \int_0^1\sqrt{e^y-ey}(e-e^y)\,dy=-\frac{2}{3}\left((e^y-ey)^{3/2}\right)_0^1\\ &= -\frac{2}{3}\left((e-e)^{3/2}\right)+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

(b) Vamos fazer uma mudança de variável. Considere $u=xy$ e $v=x$. Logo $y=\frac{u}{v}$ e $x=v$. Então D é tal que $1\le u\le 2$ e $\frac{1}{u}\le v\le\frac{2}{u}$.

O Jacobiano da transformação é

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{v}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{D_{uv}}\frac{u}{v}v^2\,\mathrm{sen}\,(u)\frac{1}{v}\,du\,dv=\int_1^2\int_{1/u}^{2/u}u\,\mathrm{sen}\,u\,dv\,du=\int_1^2\mathrm{sen}\,u\,du=\cos 1-\cos 2.$$

Questão 2. (3 pontos) Calcule a massa do sólido S limitado por $z\le 3a(a>0)$, $x^2+y^2+z^2\ge a^2$, e $z^2\ge x^2+y^2$, com densidade $\delta(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

Solução:

O sólido S é uma região limitada. Logo é a região "dentro´´ do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$, abaixo do plano $z=3a$ e fora da esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$. Em coordenadas esféricas $x=\rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi$, $y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi$ e $z=\rho\cos\varphi$ sua descrição fica

$$S_{\rho\theta\varphi}=\left\{(\rho,\theta,\varphi):0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}, a\le\rho\le\frac{3a}{\cos\varphi}\right\}$$

Temos assim, que

$$\text{Massa}(S) = \iiint_S \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_a^{\frac{3a}{\cos\varphi}} \frac{1}{\rho^2}\cdot\rho^2\,\operatorname{sen}\varphi d\rho\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi/4} a\left(3\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi} - \operatorname{sen}\varphi\right)d\varphi == 2\pi a\left(-3\ln(\cos\varphi)+\cos\varphi\right)_0^{\pi/4} = 2\pi a\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \frac{3}{2}\ln 2\right)$$

Questão 3. (3 pontos) Calcule a massa do sólido limitado por $z^2 = x^2+y^2$ e $z^3 = x^2+y^2$, com densidade $\delta(x,y,z) = (x^2+y^2)^2$.

Solução:

As superfícies tem intersecção em $z^3 = z^2 \Leftrightarrow z = 1$ ou $z = 0$. Ãssim

$$S = \left\{(x,y,z) : z^3 \le x^2+y^2 \le z^2, 0 \le z \le 1\right\}.$$

Em coordenadas cilíndricas

$$S_{r\theta z} = \left\{(r,\theta,z) : 0 \le \theta \le 2\pi, z^3 \le r^2 \le z^2, 0 \le z \le 1\right\}.$$

Logo, como $z \ge 0$ e $r \ge 0$

$$\text{Massa}(S) = \iiint_S (x^2+y^2)^2 dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_{z^{3/2}}^{z}\int_0^{2\pi} r^4 r\,d\theta\,dr\,dz$$

$$= 2\pi\int_0^1 \left(\frac{r^6}{6}\right)_{z^2}^{z^{3/2}} dz = \frac{\pi}{3}\int_0^1 (z^6 - z^9)dz = \frac{\pi}{70}$$