**Instituto de Matemática e Estatística da USP**
**MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia**
**1a. Prova - 1o. Semestre 2010 - 06/04/2010**

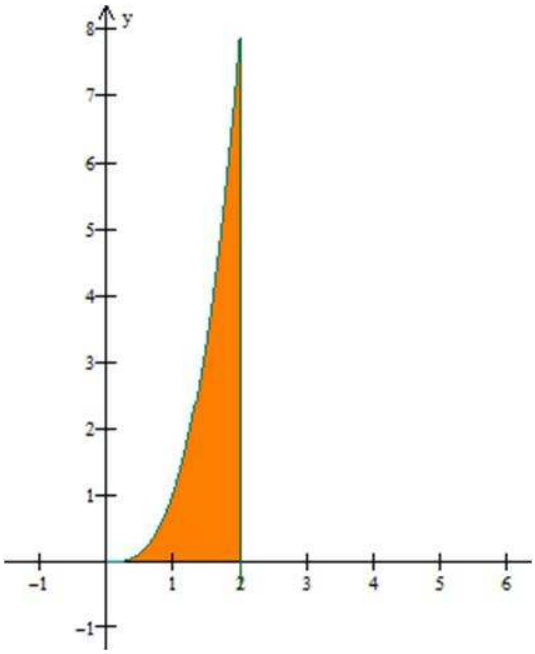
**Turma A**
**Questão 1:**

(a) (2,0 pontos) Calcule $\displaystyle\int_0^8 \left( \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4} dx \right) dy$.

(b) (2,0 pontos) Calculo o volume do sólido limitado pelas superfícies $z = 4 - \dfrac{x^2}{4} - y^2$, $z = 2y + 1$.

**Solução:**

(a) Esboçando o domínio de integração, teremos:



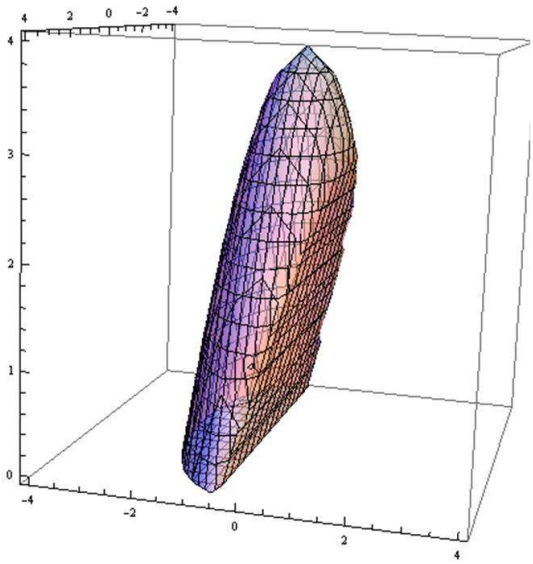

Pode-se, então, alterar a ordem de integração, de modo que a integral será dada por:

$$I = \int_0^2 \left( \int_0^{x^3} e^{x^4} dy \right) dx =$$

$$= \int_0^2 x^3 e^{x^4} dx = \frac{e^{x^4}}{4}\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{e^{16} - 1}{4}$$

(b) O sólido em questão, limitado pelas duas superfícies, pode ser esboçado:




$$S = \{(x, y, z) \mid 2y + 1 \leq z \leq 4 - \frac{x^2}{4} - y^2\} =$$

$$= \{(x, y, z) \mid 2y + 1 \leq z \leq 4 - \frac{x^2}{4} - y^2, \text{ com } \frac{x^2}{4} + y^2 + 2y + 1 \leq 4\}$$

Sendo assim, o volume do sólido pode ser calculado pela integral dupla:

$$V = \int\int_D \left(4 - \frac{x^2}{4} - y^2 - 2y - 1\right) dxdy,$$

onde $D = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{4} + y^2 + 2y + 1 \leq 4\}$. Fazendo uma mudança de coordenadas ficamos com:

$$\begin{cases} x = 2\rho\cos\theta \\ y = -1 + \rho \text{ sen}\,\theta \\ J = 2\rho \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2 \\ -\pi \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

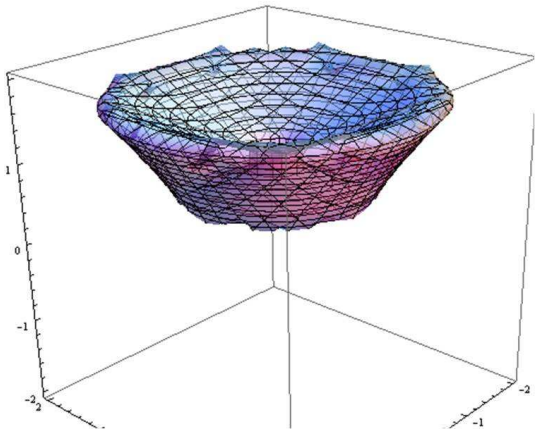
$$V = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^2 2\rho\left(4 - \rho^2\right) d\rho d\theta =$$

$$= 2\pi\left[4\rho^2 - \frac{\rho^4}{2}\right]_0^2 = 2\pi(16 - 8) = 16\pi$$

**Questão 2** (3,0 pontos) Calcule o volume da região R dada por $z^2 + 1 \geq x^2 + y^2$ e $5(z-1)^2 \leq x^2 + y^2$

**Solução:**

A região R está compreendida entre o hiperbolóide de uma folha $z^2 + 1 = x^2 + y^2$ e pelo cone $5(z-1)^2 = x^2 + y^2$ e está representada abaixo




O volume de R é dado por:

$$V = \iiint_R 1 \, dx \, dy \, dz$$

É conveniente escrever a região em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \\ J = r \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \text{Hiperboloide: } r^2 \leq 1 + z^2 \\ \text{Cone: } r^2 \geq 5(z-1)^2 \\ \text{Cone } \cap \text{Hiperboloide: } 5(z-1)^2 = z^2 + 1 \rightarrow z = \frac{1}{2} \;\text{ e }\; z = 2 \end{cases}$$

Tem-se a região em coordenadas cilíndricas dada por:

$$R = \{(r, \theta, z) \mid \sqrt{5}|z-1| \leq r \leq \sqrt{z^2+1} \;;\; 0 \leq \theta \leq 2\pi \;;\; \frac{1}{2} \leq z \leq 2\}$$

Com isso a integral tripla para o cálculo do volume fica dada por:

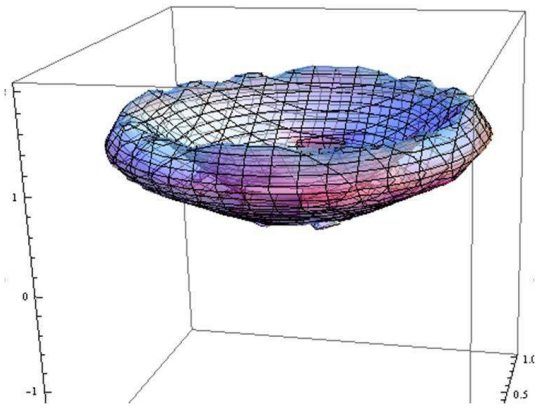
$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_R 1\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\int_{\sqrt{5}.|z-1|}^{\sqrt{z^2+1}} r\,dr\,dz\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{r^2}{2}\Big|_{\sqrt{5}.|z-1|}^{\sqrt{z^2+1}} dz\,d\theta \\
&= \pi\int_{\frac{1}{2}}^{2} [(z^2+1)-5(z-1)^2]\,dz \\
&= \pi\int_{\frac{1}{2}}^{2} [z^2+1-5z^2+10z-5]\,dz \\
&= \pi\int_{\frac{1}{2}}^{2} [-4z^2+10z-4]\,dz \\
&= \pi\left(-\frac{4}{3}z^3+5z^2-4z\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} \\
&= \frac{9\pi}{4}
\end{aligned}
$$

**Questão 3:** (3,0 pontos) Calcule a massa do sólido limitado pelas superfícies $u^2 + v^2 + w^2 = 2v$, $v = \sqrt{u^2 + w^2}$ e $v = \sqrt{3}\sqrt{u^2 + w^2}$, com densidade $\delta(u, v, w) = v^2$.

**Solução:**

O sólido está compreendido entre o exterior do semi-cone C1 ($v = \sqrt{3}\sqrt{u^2 + w^2}$), o interior do semi-cone C2 ($v = \sqrt{u^2 + w^2}$) e interior da esfera E1, que está deslocada em $v$ ($u^2 + v^2 + w^2 = 2v$).

Adotando $v = z$, $u = x$ e $w = y$, temos o sólido representado na figura abaixo :




A massa do sólido pode ser calculada por:

$$\text{Massa } = \iiint_{D_{u,v,w}} \delta(u, v, w)\, du\, dv\, dw$$

Faz-se a mudança para coordenadas esféricas e as regiões ficam descritas por:

$$\begin{cases} v = \rho \cdot \cos\phi \\ u = \rho \cdot \ \operatorname{sen}\phi \cdot \cos\theta \\ w = \rho \cdot \ \operatorname{sen}\phi \cdot \ \operatorname{sen}\theta \\ |Jac(\rho, \theta, \phi)| = \rho^2 \cdot \ \operatorname{sen}\phi \end{cases}$$

E as regiões ficam descritas por:

$$\begin{cases} \text{Exterior a C1} : v \leq \sqrt{3}\sqrt{u^2 + w^2} \Rightarrow \rho\cos\phi \leq \sqrt{3}\rho \ \operatorname{sen}\phi \Rightarrow \tan\phi \geq \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \phi \geq \frac{\pi}{6} \\ \text{Interior a C2} : v \geq \sqrt{u^2 + w^2} \Rightarrow \rho\cos\phi \geq \rho \ \operatorname{sen}\phi \Rightarrow \tan\phi \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \phi \leq \frac{\pi}{4} \\ \text{Interior a E1} : u^2 + v^2 + w^2 \leq 2v \Rightarrow \rho^2 \leq 2\rho\cos\phi \Rightarrow \rho \leq 2\cos\phi \end{cases}$$

Assim o domínio de integração em coordenadas esféricas fica:

$$D_{\rho,\theta,\phi} = \left\{ 0 \leq \theta \leq 2\pi \ , \ 0 \leq \rho \leq 2\cos\phi \ \text{ e } \ \frac{\pi}{6} \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\text{Massa} &= \iiint_{D_{u,v,w}} \delta(u,v,w)\,du\,dv\,dw = \iiint_{D_{\rho,\theta,\phi}} \delta(\rho,\theta,\phi)\cdot|Jac(\rho,\theta,\phi)|\,d\rho\,d\theta\,d\phi \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{0}^{2\cos\phi} \int_{0}^{2\pi} \rho^2\cdot\cos^2\phi\cdot\rho^2\cdot\ \operatorname{sen}\phi\,d\theta\,d\rho\,d\phi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{0}^{2\cos\phi} 2\pi\cdot\rho^4\cdot\cos^2\phi\cdot\ \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi \\
&= 2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\phi\cdot\ \operatorname{sen}\phi\left(\frac{1}{5}\cdot\rho^5\right)\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=2\cos\phi} d\phi = \frac{2\pi}{5}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\phi\cdot\ \operatorname{sen}\phi\cdot 2^5\cdot\cos^5\phi\,d\phi \\
&= \frac{64\pi}{5}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^7\phi\cdot\ \operatorname{sen}\phi\,d\phi
\end{aligned}$$

Fazendo a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{cases} \cos\phi = t \\ -\ \operatorname{sen}\phi\cdot d\phi = dt \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \phi = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \phi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

E sabendo que $\int_a^b f(s)ds = -\int_b^a f(s)ds$, temos que a integral fica:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^7\phi\cdot\ \operatorname{sen}\phi\,d\phi = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t^7\cdot(-1)\,dt = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} t^7\,dt$$

Voltando ao cálculo da massa, temos:

$$\begin{aligned}
\text{Massa} &= \frac{64\pi}{5}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} t^7\,dt = \frac{64\pi}{5}\left(\frac{1}{8}\cdot t^8\right)\Bigg|_{t=\frac{\sqrt{2}}{2}}^{t=\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8\pi}{5}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^8 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8\right] \\
&= \frac{8\pi}{5}\left(\frac{3^4-2^4}{2^8}\right) = \frac{8\pi}{5}\cdot\frac{(81-16)}{256} = \frac{65\pi}{5\cdot 32} = \frac{13\pi}{32}
\end{aligned}$$

**Instituto de Matemática e Estatística da USP**
**MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia**
**1a. Prova - 1o. Semestre 2010 - 06/04/2010**

**Turma B**

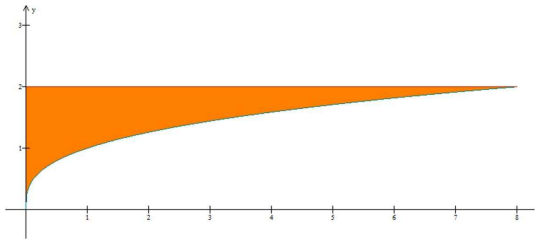
**Questão 1:**

(a) (2,0 pontos) Calcule o volume do sólido limitado pelas superfícies $z = 4 - x^2 - \dfrac{y^2}{4}$, $z = 2x + 1$.

(b) (2,0 pontos) Calcule $\displaystyle\int_0^8 \left( \int_{\sqrt[3]{x}}^2 e^{y^4} dy \right) dx$.

**Solução:**

(a) O sólido em questão, limitado pelas duas superfícies, pode ser esboçado:



$$S = \{(x, y, z) | 2x + 1 \leq z \leq 4 - x^2 - \frac{y^2}{4}\} =$$

$$= \{2x + 1 \leq z \leq 4 - x^2 - \frac{y^2}{4}, \frac{y^2}{4} + x^2 + 2x + 1 \leq 4\}$$

Sendo assim, o volume do sólido pode ser calculado pela integral dupla:

$$V = \int\int_{\{\frac{y^2}{4} + x^2 + 2x + 1 \leq 4\}} \left(4 - \frac{y^2}{4} - x^2 - 2x - 1\right) dxdy$$

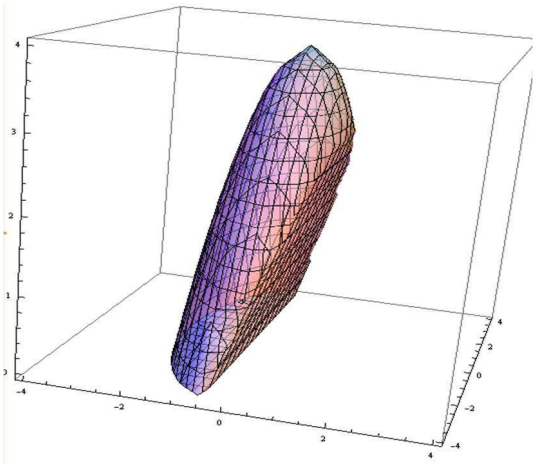
Fazendo uma mudança de coordenadas ficamos com:

$$\begin{cases} x = -1 + \rho \ \operatorname{sen}\theta \\ y = 2\rho\cos\theta \\ J = 2\rho \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2 \\ -\pi \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

$$V = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^2 2\rho \left(4 - \rho^2\right) d\rho d\theta =$$

$$= 2\pi \left[4\rho^2 - \frac{\rho^4}{2}\right]_0^2 = 2\pi(16 - 8) = 16\pi$$

(b) Esboçando o domínio de integração, teremos:



Pode-se, então, alterar a ordem de integração, de modo que a integral será dada por:

$$I = \int_0^2 \left( \int_0^{y^3} e^{y^4} dx \right) dy =$$

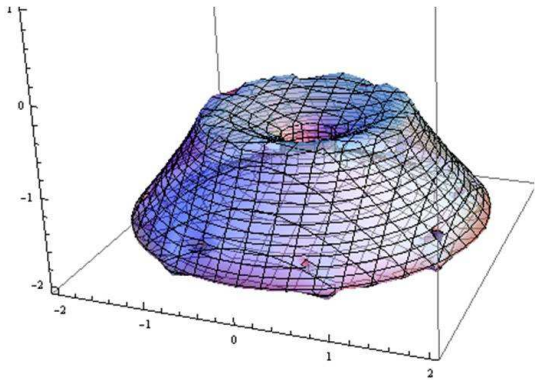
$$= \int_0^2 y^3 e^{y^4} dy = \frac{e^{y^4}}{4} \Big|_0^2 =$$

$$= \frac{e^{16} - 1}{4}$$

**Questão 2** (3,0 pontos) Calcule o volume da região R dada por $z^2 + 1 \geq x^2 + y^2$ e $5(z+1)^2 \leq x^2 + y^2$

**Solução:**

A região R está compreendida entre o hiperbolóide de uma folha $z^2 + 1 = x^2 + y^2$ e pelo cone $5(z-1)^2 = x^2 + y^2$ e está representada abaixo




O volume de r é dado por:

$$V = \iiint_R 1\, dx\, dy\, dz$$

É conveniente escrever a região em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = r.\cos\theta \\ y = r.\sin\theta \\ z = z \\ J = r \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \text{Hiperboloide} : r^2 \leq 1 + z^2 \\ \text{Cone} : r^2 \geq 5(z+1)^2 \\ \text{Cone} \cap \text{Hiperboloide} : 5(z+1)^2 = z^2 + 1 \rightarrow z = -\frac{1}{2}\ e\ z = -2 \end{cases}$$

Tem-se a região em coordenadas cilíndricas dada por:

$$R = \{(r, \theta, z) |\ \sqrt{5}.|z-1| \leq r \leq \sqrt{z^2+1}\,;\ 0 \leq \theta \leq 2\pi; -2 \leq z \leq -\frac{1}{2}\}$$

Com isso a integral tripla para o cálculo do volume fica dada por:

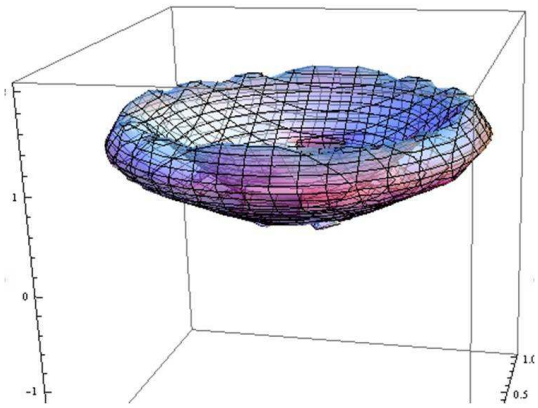
$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_R 1\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} \int_{\sqrt{5}.|z+1|}^{\sqrt{z^2+1}} r\,dr\,dz\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} \frac{r^2}{2}\Big|_{\sqrt{5}.|z+1|}^{\sqrt{z^2+1}} dz\,d\theta \\
&= \pi \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} (z^2+1) - (5(z+1)^2)\,dz \\
&= \pi \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} z^2 + 1 - 5z^2 - 10z - 5\,dz \\
&= \pi \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} -4z^2 - 10z - 4\,dz \\
&= \pi \left(-\frac{4}{3}.z^3 - 5z^2 - 4z\right)\Big|_{-2}^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{9\pi}{4}
\end{aligned}
$$

**Questão 3:** (3,0 pontos) Calcule a massa do sólido limitado pelas superfícies $u^2 + v^2 + w^2 = 2u$, $u = \sqrt{v^2 + w^2}$ e $u = \sqrt{3}\sqrt{v^2 + w^2}$, com densidade $\delta(u, v, w) = u^2$.

**Solução:**

O sólido está compreendido entre o exterior do semi-cone C1 ($u = \sqrt{3}\sqrt{v^2 + w^2}$), o interior do semi-cone C2 ($u = \sqrt{v^2 + w^2}$) e interior da esfera E1 que está deslocada em $u$ ($u^2 + v^2 + w^2 = 2u$).

Adotando $u = z$, $v = x$ e $w = y$, temos o sólido representado na figura abaixo :




A massa do sólido pode ser calculada por:

$$Massa = \iiint_{D_{u,v,w}} \delta(u, v, w)\, du\, dv\, dw$$

Faz-se a mudança para coordenadas esféricas e as regiões ficam descritas por:

$$\begin{cases} u = \rho \cdot \cos\phi \\ v = \rho \cdot \ \operatorname{sen}\phi \cdot \cos\theta \\ w = \rho \cdot \ \operatorname{sen}\phi \cdot \ \operatorname{sen}\theta \\ |Jac(\rho, \theta, \phi)| = \rho^2 \cdot \ \operatorname{sen}\phi \end{cases}$$

E as regiões ficam descritas por:

$$\begin{cases} \text{Exterior a C1} : u \leq \sqrt{3}\sqrt{v^2 + w^2} \Rightarrow \rho\cos\phi \leq \sqrt{3}\rho \ \operatorname{sen}\phi \Rightarrow \tan\phi \geq \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \phi \geq \frac{\pi}{6} \\ \text{Interior a C2} : u \geq \sqrt{v^2 + w^2} \Rightarrow \rho\cos\phi \geq \rho \ \operatorname{sen}\phi \Rightarrow \tan\phi \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \phi \leq \frac{\pi}{4} \\ \text{Interior a E1} : u^2 + v^2 + w^2 \leq 2u \Rightarrow \rho^2 \leq 2\rho\cos\phi \Rightarrow \rho \leq 2\cos\phi \end{cases}$$

Assim o domínio de integração em coordenadas esféricas fica:

$$D_{\rho,\theta,\phi} = \left\{ 0 \leq \theta \leq 2\pi \ , \ 0 \leq \rho \leq 2\cos\phi \ \text{ e } \ \frac{\pi}{6} \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\text{Massa} &= \iiint_{D_{u,v,w}} \delta(u,v,w)\,du\,dv\,dw = \iiint_{D_{\rho,\theta,\phi}} \delta(\rho,\theta,\phi)\cdot|Jac(\rho,\theta,\phi)|\,d\rho\,d\theta\,d\phi \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{0}^{2\cos\phi} \int_{0}^{2\pi} \rho^2\cdot\cos^2\phi\cdot\rho^2\cdot\ \operatorname{sen}\phi\,d\theta\,d\rho\,d\phi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{0}^{2\cos\phi} 2\pi\cdot\rho^4\cdot\cos^2\phi\cdot\ \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi \\
&= 2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\phi\cdot\ \operatorname{sen}\phi\left(\frac{1}{5}\cdot\rho^5\right)\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=2\cos\phi} d\phi = \frac{2\pi}{5}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\phi\cdot\ \operatorname{sen}\phi\cdot 2^5\cdot\cos^5\phi\,d\phi \\
&= \frac{64\pi}{5}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^7\phi\cdot\ \operatorname{sen}\phi\,d\phi
\end{aligned}$$

Fazendo a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{cases} \cos\phi = t \\ -\ \operatorname{sen}\phi\cdot d\phi = dt \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \phi = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \phi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

E sabendo que $\int_a^b f(s)ds = -\int_b^a f(s)ds$, temos que a integral fica:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^7\phi\cdot\ \operatorname{sen}\phi\,d\phi = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t^7\cdot(-1)\,dt = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} t^7\,dt$$

Voltando ao cálculo da massa, temos:

$$\begin{aligned}
\text{Massa} &= \frac{64\pi}{5}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} t^7\,dt = \frac{64\pi}{5}\left(\frac{1}{8}\cdot t^8\right)\Bigg|_{t=\frac{\sqrt{2}}{2}}^{t=\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8\pi}{5}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^8 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8\right] \\
&= \frac{8\pi}{5}\left(\frac{3^4-2^4}{2^8}\right) = \frac{8\pi}{5}\cdot\frac{(81-16)}{256} = \frac{65\pi}{5\cdot 32} = \frac{13\pi}{32}
\end{aligned}$$