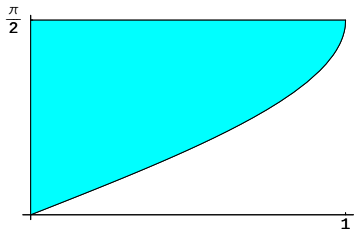
MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
1ª Prova - 25.03.2003 - Turma A

Questão 1. Calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\operatorname{arc\,sen} x}^{\pi/2} e^{\cos y}\, dy\, dx.$

Solução . Seja D a região:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \text{ e } \operatorname{arc\,sen} x \le y \le \frac{\pi}{2}\}$$



Podemos reescrever D da seguinte forma

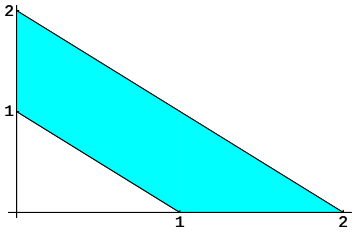
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \frac{\pi}{2} \text{ e } 0 \le x \le \operatorname{sen} y\}.$$

Como a função $h(y)e^{\cos y}$ é contínua, pelo Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{\operatorname{arc\,sen} x}^{\pi/2} e^{\cos y}\, dy\, dx &= \iint_D e^{\cos y}\, dy\, dx = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\operatorname{sen} y} dx\, dy \\
&= \int_0^{\pi/2} e^{\cos y} x \Big|_{x=0}^{\operatorname{sen} y} dy = \int_0^{\pi/2} e^{\cos y} \operatorname{sen} y\, dy \\
&= -e^{\cos y}\Big|_{y=0}^{\pi/2} = e - 1.
\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx\, dy$ onde D é a região limitada pelas retas $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1$ e $x + y = 2$.

Solução . A região D é



Faremos a seguinte mudança de variáveis: $\begin{cases} u = u(x,y) &= x - y \\ v = v(x,y) &= x + y \end{cases}$,

ou seja, $\begin{cases} x = x(u,v) &= \frac{u+v}{2} \\ y = y(u,v) &= \frac{v-u}{2} \end{cases}$

cujo Jacobiano é

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}.$$

Pelo Teorema de Mudança de Variáveis, poderemos escrever

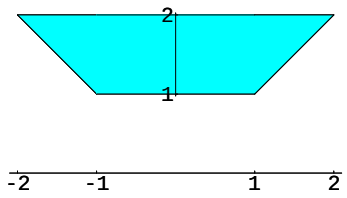
$$I = \iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\, dx\, dy = \iint_{D_{u,v}} \cos\left(\frac{u}{v}\right) |1/2|\, du\, dv.$$

Reescrevendo a região D nas coordenadas u e v:

- A reta $x+y=1$: $\frac{u+v}{2} + \frac{v-u}{2} = 1 \Rightarrow v = 1$
- A reta $x+y=2$: $\frac{u+v}{2} + \frac{v-u}{2} = 2 \Rightarrow v = 2$
- A reta $x=0$: $\frac{u+v}{2} = 0 \Rightarrow v = -u$
- A reta $y=0$: $\frac{v-u}{2} = 0 \Rightarrow v = u$

Então,

$$D_{u,v} = \{(u,v) : 1 \leq v \leq 2 \text{ e } -v \leq u \leq v\}$$

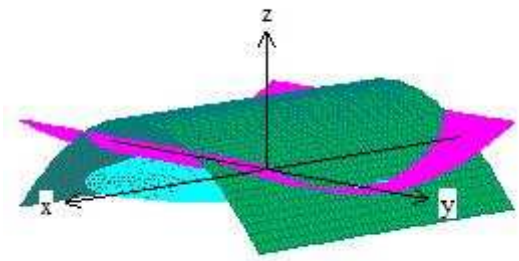


Daí,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\iint_{D_{u,v}} \cos\left(\frac{u}{v}\right)\, du\, dv = \frac{1}{2}\int_1^2 \int_{-v}^{v} \cos\left(\frac{u}{v}\right)\, du\, dv \\ &= \frac{1}{2}\int_1^2 v\text{sen}\left(\frac{u}{v}\right)\Big|_{u=-v}^{v}\, dv = \frac{1}{2}\int_1^2 v(\text{sen}\,1 - \text{sen}\,(-1))\, dv \\ &= \text{sen}\,1 \int_1^2 v\, dv = \text{sen}\,1\, \frac{v^2}{2}\Big|_{v=1} 2 = \frac{3}{2}\,\text{sen}\,1. \end{aligned}$$

Questão 2. Calcule o volume da região limitada pelas calhas $z = \frac{x^2}{9}$ e $z = 1 - \frac{y^2}{4}$.

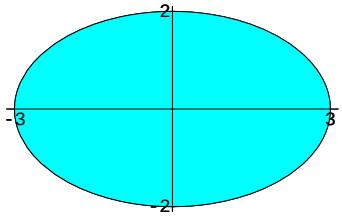
Solução . A figura abaixo mostra a região pedida "cortada" verticalmente:



Obtendo a interseção das calhas:

$$1 - \frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{4} \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

ou seja, a projeção da interseção das calhas no plano $z = 0$ é a elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$:



Seja $D = \{(x, y) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$. Note que para $(x, y) \in D$, temos $\frac{x^2}{9} \leq 1 - \frac{y^2}{4}$, podemos então, escrever a região limitada entre as calhas por

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \text{ e } \frac{x^2}{9} \leq z \leq 1 - \frac{y^2}{4}\}.$$

O volume de R é $V(R) = \iiint\limits_R 1 \; dxdydz$. Pelo Teorema de Fubini,

$$V(R) = \iint_D \left(\int_{\frac{x^2}{9}}^{1-\frac{y^2}{4}} dz \right) \; dx \; dy = \iint_D 1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} \; dx \; dy.$$

Faremos a seguinte mudança de coordenadas: $\begin{cases} x = x(r, \theta) & = & 3 \; r \cos\theta \\ y = y(r, \theta) & = & 2 \; r \; \text{sen}\,\theta \end{cases}$

cujo Jacobiano é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \det \begin{pmatrix} 3\cos\theta & -3\text{sen}\,\theta \\ 2\text{sen}\,\theta & 2r\cos\theta \end{pmatrix} = 6 \; r.$$

Então, $D_{r,\theta} = \{(r, \theta) 0 \leq r \leq 1 \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ e pelo Teorema de Mudança de Variáveis,

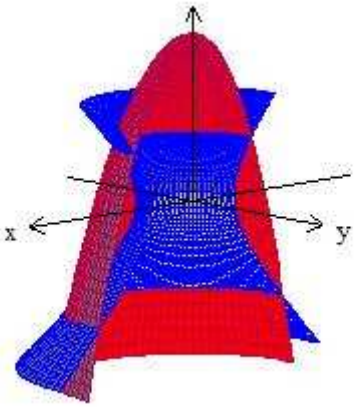
$$\begin{aligned} V(R) &= \iint_D 1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} \; dx \; dy = \iint_{D_{r,\theta}} 1 - r^2 |6r| \; dr \; d\theta \\ &= \iint_{D_{r,\theta}} 6 \; r - 6 \; r^3 \; dr \; d\theta. \end{aligned}$$

Agora, pelo Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} V(R) &= \iint_{D_{r,\theta}} 6 \; r - 6 \; r^3 \; dr \; d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 6 \; r - 6 \; r^3 \; dr \; d\theta \\ &= 2\pi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 = 3\pi. \end{aligned}$$

Questão 3. Calcule a massa da região limitada pelo hiperbolóide de uma folha $x^2 + y^2 = 1 + z^2$ e pelo parabolóide $z = 3 - x^2 - y^2$, com densidade $\delta(x, y, z) = z^2$.

Solução . A figura abaixo mostra a região R limitada pelo hiperbolóide de uma folha $x^2 + y^2 = 1 + z^2$ e pelo parabolóide $z = 3 - x^2 - y^2$, "cortada" verticalmente:



Utilizando coordenadas cilíndricas: $\begin{cases} x = x(r,\theta,z) & = & r\ \cos\theta \\ y = y(r,\theta,z) & = & r\ \operatorname{sen}\theta \\ z = z(r,\theta,z) & = & z \end{cases}$

cujo Jacobiano é

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r, \text{ teremos:}$$

- o hiperbolóide $x^2 + y^2 = 1 + z^2$:

$$r^2 = 1 + z^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{1+z^2}$$

- o parabolóide $z = 3 - x^2 - y^2$:

$$r^2 = 3 - z \Leftrightarrow r = \sqrt{3-z}$$

- a interseção:

$$\sqrt{1+z^2} = \sqrt{3-z} \Leftrightarrow z^2 + z - 2 = 0 \Leftrightarrow z = -2 \text{ ou } z = 1$$

A região R em coordenadas cilíndricas é

$$R_{r,\theta,z} = \{(r,\theta,z) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\ ,\ -2 \leq z \leq 1 \text{ e } \sqrt{1+z^2} \leq r \leq \sqrt{3-z}\}.$$

A massa é $M = \iiint\limits_R \delta(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = \iiint\limits_R z^2\ dx\ dy\ dz.$

Pelo Teorema de Mudança de Variáveis

$$M = \iiint\limits_R z^2\ dx\ dy\ dz = \iiint\limits_{R_{r,\theta,z}} z^2|r|\ dr\ d\theta\ dz = \iiint\limits_{R_{r,\theta,z}} z^2 r\ dr\ d\theta\ dz.$$

Por Fubini,

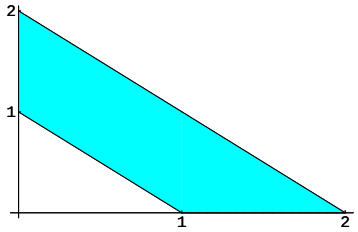
$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi}\int_{-2}^{1}\int_{\sqrt{1+z^2}}^{\sqrt{3-z}} z^2 r\ dr\ dz\ d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{-2}^{1} (z^2)\frac{r^2}{2}\Big|_{r=\sqrt{1+z^2}}^{\sqrt{3-z}}\ dz\ d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{-2}^{1} 2z^2 - z^3 - z^4\ dz\ d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{2}{3}z^3 - \frac{z^4}{4} - \frac{z^5}{5}\right)\Big|_{z=-2}^{1}\ d\theta \\ &= \frac{1}{2}2\pi\frac{63}{20} = \frac{63}{20}\pi. \end{aligned}$$

MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
1ª Prova - 25.03.2003 - Turma B

Questão 1. Calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\iint_D \operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\, dx\, dy$ onde D é a região limitada pelas retas $x=0,\ y=0,\ x+y=1$ e $x+y=2$.

Solução . A região D é



Faremos a seguinte mudança de variáveis: $\left\{\begin{array}{rcl} u &=& x-y \\ v &=& x+y \end{array}\right.$, ou seja, $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{u+v}{2} \\ y &=& \frac{v-u}{2} \end{array}\right.$ cujo Jacobiano é

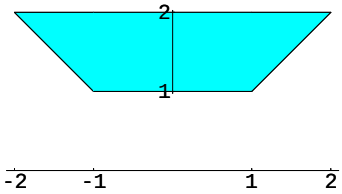
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}.$$

Pelo Teorema de mudança de variáveis, poderemos escrever

$$I = \iint_D \operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\, dx\, dy = \iint_{D_{u,v}} \operatorname{sen}\left(\frac{u}{v}\right) |1/2|\, du\, dv.$$

Reescrevendo a região D nas coordenadas u e v:

- A reta $x+y=1$:
$$\frac{u+v}{2} + \frac{v-u}{2} = 1 \Rightarrow v = 1$$
- A reta $x+y=2$:
$$\frac{u+v}{2} + \frac{v-u}{2} = 2 \Rightarrow v = 2$$
- A reta $x=0$:
$$\frac{u+v}{2} = 0 \Rightarrow v = -u$$
- A reta $y=0$:
$$\frac{v-u}{2} = 0 \Rightarrow v = u$$



Então,

$$D_{u,v} = \{(u,v) : 1 \le v \le 2 \text{ e } -v \le u \le v\}$$

Daí, como $v \neq 0$ em $D_{u,v}$, sen $\left(\frac{u}{v}\right)$ é contínua. Por Fubini,

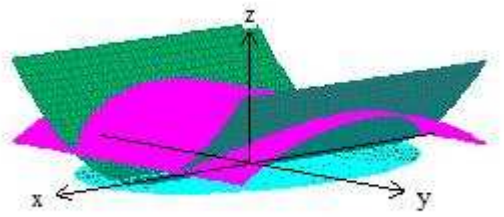
$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\iint_{D_{u,v}} \text{sen}\left(\frac{u}{v}\right)\, du\, dv = \frac{1}{2}\int_1^2 \int_{-v}^{v} \text{sen}\left(\frac{u}{v}\right)\, du\, dv \\ &= \frac{1}{2}\int_1^2 -v\cos\left(\frac{u}{v}\right)\Big|_{u=-v}^{v}\, dv = -\frac{1}{2}\int_1^2 v(\cos 1 - \cos(-1))\, dv \\ &= -\frac{1}{2}\int_1^2 0\, dv = 0. \end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\text{arc sen}\, x}^{\pi/2} e^{\cos y}\, dy\, dx.$

Solução . Ver item (b) da questão 1, da turma A.

Questão 2. Calcule o volume da região limitada pelas calhas $z = 1 - \frac{x^2}{9}$ e $z = \frac{y^2}{4}$.

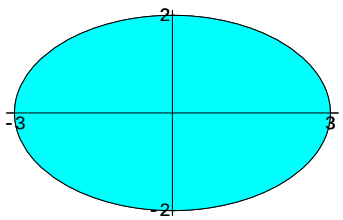
Solução . A figura abaixo mostra a região pedida "cortada" verticalmente:



Calculando a interseção das calhas:

$$1 - \frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{4} \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

ou seja, a projeção da interseção das calhas no plano $z = 0$ é a elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$:



Seja $D = \{(x, y) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$. Note que para $(x, y) \in D$, temos $\frac{y^2}{4} \leq 1 - \frac{x^2}{9}$, podemos então, escrever a região limitada entre as calhas por

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \text{ e } \frac{y^2}{4} \leq z \leq 1 - \frac{x^2}{9}\}.$$

O volume de R é $V(R) = \iiint\limits_R 1\, dxdydz$. Pelo Teorema de Fubini,

$$V(R) = \iint_D \left(\int_{\frac{y^2}{4}}^{1-\frac{x^2}{9}} dz\right)\, dx\, dy = \iint_D 1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}\, dx\, dy.$$

Faremos a seguinte mudança de coordenadas: $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 3\ r\cos\theta \\ y & = & 2\ r\ \mathrm{sen}\,\theta \end{array} \right.$ cujo Jacobiano é

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det \begin{pmatrix} 3\cos\theta & -3\mathrm{sen}\,\theta \\ 2\mathrm{sen}\,\theta & 2r\cos\theta \end{pmatrix} = 6\ r.$$

Então, $D_{r,\theta} = \{0 \leq r \leq 1 \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ e pelo Teorema de mudança de variáveis,

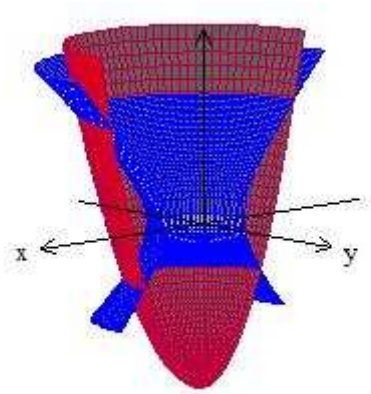
$$\begin{aligned} v(R) &= \iint_D 1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}\ dx\ dy = \iint_{D_{r,\theta}} 1 - r^2|6r|\ dr\ d\theta \\ &= \iint_{D_{r,\theta}} 6\ r - 6\ r^3\ dr\ d\theta. \end{aligned}$$

Agora, pelo Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} v(R) &= \iint_{D_{r,\theta}} 6\ r - 6\ r^3\ dr\ d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 6\ r - 6\ r^3\ dr\ d\theta \\ &= 2\pi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 = 3\pi. \end{aligned}$$

Questão 3. Calcule a massa da região limitada pelo hiperbolóide de uma folha $x^2+y^2 = 1+z^2$ e pelo parabolóide $z = x^2 + y^2 - 3$, com densidade $\delta(x,y,z) = z^2$.

Solução . A figura abaixo mostra a região R limitada pelo hiperbolóide de uma folha $x^2+y^2 = 1 + z^2$ e pelo parabolóide $z = x^2 + y^2 - 3$, "cortada" verticalmente:



Utilizando coordenadas cilíndricas: $\left\{ \begin{array}{rcl} x = x(r,\theta,z) & = & r\ \cos\theta \\ y = y(r,\theta,z) & = & r\ \mathrm{sen}\,\theta \\ z = z(r,\theta,z) & = & z \end{array} \right.$

cujo Jacobiano é

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r, \text{ teremos:}$$

- o hiperbolóide $x^2 + y^2 = 1 + z^2$:

$$r^2 = 1 + z^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{1+z^2}$$

- o parabolóide $z = x^2 + y^2 - 3$:

$$r^2 = 3 - z \Leftrightarrow r = \sqrt{z+3}$$

- a interseção:

$$\sqrt{1+z^2} = \sqrt{z+3} \Leftrightarrow z^2 - z - 2 = 0 \Leftrightarrow z = -1 \text{ ou } z = 2$$

A região R em coordenadas cilíndricas é

$$R_{r,\theta,z} = \{(r,\theta,z) : 0 \leq \theta \leq 2\pi \ , \ -1 \leq z \leq 2 \text{ e } \sqrt{1+z^2} \leq r \leq \sqrt{z+3}\}.$$

A massa é $M = \iiint\limits_R \delta(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = \iiint\limits_R z^2\ dx\ dy\ dz.$
Pelo Teorema de mudança de variáveis

$$M = \iiint\limits_R z^2\ dx\ dy\ dz = \iiint\limits_{R_{r,\theta,z}} z^2|r|\ dr\ d\theta\ dz = \iiint\limits_{R_{r,\theta,z}} z^2 r\ dr\ d\theta\ dz.$$

Por Fubini,

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{2}\int_{\sqrt{1+z^2}}^{\sqrt{z+3}} z^2 r\ dr\ dz\ d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{2} (z^2)\frac{r^2}{2}\Big|_{r=\sqrt{1+z^2}}^{\sqrt{z+3}}\ dz\ d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^{2} 2z^2 + z^3 - z^4\ dz = \pi\left(\frac{2}{3}z^3 + \frac{z^4}{4} - \frac{z^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{2} = \frac{63}{20}\pi. \end{aligned}$$