MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
1ª Prova - 1o semestre de 2006

Questão 1.

a) (valor: 1,0) Descreva a região E de $\mathbb{R}^3$ cujo volume é dado pela integral

$$\int_0^3 \left(\int_{x^2}^9 xe^{-y^2} dy \right) dx.$$

b) (valor: 2,0) Calcule o volume de E.

Solução:

a) A região de integração esboçada na Fig. 1, é:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3 \quad \text{e} \quad x^2 \leq y \leq 9\}$$

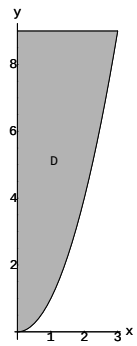


Figura 1. Região de integração D.

e a função integrada é $f(x, y) = xe^{-y^2}$. Assim a integral representa o volume do sólido

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 3, \quad x^2 \leq y \leq 9 \quad \text{e} \quad 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

(E é limitado superiormente pelo gráfico de f, inferiormente pelo plano $z = 0$ e "lateralmente" pela superfície cilíndrica $\partial D \times \mathbb{R}$).

b) Para calcular o volume de E, vamos inverter a ordem de integração. Primeiro, escrevemos D na forma

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 9 \quad \text{e} \quad 0 \leq x \leq \sqrt{y}\right\}$$

Temos, portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^3 \left(\int_{x^2}^9 xe^{-y^2} dy \right) dx &= \int_0^9 \left(\int_0^{\sqrt{y}} xe^{-y^2} dx \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^9 ye^{-y^2} dy = -\frac{1}{4} \left(e^{-y^2} \Big|_0^9 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - e^{-81}\right). \end{aligned}$$

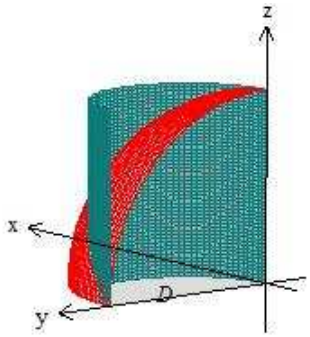
Questão 2. (valor: 3,5) Seja B a região contida no primeiro octante, interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 2ay$ e limitada pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, onde $a > 0$. Calcule

$$\iiint_B z dx dy dz.$$

Solução: A região B pode ser descrita por

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y - a)^2 \leq a^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq z \leq \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\}.$$

Veja figura abaixo.



Então

$$\iiint_B z dx dy dz = \iint_D \left[\int_0^{\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}} z dz \right] dx dy = \frac{1}{2} \iint_D \left(4a^2 - x^2 - y^2\right) dx dy$$

A região D é dada por

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad \text{e} \quad x^2 + (y - a)^2 \leq a^2\right\}$$

cujo grafico é esboçado na Figura 2.

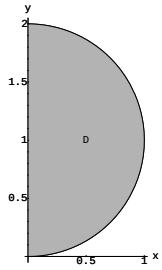


Figura 2. Região de integração D para $a = 1$.

Para calcular essa última integral faremos uma mudança de coordenadas para coordenadas polares: $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, cujo jacobiano r. A região D, em coordenadas polares, é descrita por:

$$D^* = \left\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad 0 \leq r \leq 2a\,\text{sen}\,\theta\right\}$$

Logo

$$
\begin{aligned}
\iiint_B z dxdydz &= \frac{1}{2}\int\int_{D^*}\left(4a^2-r^2\right) r dr d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2a\,\mathrm{sen}\,\theta}\left(4a^2-r^2\right) r dr \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{4a^2r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^{2a\,\mathrm{sen}\,\theta} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 4a^4\,\mathrm{sen}^2\theta(2-\mathrm{sen}^2\theta)d\theta \\
&= 2a^4\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^2\theta(1+\cos^2\theta)d\theta = 2a^4\int_0^{\pi/2}(\mathrm{sen}^2\theta+\frac{1}{4}\mathrm{sen}^2 2\theta)d\theta \\
&= 2a^4\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}+\frac{1-\cos 4\theta}{8}\right)d\theta = 2a^4\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{16}\right) \\
&= \frac{5\pi a^4}{8}.
\end{aligned}
$$

Questão 3. (valor: 3.5) Determine a massa do sólido de densidade $\rho(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ e que tem a forma da região limitada superiormente pela esfera de equação $x^2+y^2+z^2=4$ e inferiormente pelo plano $z=1$.

Solução: O sólido S é esboçado na Figura 3. Vamos a usar coordenadas esféricas: $x = r\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta,\ y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z = r\cos\varphi$. Nesse caso, a região será descrita tomando $0\le\varphi\le\frac{\pi}{3},\ 0\le\theta\le 2\pi$ e $\sec\varphi\le r\le 2$ (em coordenadas esféricas, o plano $z=1$ se escreve como $r=\frac{1}{\cos\varphi}=\sec\varphi$). Logo, a massa do sólido S é

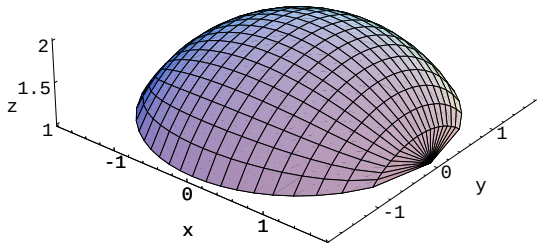


Figura 3. Região de integração S.

$$
\begin{aligned}
M &= \int\int\int_S \rho(x,y,z)dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi/3} d\varphi\int_{\sec\varphi}^2 r^3\mathrm{sen}\,\varphi dr \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi/3}\frac{r^4}{4}\Big|_{\sec\varphi}^2 \mathrm{sen}\,\varphi d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi/3}\left(16-\sec^4\varphi\right)\mathrm{sen}\,\varphi d\varphi \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/3}\left(16\,\mathrm{sen}\,\varphi-\frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{\cos^4\varphi}\right)d\varphi = \frac{\pi}{2}\left(-16\cos\varphi-\frac{1}{3\cos^3\varphi}\right)\Big|_0^{\pi/3} \\
&= \frac{\pi}{2}\left[\frac{-16}{2}-\frac{8}{3}-\left(-16-\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{\pi}{2}\left(8-\frac{7}{3}\right) \\
&= \frac{17\pi}{6}.
\end{aligned}
$$