MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
1ª Prova - 1o semestre de 2005

Questão 1. Calcule:

(a) (2.0 pontos) $\displaystyle\int_0^1\int_0^x e^{-y^2+2y}\,dy\,dx$

(b) (2.0 pontos) $\displaystyle\iint_D (x+y)^{20}(x-y)\,dx\,dy$, onde D é o triângulo de vértices (0,0), $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ e $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$.

Solução:

(a) Como $f(x,y)=e^{-y^2+2y}$ é uma função contínua em $\mathbb{R}^2$, pode-se aplicar o Teorema de Fubini, transformando a integral iterada do exercício na integral dupla:

$$\int_0^1\int_0^x e^{-y^2+2y}\,dy\,dx = \iint_D e^{-y^2+2y}\,dx\,dy$$

onde $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1 \ e\ 0\le y\le x\}$.

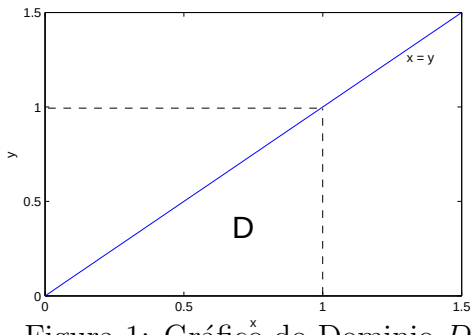

Figura 1: Gráfico do Dominio D

Como pode-se ver na figura 1, o domínio de integração D também pode ser descrito como $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 1 \ e\ y\le x\le 1\}$.

E, aplicando-se novamente o Teorema de Fubini, chega-se em:

$$\iint_D e^{-y^2+2y}\,dx\,dy = \int_0^1\int_y^1 e^{-y^2+2y}\,dx\,dy = \int_0^1 e^{-y^2+2y}(1-y)\,dy$$

Agora, para facilitar o cálculo da integral acima, pode-se fazer a seguinte mudança de variável

$$\begin{cases} u=-y^2+2y \\ du=(-2y+2)dy \\ y=0\Rightarrow u=0 \\ y=1\Rightarrow u=1 \end{cases}$$

que resulta em :

$$\int_0^1 e^{-y^2+2y}(1-y)\,dy = \int_0^1 e^u\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}e^u\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e^1-e^0) = \frac{e-1}{2}$$

(b) Para se revolver a integral $\iint_D (x+y)^{20}(x-y)\ dx\,dy$, deve-se fazer uma mudança de variáveis tal que $u = x + y$ e $v = x - y$, ou seja:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \\ \\ y = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v \end{cases}$$

cujo Jacobiano é dado por

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Através dessa mudança, chega-se em:

$$\iint_D (x+y)^{20}(x-y)\ dx\,dy = \iint_{Duv} u^{20}v \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

Então, para que a integral dupla acima possa ser calculada, basta determinar o domínio de integração no plano uv.

Do enunciado, sabe-se que o domínio de integração D no plano xy corresponde ao triângulo de vértices (0,0), ($\frac{1}{2}$,$\frac{1}{2}$) e ($\frac{1}{2}$,-$\frac{1}{2}$).

Assim, a região D é limitada pelas retas $y = x$, $y = -x$ e $x = \frac{1}{2}$, ou seja, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\ e\ -x \leq y \leq x\}$, como se pode ver na figura 2:

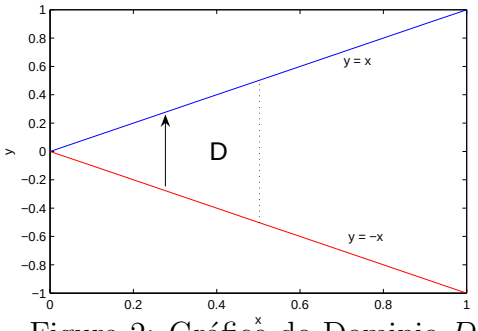

Figura 2: Gráfico do Dominio D

Agora, nas variáveis u e v, essas retas satisfazem

$$\begin{cases} y = x \Leftrightarrow v = 0 \\ y = -x \Leftrightarrow u = 0 \\ x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow u + v = 1 \end{cases}$$

Portanto, o domínio de integração no plano uv é $D_{uv} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1\ e\ 0 \leq v \leq 1-u\}$ e, com a aplicação do Teorema de Fubini, o cálculo da integral dupla resume-se a:

$$\begin{aligned}
\iint_D (x+y)^{20}(x-y)\ dx\,dy &= \iint_{Duv} u^{20} v \frac{1}{2}\ du\,dv = \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(\int_0^{1-u} u^{20} v\ dv\Big)\ du = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 u^{20}.\frac{v^2}{2}\Big|_0^{1-v}\ du = \frac{1}{4}\int_0^1 u^{20}(1-2u-u^2)\ du = \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 (u^{20}-2u^{21}+u^{22})du = \frac{1}{4}\Big(\frac{u^{21}}{21}-\frac{2u^{22}}{22}+\frac{u^{23}}{23}\Big)_0^1 = \\
&= \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{21}-\frac{1}{11}+\frac{1}{23}\Big) = \frac{1}{4.5313} = \frac{1}{21252}
\end{aligned}$$

Questão 2. (3.0 pontos) Calcule a massa do sólido de densidade $\delta(x,y,z) = z$ limitado pelas superfícies de equações $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$, $z = 0$ e $z = 4 - 2x^2 - y^2$.

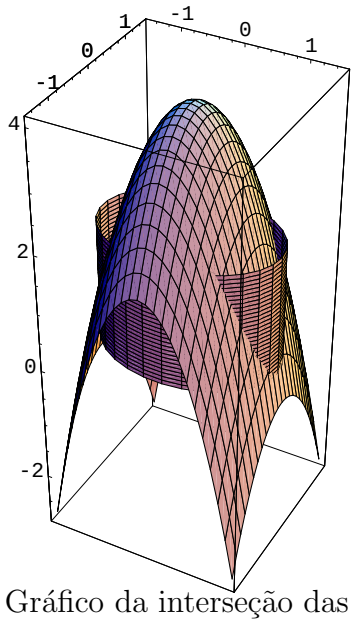

Figura 3: Gráfico da interseção das superfícies

Solução: A massa M pedida é dada por $M = \iiint_S z\ dx\,dy\,dz$, onde S, , é a região abaixo do parabolóide elíptico $z = 4 - 2x^2 - y^2$, acima do plano $z = 0$ e contido pelo cilindro elíptico $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$, ou seja, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 4 - 2x^2 - y^2\ e\ x^2 + \frac{y^2}{2} \le 1\}$, como pode ser visto no gráfico acima.

Como $f(x,y,z) = z$ é contínua em $\mathbb{R}^3$, para se obter a massa pedida, pode-se aplicar o Teorema de Fubini e transformar a integral tripla em uma integral iterada da forma:

$$M = \iiint_S z\,dxdydz = \iint_D \Big(\int_0^{4-2x^2-y^2} zdz\Big)\ dxdy = \iint_D \frac{(4-2x^2-y^2)^2}{2}\ dxdy$$

onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{2} \le 1\}$.

Para se calcular a integral dupla acima, usa-se as coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = x(r,\theta) = r\cos\theta \\ y = y(r,\theta) = \sqrt{2}\, r\ \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

cujo Jacobiano é dado por

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sqrt{2}\ \operatorname{sen}\theta \\ r\sin\theta & \sqrt{2}\, r\cos\theta \end{vmatrix} = \sqrt{2}\, r\cos^2\theta + \sqrt{2}\, r\ \operatorname{sen}^2\theta = \sqrt{2}r.$$

Então $D_{rtheta} = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta \leq 2\pi\ e\ 0 \leq r \leq 1\}$ E com o uso do Teorema de Fubini, tem-se

$$\begin{aligned} M &= \iint_D \frac{(4-2x^2-y^2)^2}{2}\ dxdy = \iint_{D_{r\theta}} \frac{(4-2r^2)^2}{2}\sqrt{2}\, r\ dxdy = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}.2\pi\int_0^1 (4-2r^2)^2 r dr = \sqrt{2}\pi\Big(-\frac{(4-2r^2)^3}{4.3}\Big)_0^1 = \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{12}(-8+64) = \frac{14\sqrt{2}\pi}{3} \end{aligned}$$

Questão 3. (3.0 pontos) Seja S o sólido obtido removendo-se, do interior de uma esfera sólida de raio a, uma esfera sólida de raio b, com $2b < a$, e cuja superfície passa pelo centro da primeira esfera (veja a figura abaixo). Supondo que a densidade de S é constante e igual a 1, calcule o momento de inércia de S em relação ao eixo que passa pelos dois centros. Lembre que o momento de inércia de S em relação a um eixo é a integral sobre S da densidade multiplicada pelo quadrado da distância dos pontos de S ao eixo.

Solução: Considere que o eixo que passa pelos dois centros é o eixo z e que o centro da esfera maior coincide com a origem do sistema de coordenadas xyz. Dessa forma, nessas coordenadas, a equação da esfera S_1 de centro $(0,0,0)$ e raio a é $x^2+y^2+z^2 = a^2$ e a equação da esfera S_2 de centro $(0,0,b)$ e raio b é $x^2+y^2+(z-b)^2 = b^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 = 2b$.

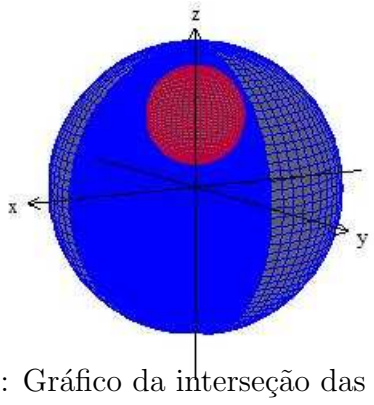

Figura 4: Gráfico da interseção das superfícies

E, do enunciado, tem-se que o momento de inércia de S é dado por $I = \iiint_S (x^2+y^2)\ dxdydz$. Agora, como $S_1 = S \cup S_2$ (Princípio da Superposição), o mo-

mento de inércia I pode ser calculado através de

$$I = \underbrace{\iiint_{S_1} (x^2+y^2)\ dxdydz}_{I_1} - \underbrace{\iiint_{S_2} (x^2+y^2)\ dxdydz}_{I_2}$$

O cálculo das integrais I_1 e I_2 fica facilitado pelo uso de coordenadas esféricas, que são obtidas pela transformação

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\ \operatorname{sen}\varphi \\ y = \rho\ \operatorname{sen}\theta\ \operatorname{sen}\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

cujo Jacobiano é $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \rho^2\ \operatorname{sen}\varphi$.

Nessas coordenadas esféricas, a esfera S_1 é descrita por $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \varphi \le \pi$ e $0 \le \rho \le a$ e a integral I_1 fica:

$$\begin{aligned} I_1 &= \iiint_{S_1} (x^2+y^2)\ dxdydz = \iiint_{S_1} \rho^2\ \operatorname{sen}^2\varphi.\rho^2\ \operatorname{sen}\varphi\ d\rho d\theta d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \rho^4\ \operatorname{sen}^3\varphi\ d\rho d\theta d\varphi = 2\pi\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\varphi\ d\varphi\ .\ \int_0^{a} \rho^4\ d\rho \\ &= 2\pi\Big(-\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3}\Big)_0^{\pi}\ .\ \Big(\frac{\rho^5}{5}\Big)_0^{a} = \frac{8\pi}{15}a^5 \end{aligned}$$

E, para a esfera S_2, os intervalos de integração são $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$ e $0 \le \rho \le 2b\cos\varphi$ e a respectiva integral fica:

$$\begin{aligned} I_2 &= \iiint_{S_2} (x^2+y^2)\ dxdydz = \iiint_{S_2} \rho^2\ \operatorname{sen}^2\varphi.\rho^2 \sin\varphi\ d\rho d\theta d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2b\cos\varphi} \rho^4\ \operatorname{sen}^3\varphi\ d\rho d\theta d\varphi = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3\varphi \frac{(2b\cos\varphi)^5}{5}\ d\varphi = \\ &= \frac{64\pi}{5}b^5\int_0^1 \operatorname{sen}^3\varphi\cos^5\varphi\ d\varphi = \frac{64\pi}{5}b^5\int_0^1 (\cos^5\varphi - \cos^7\varphi)\sin\varphi\ d\varphi = \\ &= \frac{64\pi}{5}b^5\Big(-\frac{\cos^6\varphi}{6} + \frac{\cos^8\varphi}{8}\Big)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{64\pi}{5}b^5\Big(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\Big) = \frac{8\pi}{15}b^5 \end{aligned}$$

Portanto, $I = I_1 - I_2 = \dfrac{8\pi}{15}(a^5 - b^5)$.