Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
1a. Prova - 1o. Semestre 2008

Turma A

Questão 1

(a) (2,0 pontos) Calcule o volume do sólido

$$S = \{(x, y, z) : x \geq 0\,, x \leq y \leq \sqrt[3]{x} \text{ e } 0 \leq z \leq e^{y^2}\}$$

b) (2,0 pontos) Calcule $\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$.

Solução:

(a) A região S é dada na Fig. 1.

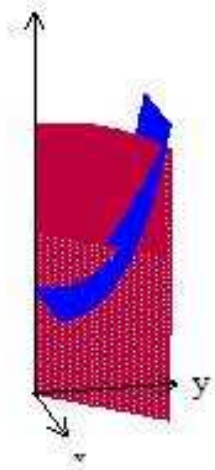

Figura 1: **Gráfico da região** S

O volume do sólido S é dado por $v(S) = \iiint\limits_S 1\ dx\ dy\ dz$.

Podemos reescrever S por

$$S = \{(x, y, z) : (x, y) \in D \text{ e } 0 \leq z \leq e^{y^2}\},$$

onde D é a região dada por $D = \{(x, y) : x \geq 0 \text{ e } x \leq y \leq \sqrt[3]{x}\}$
Como a função "1"é contínua, pelo Teorema de Fubini

$$v(S) \;=\; \iiint\limits_S 1\ dx\ dy\ dz = \iint_D \left(\int_0^{e^{y^2}} dz \right)\ dx\ dy = \iint_D e^{y^2}\ dx\ dy$$

Agora reescrevendo D, temos

$$D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1 \text{ e } y^3 \leq x \leq y\},$$

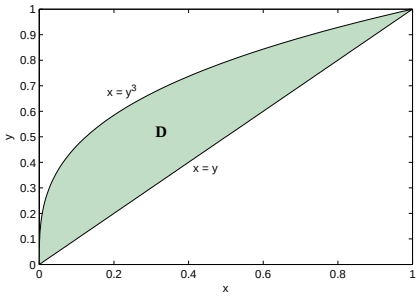

Figura 2: **Gráfico da região** D

e novamente por Fubini ("e^{y^2}"é contínua):

$$\begin{aligned} v(S) &= \iint_D e^{y^2}\ dx\ dy = \int_0^1 \int_{y^3}^{y} e^{y^2}\ dx\ dy = \int_0^1 e^{y^2} x\Big|_{x=y^3}^{y}\ dy \\ &= \int_0^1 (y-y^3)e^{y^2}\ dy = \int_0^1 (1-y^2)\ e^{y^2} y\ dy \end{aligned}$$

Fazendo a seguinte mudança de variáveis: $u = y^2 (\Rightarrow du = 2ydy)$ e resolvendo a integral "por partes":

$$\begin{aligned} v(S) &= \int_0^1 (1-y^2)e^{y^2} y\ dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-u)e^u\ du \\ &= \frac{1}{2}\left((1-u)e^u\Big|_{u=0}^{1} + \int_0^1 e^u\ du \right) = \frac{1}{2}\left((1-u)e^u + e^u\right)\Big|_{u=0}^{1} = \frac{e-2}{2} \end{aligned}$$

(b) Seja $D = \{(x,y)/y \leq x \leq \sqrt{4-y^2}, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{2}\}$. Vamos usar coordenadas polares:

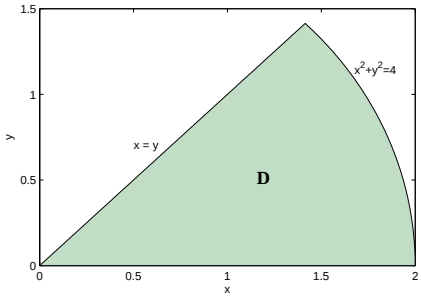

Figura 3: **Gráfico da região** D

$x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\sin\theta$ com jacobiano $|J| = \rho$

D nas coordenadas polares: com a equação $x^2+y^2 = 4$ obtemos $r = 2$ e com $x = y$ temos que o angulo $\theta = \frac{\pi}{4}$, assim D fica:

$D = \{(\rho,\theta)/0 \le \rho \le 2, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\}$

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}} dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 \frac{1}{1+\rho} \rho d\rho d\theta \\ &= \frac{\pi}{4}\left[\rho - \ln|1+\rho|\right]_0^2 = \frac{\pi}{4}[2-\ln 3]\end{aligned}$$

Questão 2 (3,0 pontos) Calcule a massa do sólido S onde

$$S = \{(x,y,z)/2y+2 \le z \le 10-4x^2-y^2\}$$

e a densidade é $\delta(x,y,z) = x^2$.

Solução:

$$Massa = \int\int\int_S \delta(x,y,z)dxdydz = \int\int_D \left[\int_{2y+2}^{10-4x^2-y^2} x^2 dz\right] dxdy,$$

onde D é a projeção de S sobre o plano xy isto é $z=0$, que é a região do plano xy limitada pela curva $2y+2 = 10-4x^2-y^2$, esta curva é a elipse $4x^2+y^2+2y = 8$ ou seja $4x^2+(y+1)^2 = 9$.

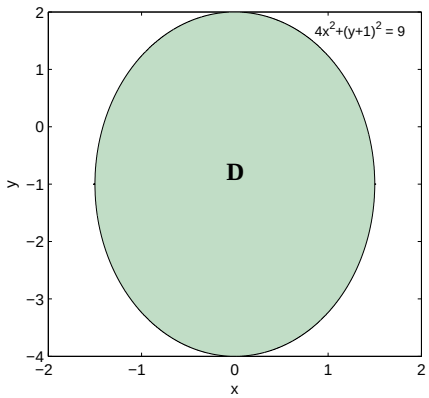

Figura 4: **Gráfico da região** D

Usando coordenadas polares (alongadas e deslocadas) $2x = \rho\cos\theta$ e $y+1 = \rho\sin\theta$, isto é, $x = \frac{1}{2}\rho\cos\theta$ e $y = \rho\sin\theta - 1$ com jacobiano $|J| = \frac{1}{2}\rho$; como $4x^2+(y+1)^2 = 3^2$,

$D_{\rho\theta} = \{(\rho,\theta)/0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \rho \le 3\}$

$$\begin{aligned}Massa &= \int\int\int_S \delta(x,y,z)dxdydz = \int\int_D x^2\left[10-4x^2-y^2-2y-2\right]dxdy \\ &= \int\int_D x^2\left[9-4x^2-(y+1)^2\right]dxdy \\ &= \int\int_{D_{\rho\theta}} (\frac{1}{4}\rho^2\cos^2\theta)(9-\rho^2)\frac{1}{2}\rho d\rho d\theta = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta \int_0^3 (9\rho^3-\rho^5)d\rho \\ &= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_0^{2\pi}\left[9\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{6}\right]_0^3 = \frac{1}{8}\pi\left(9\frac{3^4}{4} - \frac{3^6}{6}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^5\pi\end{aligned}$$

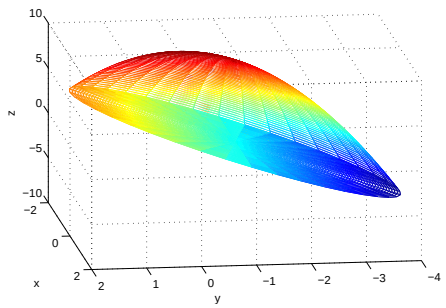

Figura 5: **Gráfico da região** S

Questão 3 (3,0 pontos) Calcule

$$\iiint_E \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz$$

onde E é a intersecção de $x^2+y^2+z^2 \geq 1$, $x^2+y^2 \leq 4$ e $z^2 \leq x^2+y^2$.
Solução:
A região E será:

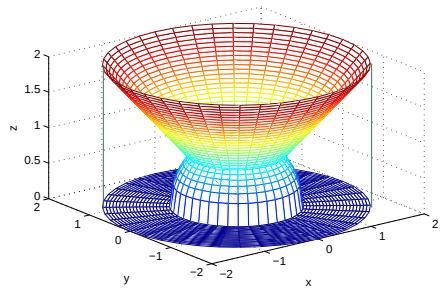

Figura 6: **Gráfico da região** E

Passando para coordenadas esféricas $\begin{cases} x &= \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y &= \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z &= \rho \cos\phi \end{cases}$

cujo Jacobiano é $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = \rho^2 \operatorname{sen}\phi$, teremos:

- $x^2+y^2+z^2 \geq 1 \Leftrightarrow \rho \geq 1$
- $x^2+y^2 \leq 4 \Leftrightarrow \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \leq 4 \Leftrightarrow \rho \leq \frac{2}{\operatorname{sen}\phi}$
  Obs.: Lembre-se que $\rho \geq 0$ e $\operatorname{sen}\phi \geq 0$ em $[0,\pi]$
- $z^2 \leq x^2+y^2 \Leftrightarrow \rho^2\cos^2\phi \leq \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \Leftrightarrow \tan^2\phi \geq 1 \Leftrightarrow \tan\phi \geq 1$ ou $\tan\phi \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{4}$

Portanto, a região E em coordenadas esféricas é

$$E_{\rho,\theta,\phi} = \{(\rho,\theta,\phi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\ ,\ \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{4} \text{ e } 1 \leq \rho \leq \frac{2}{\operatorname{sen}\phi}\}.$$

Pelo teorema de Mudança de variáveis a integral fica:

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_{E} \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\ dx\ dy\ dz = \int\int\int\limits_{E_{\rho,\theta,\phi}} \frac{1}{\rho^2}\ \rho^2 \operatorname{sen}\phi\ d\rho\ d\theta\ d\phi \\ &= \int\int\int\limits_{E_{\rho,\theta,\phi}} \operatorname{sen}\phi\ d\rho\ d\theta\ d\phi \end{aligned}$$

Por Fubini ("$\operatorname{sen}\phi$"é contínua):

$$\begin{aligned} I &= \int\int\int\limits_{E_{\rho,\theta,\phi}} \operatorname{sen}\phi\ d\rho\ d\theta\ d\phi = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_1^{\frac{2}{\operatorname{sen}\phi}} \operatorname{sen}\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\frac{2}{\operatorname{sen}\phi}-1\right)\operatorname{sen}\phi\ d\phi\ d\theta = 2\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 2-\operatorname{sen}\phi\ d\phi \\ &= 2\pi\left(2\phi+\cos\phi\right)\Big|_{\phi=\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = 2\pi\left(2\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}\right) = 2\pi(\pi-\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
1a. Prova - 1o. Semestre 2008

Turma B

Questão 1

(a) (2,0 pontos) Calcule o volume do sólido

$$S = \{(x, y, z) : y \geq 0\,, y \leq x \leq \sqrt[3]{y} \text{ e } 0 \leq z \leq e^{x^2}\}$$

(b) (2,0 pontos) Calcule $\int_0^{\sqrt{2}} \int_x^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}} dydx$.

Solução:

(a) A região S é dada na Fig. 1.

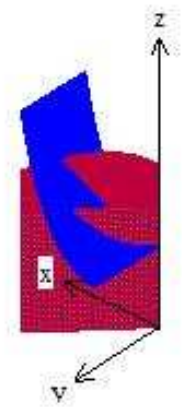

Figura 7: **Gráfico da região** S

O volume do sólido S é dado por $v(S) = \iiint\limits_S 1\ dx\ dy\ dz$.

Podemos reescrever S por

$$S = \{(x, y, z) : (x, y) \in D \text{ e } 0 \leq z \leq e^{x^2}\},$$

onde D é a região dada por $D = \{(x, y) : y \geq 0 \text{ e } y \leq x \leq \sqrt[3]{y}\}$
Como a função "1"é contínua, pelo Teorema de Fubini

$$v(S) \;=\; \iiint\limits_S 1\ dx\ dy\ dz = \iint_D \left(\int_0^{e^{x^2}} dz \right)\ dx\ dy = \iint_D e^{x^2}\ dx\ dy$$

Agora reescrevendo D, temos

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } x^3 \leq y \leq x\},$$

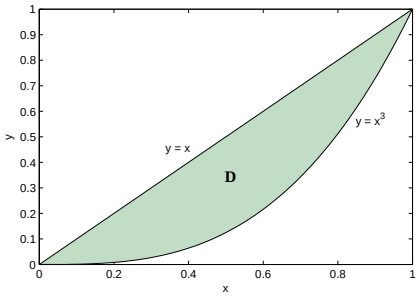

Figura 8: **Gráfico da região** D

e novamente por Fubini ("e^{x^2}"é contínua):

$$\begin{aligned} v(S) &= \iint_D e^{x^2}\ dx\ dy = \int_0^1 \int_{x^3}^{x} e^{x^2}\ dy\ dx = \int_0^1 e^{x^2} y\Big|_{y=x^3}^{x}\ dx \\ &= \int_0^1 (x - x^3) e^{x^2}\ dx = \int_0^1 (1 - x^2)\ e^{x^2} x\ dx \end{aligned}$$

Fazendo a seguinte mudança de variáveis: $u = x^2 (\Rightarrow du = 2xdx)$ e resolvendo a integral "por partes":

$$\begin{aligned} v(S) &= \int_0^1 (1 - x^2) e^{x^2} x\ dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - u) e^u\ du \\ &= \frac{1}{2} \left((1 - u) e^u \Big|_{u=0}^{1} + \int_0^1 e^u\ du \right) = \frac{1}{2} \left((1 - u) e^u + e^u \right) \Big|_{u=0}^{1} = \frac{e - 2}{2} \end{aligned}$$

(b) Seja $D = \{(x, y)/x \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$.

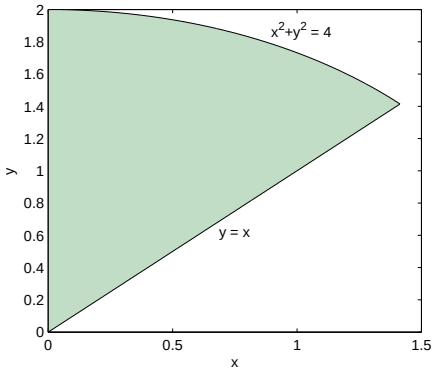

Figura 9: **Gráfico da região** D

Vamos usar coordenadas polares: $x = \rho \cos\theta$ e $y = \rho \sin\theta$ com jacobiano $|J| = \rho$.

D nas coordenadas polares: com a equação $x^2 + y^2 = 4$ obtemos $r = 2$ e com $y = x$ temos que o angulo $\theta = \frac{\pi}{4}$, e $\theta = \frac{\pi}{2}$ para $y = \sqrt{4 - x^2}$ e $r = 2$, assim D fica:

D nas coordenadas polares fica: $D = \{(\rho,\theta)/0 \le \rho \le 2, \quad \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}$

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{2}} \int_x^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}} dydx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \frac{1}{1+\rho} \rho d\rho d\theta \\ &= \frac{\pi}{4}\left[\rho - \ln|1+\rho|\right]_0^2 = \frac{\pi}{4}[2-\ln 3]\end{aligned}$$

Questão 2(3,0 pontos) Calcule a massa do sólido S onde

$$S = \{(x,y,z)/2x+2 \le z \le 10-4y^2-x^2\}$$

e a densidade é $\delta(x,y,z) = y^2$.

Solução:

$$Massa = \int\int\int_S \delta(x,y,z)dxdydz = \int\int_D \left[\int_{2x+2}^{10-4y^2-x^2} y^2 dz\right] dxdy,$$

onde D é a projeção de S sobre o plano xy isto é $z=0$, que é a região do plano xy limitada pela curva $2x+2 = 10-4y^2-x^2$, esta curva é a elipse $x^2+2x+4y^2 = 8$ ou seja $(x+1)^2+4y^2 = 9$. Usando coordenadas polares (alongadas e deslocadas) $x+1 = \rho\cos\theta$ e $2y = \rho\sin\theta$, isto é,

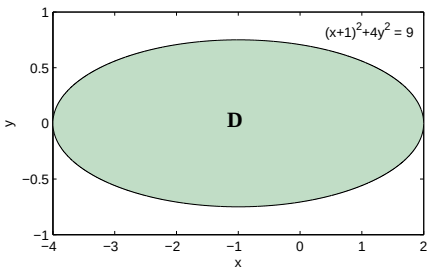

Figura 10: **Gráfico da região** D

$x = \rho\cos\theta - 1$ e $y = \frac{1}{2}\rho\sin\theta$ com jacobiano $|J| = \frac{1}{2}\rho$; como $4y^2+(x+1)^2 = 3^2$,
$D_{\rho\theta} = \{(\rho,\theta)/0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \rho \le 3\}$

$$\begin{aligned}Massa &= \int\int\int_S \delta(x,y,z)dxdydz = \int\int_D y^2\left[10-4y^2-x^2-2x-2\right]dxdy \\ &= \int\int_D y^2\left[9-4y^2-(x+1)^2\right]dxdy \\ &= \int\int_{D_{\rho\theta}} (\frac{1}{4}\rho^2\sin^2\theta)(9-\rho^2)\frac{1}{2}\rho d\rho d\theta = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta \int_0^3 (9\rho^3-\rho^5)d\rho \\ &= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_0^{2\pi}\left[9\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^6}{6}\right]_0^3 = \frac{1}{8}\pi\left(9\frac{3^4}{4}-\frac{3^6}{6}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^5\pi\end{aligned}$$

Questão 3 (3,0 pontos) Calcule

$$\iiint_E \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz$$

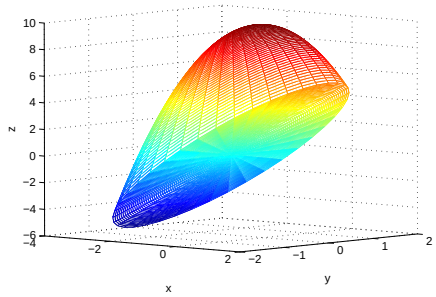

Figura 11: **Gráfico da região** S

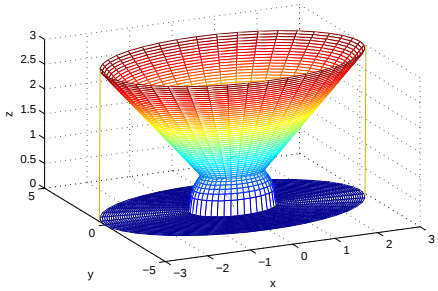

Figura 12: **Gráfico da região** E

onde E é a intersecção de $x^2+y^2+z^2 \geq 1$, $x^2+y^2 \leq 9$ e $z^2 \leq x^2+y^2$.
Solução:
A região E será:

Passando para coordenadas esféricas $\begin{cases} x &= \rho \operatorname{sen}\phi \ \cos\theta \\ y &= \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z &= \rho \ \cos\phi \end{cases}$

cujo Jacobiano é $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = \rho^2 \operatorname{sen}\phi$, teremos:

- $x^2+y^2+z^2 \geq 1 \Leftrightarrow \rho \geq 1$
- $x^2+y^2 \leq 9 \Leftrightarrow \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \leq 9 \Leftrightarrow \rho \leq \frac{3}{\operatorname{sen}\phi}$
  Obs.: Lembre-se que $\rho \geq 0$ e $\operatorname{sen}\phi \geq 0$ em $[0,\pi]$
- $z^2 \leq x^2+y^2 \Leftrightarrow \rho^2\cos^2\phi \leq \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \Leftrightarrow \tan^2\phi \geq 1 \Leftrightarrow \tan\phi \geq 1$ ou $\tan\phi \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{4}$

Portanto, a região E em coordenadas esféricas é

$$E_{\rho,\theta,\phi} = \{(\rho,\theta,\phi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi \ , \ \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{4} \text{ e } 1 \leq \rho \leq \frac{3}{\operatorname{sen}\phi}\}.$$

Pelo teorema de Mudança de variáveis aintegral fica:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_E \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz = \iiint_{E_{\rho,\theta,\phi}} \frac{1}{\rho^2}\, \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi \\ &= \iiint_{E_{\rho,\theta,\phi}} \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi \end{aligned}$$

Por Fubini ("$\operatorname{sen}\phi$"é contínua):

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_{E_{\rho,\theta,\phi}} \operatorname{sen}\phi \; d\rho \; d\theta \; d\phi = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_1^{\frac{3}{\operatorname{sen}\phi}} \operatorname{sen}\phi \; d\rho \; d\phi \; d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\frac{3}{\operatorname{sen}\phi} - 1 \right) \operatorname{sen}\phi \; d\phi \; d\theta = 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 3 - \operatorname{sen}\phi \; d\phi \\
&= 2\pi \left(3\phi + \cos\phi\right) \Big|_{\phi=\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = 2\pi \left(3\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\right) = \pi(3\pi - 2\sqrt{2})
\end{aligned}
$$