MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
1ª Prova - 1o semestre de 2004

Questão 1. Calcule:

(a) (1,5 ponto) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_{x^2}^{\pi^2} x \ \operatorname{sen}\left(\frac{y^2}{2}\right)\, dy\, dx$

(b) (2,0 pontos) $\displaystyle\iint_D x\ dx\, dy$, onde D é a região limitada por $x = 2y - y^2$ e por $x = y^2 - 4$.

Solução:

(a) Como $f(x,y) = x \ \operatorname{sen}(\frac{y^2}{2})$ é uma função contínua em $\mathbb{R}^2$, pode-se aplicar o Teorema de Fubini. Mudando a ordem de integração e considerando o domínio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \pi^2 \ e \ 0 \leq x \leq \sqrt{y}\}$ (ver figura 1):

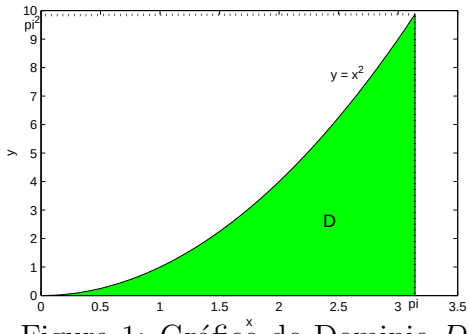

Figura 1: Gráfico do Dominio D

temos

$$\int_0^{\pi}\int_{x^2}^{\pi^2} x \operatorname{sen}\left(\frac{y^2}{2}\right) dy\, dx = \iint_D x \operatorname{sen}\left(\frac{y^2}{2}\right) dx\, dy = \int_0^{\pi^2} \frac{y}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{y^2}{2}\right) dy = \frac{-1}{2}\cos\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{\pi^2} =$$

$$\frac{\cos(0)}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi^2}{2}\right)$$

(b) Na figura 2 podemos observar a região de integração D.

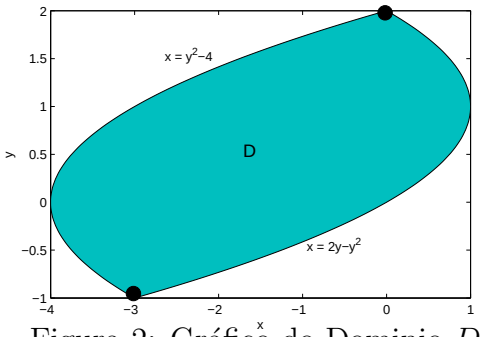

Figura 2: Gráfico do Dominio D

Precisamos encontrarmos os limites de integração no eixo y, para isso fazemos: $2y - y^2 = y^2 - 4$, segue-se que: $2y^2 - 2y - 4 = 0$ sendo às raízes da equação $y = -1$ e $y = 2$. A região de

integração é : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 2 \ e \ y^2 - 4 \leq x \leq 2y - y^2.\}$
Assim temos:

$$\iint_D x \ dx\, dy = \int_{-1}^{2} \int_{y^2-4}^{2y-y^2} x \ dy\, dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{2} x^2 \Big|_{y^2-4}^{2y-y^2} \ dy =$$

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{2} (2y - y^2)^2 - (y^2 - 4)^2 \ dy = \int_{-1}^{2} 6y^2 - 2y^3 - 8 \ dy = \frac{-27}{2}$$

Questão 2. Calcule a massa do sólido de densidade $\delta(x,y,z) = z$ situado no 1° octante e limitado pelas superfícies de equações $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 2z$ com $z \geq \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}}$.

Solução: Queremos calcular $M = \iiint_D z \ dV$ onde

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 2z, z \geq \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}} \ \right\}$$

.

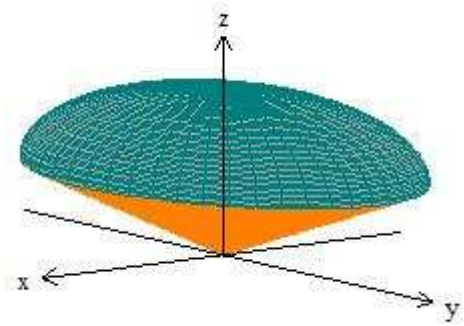

Figura 3: Gráfico do Domínio D

Para facilitar o cálculo, fazemos uso de coordenadas esféricas. Assim:

$$\begin{cases} x = 2\rho\cos(\theta) \ \text{sen}\,(\varphi) \\ y = 3\rho \ \text{sen}\,(\theta) \ \text{sen}\,(\varphi) \\ z = \rho\cos(\theta) \end{cases}$$

cujo Jacobiano é dado por

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\theta,\rho,\varphi)} = \begin{vmatrix} -2\rho \ \text{sen}\,(\theta) \ \text{sen}\,(\varphi) & 2\rho\cos(\theta) \ \text{sen}\,(\varphi) & 2\rho\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ 3\rho\cos(\theta) \ \text{sen}\,(\varphi) & 3\rho \ \text{sen}\,(\theta) \ \text{sen}\,(\varphi) & 3\rho \ \text{sen}\,(\theta)\cos(\varphi) \\ 0 & \cos(\varphi) & -\rho \ \text{sen}\,(\varphi) \end{vmatrix} = -6\rho^2 \ \text{sen}\,(\varphi),$$

Então

$$D_{\rho\theta\varphi} = \{(\rho,\theta,\varphi) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq 2\cos(\varphi)\}$$

e portanto,

$$M = \iiint_D z \ dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\cos(\varphi)} 6\rho^2 \text{ sen }(\varphi)\rho\cos(\varphi) \ d\rho \, d\varphi \, d\theta =$$

$$\frac{\pi}{2} 6 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{2\cos(\varphi)} \cos(\varphi) \text{ sen }(\varphi) \ d\varphi = 3\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\cos^5(\varphi) \text{ sen }(\varphi) \ d\varphi =$$

$$12\pi(\frac{-\cos^6(\varphi)}{6})\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\pi(-\frac{1}{8}+1) = \frac{7\pi}{4}$$

Questão 3. Obtenha o volume do sólido limitado pelas superfícies $2z^4 = x^2+y^2$ e $x^2+y^2 = 1+z^2$.

Solução:

Queremos calcular $\iiint_D 1dxdydz$ onde $D = \{(x,y,z) : 2z^4 \leq x^2+y^2, x^2+y^2 \leq 1+z^2\}$.

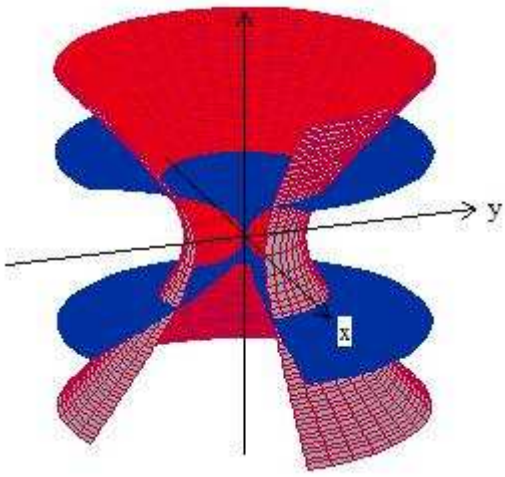

Figura 4: Gráfico do Domínio D

Primeiro acharemos os pontos de interseção na variável z:

$$\begin{cases} 2z^4 = x^2+y^2 \\ z^2+1 = x^2+y^2 \end{cases}$$

Então, $2z^4 = 1+z^2 \Rightarrow 2z^4 - z^2 - 1 = 0 \Rightarrow z^2 = 1$. Assim temos $z = 1$ e $z = -1$. Agora fazemos mudança para coordenadas cilíndricas,

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r \text{ sen }(\theta) \\ z = z, \end{cases}$$

Sendo que o Jacobiano desta transformação é r. Logo,

$$D_{r\theta z} = \{(r,\theta,z) : -1 \leq z \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \sqrt{2}z^2 \leq r \leq \sqrt{1+z^2}\}$$

Assim, o volume fica

$$V = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{2\pi} \int_{\sqrt{2}\,z^2}^{\sqrt{1+z^2}} \rho \; dr \, d\theta \, dz = 2\pi \int_{-1}^{1} \frac{r^2}{2} \Big|_{\sqrt{2}\,z^2}^{\sqrt{1+z^2}} \; dz =$$

$$2\pi \int_{-1}^{1} (\frac{1}{2} + \frac{z^2}{2} - z^4) \; dz = 2\pi(\frac{14}{15}) = \frac{28\pi}{15}$$