MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
1ª Prova - 04.04.2002 - Turma A

Questão 1. Calcule o volume da região R do $\mathbb{R}^3$

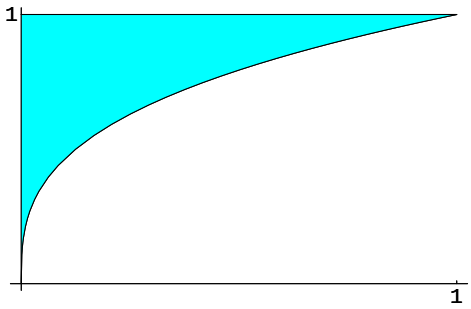
$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, \ \sqrt[3]{x} \leq y \leq 1 \text{ e } 0 \leq z \leq \operatorname{sen} y^4\}$$

Solução

O volume da região R é dado por $V(R) = \iiint_R 1 \, dx \, dy \, dz$. Pelo Teorema de Fubini, podemos escrever

$$V(R) = \iint_D \int_0^{\operatorname{sen} y^4} 1 \, dz \, dx \, dy = \iint_D \operatorname{sen} y^4 \, dx \, dy,$$

onde D é a região $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } \sqrt[3]{x} \leq y \leq 1\}$:



Podemos reescrever a região D por

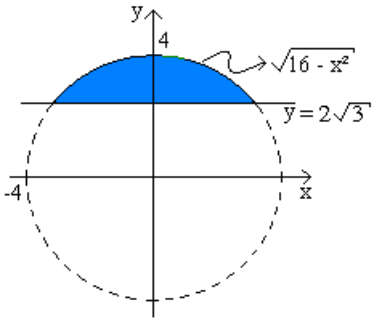
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \text{ e } 0 \leq x \leq y^3\}.$$

Como $g(y) = \operatorname{sen} y^4$ é contínua em D, novamente pelo Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} v(R) &= \iint_D \operatorname{sen} y^4 \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^{y^3} \operatorname{sen} y^4 \, dx \, dy = \int_0^1 \operatorname{sen}(y^4) \ x\Big|_{x=0}^{y^3} dy = \\ &= \int_0^1 \operatorname{sen}(y^4) \ y^3 \, dy = -\frac{1}{4}(\cos y^4)\Big|_{y=0}^{1} = -\frac{1}{4}(\cos 1 - \cos 0) = \frac{1 - \cos 1}{4}. \end{aligned}$$

Questão 2. Calcule $\displaystyle\iint_D y\ dx\,dy$ onde D é a região do plano xy interior à circunferência $x^2+y^2=16$ com $y \geq 2\sqrt{3}$.

Solução
A região D é



Solução 1
Calculando a interseção da circunferência $x^2+y^2=16$ com a reta $y=2\sqrt{3}$ teremos:

$$(2\sqrt{3})^2+x^2=16 \Leftrightarrow 12+x^2=16 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2,$$

ou seja, os pontos de interseção são $(-2,2\sqrt{3})$ e $(2,2\sqrt{3})$. Desta forma, podemos escrever a região D da seguinte forma:

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -2\leq x\leq 2 \text{ e } 2\sqrt{3}\leq y\leq\sqrt{16-x^2}\}.$$

Como a função $g(x)=\sqrt{16-x^2}$ é contínua podemos usar o Teorema de Fubini:

$$\begin{aligned}
\iint_D y\ dy\,dx &= \int_{-2}^{2}\int_{2\sqrt{3}}^{\sqrt{16-x^2}} y\ dy\,dx = \int_{-2}^{2}\frac{1}{2}y^2\Big|_{y=2\sqrt{3}}^{\sqrt{16-x^2}}\ dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} 16-x^2-12\ dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} 4-x^2\ dx \\
&= \frac{1}{2}\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=-2}^{2} = 4-\frac{8}{6}+4-\frac{8}{6}=\frac{16}{3}.
\end{aligned}$$

Solução 2
Vamos descrever a região D em cordenadas polares.

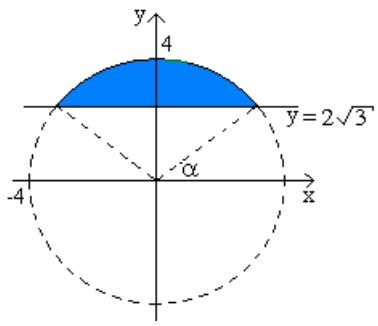
$$\begin{cases} x=x(r,\theta) &= r\cos\theta \\ y=y(r,\theta) &= r\ \mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

- Seja $\alpha\in[0,2\pi]$ o ângulo indicado na figura:

  Então, $\mathrm{sen}\,\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos\alpha=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, o que implica que $\alpha=\frac{\pi}{3}$ e portanto $\frac{\pi}{3}\leq\theta\leq\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$.

- A circunferência $x^2+y^2=16$:

$$(r\cos\theta)^2+(r\ \mathrm{sen}\,\theta)^2=16 \Rightarrow r^2=16 \overset{r\geq 0}{\Longrightarrow} r=4.$$



- A reta $y = 2\sqrt{3}$:

$$r\text{sen}\,\theta = 2\sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{2\sqrt{3}}{\text{sen}\,\theta}, \text{ pois sen}\,\theta \neq 0 \text{ para } \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right].$$

Portanto,

$$D_{r,\theta} = \{(r,\theta) : \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3} \text{ e } \frac{2\sqrt{3}}{\text{sen}\,\theta} \leq r \leq 4\}.$$

Pelo Teorema de Mudança de Variáveis,

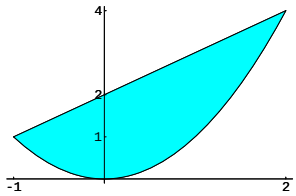
$$\iint_D x\ dx\,dy = \iint_{D_{r,\theta}} r\text{sen}\,\theta\ |r|\ dr\ d\theta = \iint_{D_{r,\theta}} r^2\text{sen}\,\theta\ dr\ d\theta$$

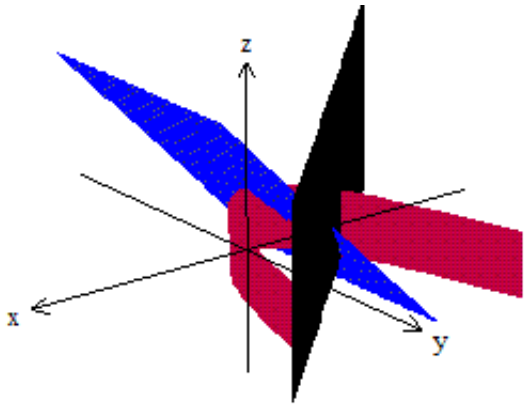
e pelo Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
\iint_{D_{r,\theta}} r^2\text{sen}\,\theta\ dr\ d\theta &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \int_{\frac{2\sqrt{3}}{\text{sen}\,\theta}}^{4} r^2\text{sen}\,\theta\ dr\ d\theta = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{3}\text{sen}\,\theta\ r^3\Big|_{r=\frac{2\sqrt{3}}{\text{sen}\,\theta}}^{4}\ d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(64\text{sen}\,\theta - \frac{24\sqrt{3}}{\text{sen}^3\theta}\text{sen}\,\theta\right)\ d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} 64\text{sen}\,\theta\ d\theta - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} 8\sqrt{3}\text{cosec}^2\theta\ d\theta \\
&= -\frac{64}{3}\cos\theta\Big|_{\theta=\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} - 8\sqrt{3}\text{cotan}\ \theta\Big|_{\theta=\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{16}{3}.
\end{aligned}$$

Questão 3. Calcular $\displaystyle\iiint_R x\ dx\ dy\ dz$, onde R é a região de $\mathbb{R}^3$ limitada pelas seguintes superfícies: $y = x^2$; $z = 0$; $y = x + 2$ e $z = x + 1$.

Solução
A região R é $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \text{ e } 0 \leq z \leq x + 1\}$ onde $D = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq x + 2\}$





Calculando os pontos de interseção da reta $y = x + 2$ com a parábola $y = x^2$ temos

$$x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 2,$$

ou seja os pontos de interseção são $(-1, 1)$ e $(2, 4)$.

Podemos reescrever D como

$$D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 2 \text{ e } x^2 \leq y \leq x + 2\}.$$

Como a função "x"é contínua, pelo Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
\iiint_R x\ dx\ dy\ dz &= \iint_D \left(\int_0^{x+1} x\ dz \right)\ dx\ dy = \iint_D xz\Big|_{z=0}^{x+1}\ dx\ dy \\
&= \iint_D x(x+1)\ dx\ dy = \iint_D x^2 + x\ dx\ dy.
\end{aligned}$$

Novamente por Fubini,

$$\begin{aligned}
\iint_D x^2 + x\ dx\ dy &= \int_{-1}^{2} \int_{x^2}^{x+2}\ dy\ dx = \int_{-1}^{2} (x^2 + x)y\Big|_{y=x^2}^{x+2}\ dx \\
&= \int_{-1}^{2} (x^2 + x)(x + 2 - x^2)\ dx = \int_{-1}^{2} 2x + 3x^2 - x^4\ dx \\
&= \left(x^2 + x^3 - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{x=-1}^{2} = \frac{27}{5}.
\end{aligned}$$

MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
1ª Prova - 04.04.2002 - Turma B

Questão 1 Calcule o volume da região R do $\mathbb{R}^3$

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, \ \sqrt[3]{x} \leq z \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq \operatorname{sen} z^4\}$$

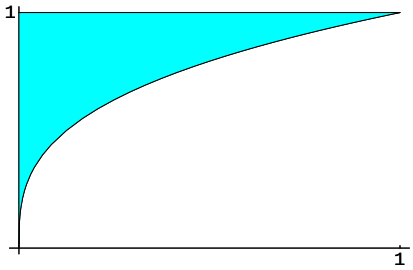
Solução

O volume da região R é dado por $V(R) = \displaystyle\iiint_R 1 \, dx \, dy \, dz$.

Pelo Teorema de Fubini, podemos escrever

$$V(R) = \iint_D \int_0^{\operatorname{sen} z^4} 1 \, dz \, dx \, dy = \iint_D \operatorname{sen} z^4 \, dx \, dz,$$

onde D é a região $D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } \sqrt[3]{x} \leq z \leq 1\}$:



Podemos reescrever a região D por

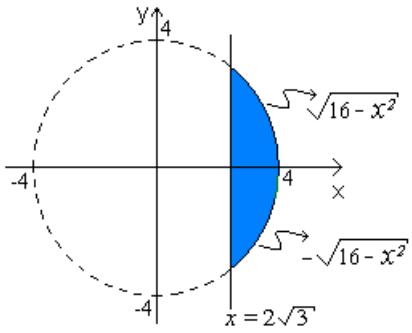
$$D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq z \leq 1 \text{ e } 0 \leq x \leq z^3\}.$$

Como $g(z) = \operatorname{sen} z^4$ é contínua em D, novamente pelo Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} v(R) &= \iint_D \operatorname{sen} z^4 \, dx \, dz = \int_0^1 \int_0^{z^3} \operatorname{sen} z^4 \, dx \, dz = \int_0^1 \operatorname{sen}(z^4) \ x\Big|_{x=0}^{z^3} dz = \\ &= \int_0^1 \operatorname{sen}(z^4) \ z^3 \, dy = -\frac{1}{4}(\cos z^4)\Big|_{z=0}^{1} = -\frac{1}{4}(\cos 1 - \cos 0) = \frac{1 - \cos 1}{4}. \end{aligned}$$

Questão 2 Calcule $\displaystyle\iint_D x\ dx\,dy$ onde D é a região do plano xy interior à circunferência $x^2+y^2=16$ com $x \geq 2\sqrt{3}$. **Solução**

A região D é



e como a função x é contínua podemos usar o Teorema de Fubini.

Solução 1

Como $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2\sqrt{3}\leq x\leq 4 \text{ e } -\sqrt{16-x^2}\leq y\leq\sqrt{16-x^2}\}$, por Fubini,

$$\begin{aligned}
\iint_D x\ dx\,dy &= \int_{2\sqrt{3}}^{4}\int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} x\ dy\,dx = \int_{2\sqrt{3}}^{4} xy\Big|_{y=-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} dx \\
&= \int_{2\sqrt{3}}^{4} 2x\sqrt{16-x^2}\,dx = -\frac{2}{3}(\sqrt{16-x^2})^3\Big|_{x=2\sqrt{3}}^{4} \\
&= 0+\frac{2}{3}(\sqrt{16-12})^3 = \frac{16}{3}.
\end{aligned}$$

Solução 2

Calculando a interseção da circunferência $x^2+y^2=16$ com a reta $x=2\sqrt{3}$ teremos:

$$(2\sqrt{3})^2+y^2=16 \Leftrightarrow 12+y^2=16 \Leftrightarrow y^2=4 \Leftrightarrow y=\pm 2,$$

ou seja, os pontos de interseção são $(2\sqrt{3},-2)$ e $(2\sqrt{3},2)$. Desta forma, podemos escrever a região D da seguinte forma:

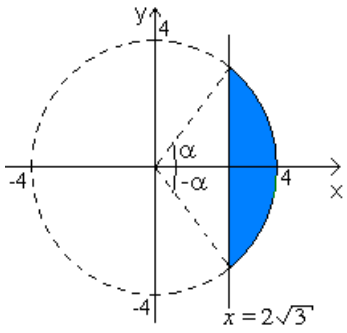
$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -2\leq y\leq 2 \text{ e } 2\sqrt{3}\leq x\leq\sqrt{16-y^2}\}.$$

Por Fubini,

$$\begin{aligned}
\iint_D x\ dx\,dy &= \int_{-2}^{2}\int_{2\sqrt{3}}^{\sqrt{16-y^2}} x\ dx\,dy = \int_{-2}^{2}\frac{1}{2}x^2\Big|_{x=2\sqrt{3}}^{\sqrt{16-y^2}}\ dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} 16-y^2-12\ dy = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} 4-y^2\ dy \\
&= \frac{1}{2}\left(4y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=-2}^{2} = 4-\frac{8}{6}+4-\frac{8}{6} = \frac{16}{3}.
\end{aligned}$$

Solução 3

descrevendo D em cordenadas polares: $\left\{\begin{array}{lcl} x=x(r,\theta) & = & r\cos\theta \\ y=y(r.\theta) & = & r\ \mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right.$:



- Seja $\alpha \in [0, 2\pi]$ o ângulo indicado na figura:

  Então, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, o que implica que $\alpha = \frac{\pi}{6}$ e portanto $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$.

- A circunferência $x^2 + y^2 = 16$:

$$(r\cos\theta)^2 + (r\ \operatorname{sen}\theta)^2 = 16 \Rightarrow r^2 = 16 \overset{r\geq 0}{\Longrightarrow} r = 4.$$

- A reta $x = 2\sqrt{3}$:

$$r\cos\theta = 2\sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{2\sqrt{3}}{\cos\theta}, \text{ pois } \cos\theta \neq 0 \text{ para } \theta \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}].$$

Portanto,

$$D_{r,\theta} = \{(r,\theta) : -\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \text{ e } \frac{2\sqrt{3}}{\cos\theta} \leq r \leq 4\}.$$

Pelo Teorema de Mudança de Variáveis,

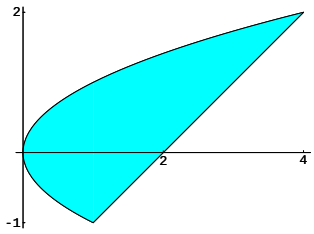
$$\iint_D x\ dx\, dy = \iint_{D_{r,\theta}} r\cos\theta\ |r|\ dr\ d\theta = \iint_{D_{r,\theta}} r^2\cos\theta\ dr\ d\theta$$

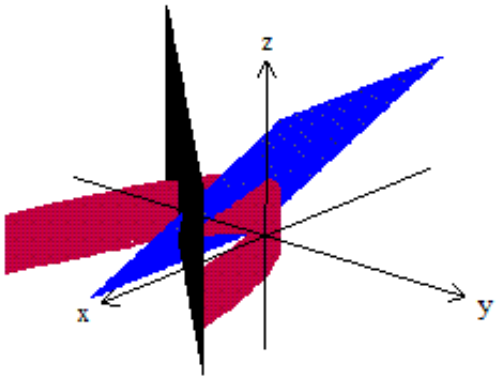
e pelo Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
\iint_{D_{r,\theta}} r^2\cos\theta\ dr\ d\theta &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \int_{\frac{2\sqrt{3}}{\cos\theta}}^{4} r^2\cos\theta\ dr\ d\theta = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{3}\cos\theta\ r^3\Big|_{r=\frac{2\sqrt{3}}{\cos\theta}}^{4}\ d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left(64\cos\theta - \frac{24\sqrt{3}}{\cos^3\theta}\cos\theta\right)\ d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{64}{3}\cos\theta\ d\theta - \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 8\sqrt{3}\sec^2\theta\ d\theta \\
&= \frac{64}{3}\operatorname{sen}\theta\Big|_{\theta=-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} - 8\sqrt{3}\tan\theta\Big|_{\theta=-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{16}{3}.
\end{aligned}$$

Questão 3 Calcular $\iiint\limits_R y\ dx\ dy\ dz$, onde R é a região de $\mathbb{R}^3$ limitada pelas seguintes superfícies: $x = y^2$; $z = 0$; $x = y + 2$ e $z = y + 1$.

Solução
A região R é $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \text{ e } 0 \leq z \leq y{+}1\}$ onde $D = \{(x, y) : y^2 \leq x \leq y{+}2\}$





Calculando os pontos de interseção da reta $x = y + 2$ com a parábola $x = y^2$ temos

$$y^2 = y + 2 \Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } y = 2,$$

ou seja os pontos de interseção são $(1, -1)$ e $(4, 2)$.

Podemos reescrever D como

$$D = \{(x, y) : -1 \leq y \leq 2 \text{ e } y^2 \leq x \leq y + 2\}.$$

Como a função "y"é contínua, pelo Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_R y\ dx\ dy\ dz &= \iint_D \left(\int_0^{y+1} y\ dz\right)\ dx\ dy = \iint_D yz\Big|_{z=0}^{y+1}\ dx\ dy \\
&= \iint_D y(y+1)\ dx\ dy = \iint_D y^2 + y\ dx\ dy.
\end{aligned}$$

Novamente por Fubini,

$$\begin{aligned}
\iint_D y^2 + y\ dx\ dy &= \int_{-1}^{2}\int_{y^2}^{y+2}\ dx\ dy = \int_{-1}^{2} (y^2 + y)x\Big|_{x=y^2}^{y+2}\ dy \\
&= \int_{-1}^{2} (y^2 + y)(y + 2 - y^2)\ dy = \int_{-1}^{2} 2y + 3y^2 - y^4\ dy \\
&= \left(y^2 + y^3 - \frac{y^5}{5}\right)\Big|_{y=-1}^{2} = \frac{27}{5}.
\end{aligned}$$