MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
1ª Prova - 29.03.2001 - Turma A

Questão 1. Calcule as seguintes integrais:

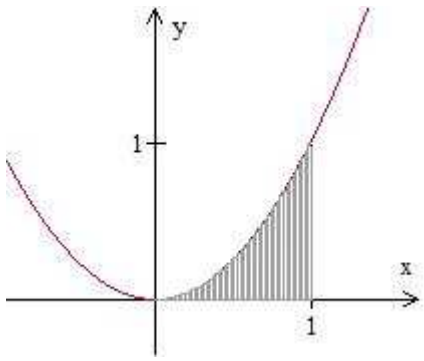
a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1}\, dxdy$

b) $\displaystyle\int\int_D x\, dxdy$, onde D é a região do plano limitada pelas curvas $y^2 = x+2$ e $y-x+4=0$.

Solução

a) A região de integração é descrita pelas condições $\sqrt{y} \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$. Vamos a aplicar o teorema de Fubini, invertendo a ordem de integração podemos reescrever a região como

$$0 \leq y \leq x^2 \ , \ 0 \leq x \leq 1.$$



Logo, a integral fica:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1} dxdy &= \int_0^1 \int_0^{x^2} \sqrt{x^3+1} dydx \\ &= \int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}\, dx = \frac{2}{3}(x^3+1)^{3/2}\frac{1}{3}|_0^1 = \frac{2}{9}(2^{3/2}-1) = \frac{2}{9}(2\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$

b) Sejam P e Q os pontos de interseção das curvas $y^2 = x+2$ e $x = y+4$. Então, $y^2 - y - 6 = 0$ e

$$y = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1+24}) = \frac{1}{2}(1 \pm 5) = 3 \text{ ou } -2.$$

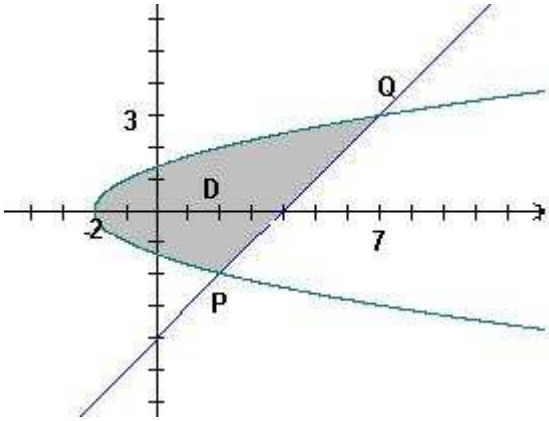
Portanto, $P = (2,-2)$ e $Q = (7,3)$. Assim, D pode ser escrita na forma

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq y \leq 3 \text{ e } y^2 - 2 \leq x \leq y+4\}.$$

Logo,usando o teorema de Fubini obtemos

$$\int\int_D x\, dxdy = \int_{-2}^3 dy \int_{y^2-2}^{y+4} x\, dx = \int_{-2}^3 \left(\frac{x^2}{2}|_{y^2-2}^{y+4}\right) dy$$

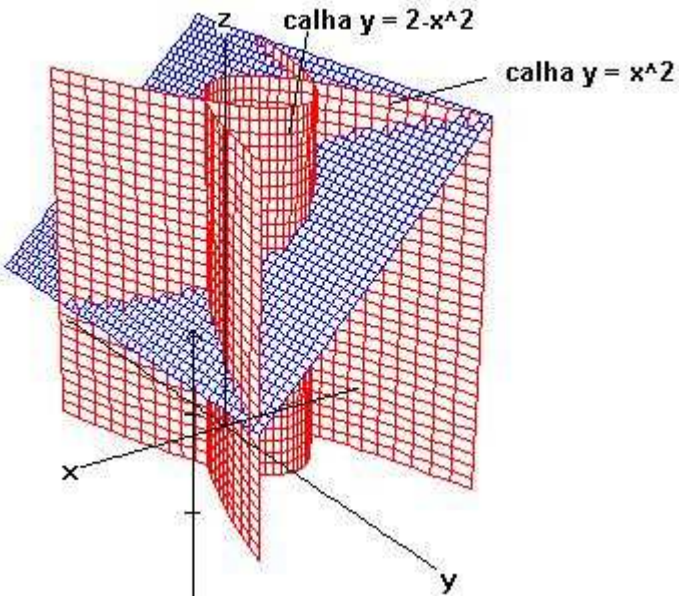
$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^3 (5y^2+8y+12-y^4)dy = \frac{1}{2}\left(\frac{5y^3}{3}+4y^2+12y-\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_{-2}^3 = \frac{125}{3}.$$



Questão 2. Calcule o volume do sólido S descrito por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 \leq y \leq 2 - x^2, z \geq 0 \ e \ x + z \leq 4\}$$

Solução Note-se que S é a região compreendida entre os cilindros parabólicos (ou calhas) $y = x^2$ e $y = 2 - x^2$, limitada inferiormente pelo plano $z = 0$ e superiormente pelo plano $z = 4 - x$ (ou $x + z = 4$).

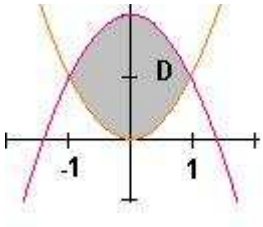


A interseção entre as calhas dá-se em: $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $y = x^2$ e $y = 2 - x^2$, isto é, para $x^2 = 2 - x^2$, assim $x = \mp 1$.

Logo, pelo teorema de Fubini temos,

$$V(S) = \int\int\int_S 1 dxdydz = \int\int_D \left(\int_0^{4-x} dz\right) dxdy$$

onde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$.

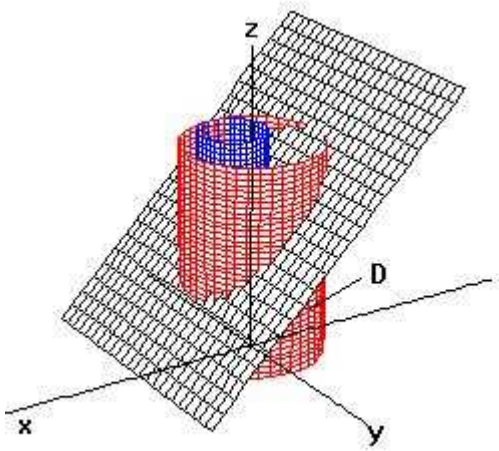


Portanto

$$\begin{aligned} V(S) &= \int\int_D (4-x)dxdy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2}^{2-x^2}(4-x)dy\right)dx = \int_{-1}^{1}(4-x)(2-2x^2)dx \\ &= 2\int_{-1}^{1} 4(1-x^2)+(x^3-x)dx = 16\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx + 0 = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

Questão 3. Seja D a região do espaço $\mathbb{R}^3$ interior ao cilindro $x^2+y^2=a^2$ e exterior ao cilindro $x^2+y^2+ay=0$, compreendida entre os planos $z=0$ e $x+z=b$, onde $b>a>0$. Calcule $\int\int\int_D y\,dxdydz$.

Solução:



Seja D' o traço de D no plano xy. D' é a região entre duas circunferências de equações $x^2+y^2=a^2$ e $x^2+(y+\frac{a}{2})^2=(\frac{a}{2})^2$, e portanto

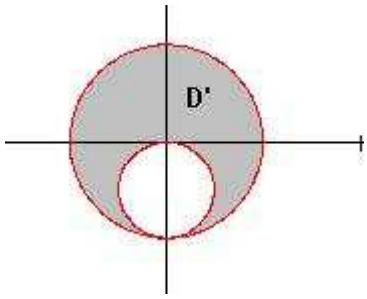
$$D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in D' \text{ e } 0\le z\le b-x\},$$

onde

$$D' = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le a^2 \text{ e } x^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2 \ge \left(\frac{a}{2}\right)^2\right\}.$$

Pelo Teorema de Fubini, temos

$$I = \int\int\int_D y\,dxdydz = \int\int_{D'}\left[\int_0^{b-x} y\,dz\right]dxdy = \int_{D'} y(b-x)\,dxdy = b\int\int_{D'} y\,dxdy.$$



(a segunda integral é *zero*, pois xy é *ímpar* com relação a x e a região D' é simétrica com relação ao eixo-y.) Logo,

$$I = b\left(\int\int_{x^2+y^2\leq a^2} y\,dxdy - \int\int_{x^2+(y+a/2)^2\leq(a/2)^2} y\,dxdy\right) =^{(*)} -b\int\int_{x^2+(y+a/2)^2\leq(a/2)^2} y\,dxdy$$

$$=^{(**)} -b\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a/2} (-\frac{a}{2}+\rho\sin\theta)\rho\,d\rho - b\int_0^{2\pi}\left[\left(-\frac{a\rho^2}{4}+\frac{\rho^3}{3}\sin\theta\right)\Big|_0^{a/2}\right]d\theta$$

$$= -b\int_0^{2\pi}\left(-\frac{a^3}{16}+\frac{a^3}{24}\sin\theta\right)d\theta = \frac{\pi a^3 b}{8}.$$

(*) A primeira integral é zero pela mesma razão anterior.
(**) coordenadas polares: $x = \rho\cos\theta$, $y = -\frac{a}{2}+\rho\sin\theta$, com $0\leq\theta\leq 2\pi$ e $0\leq\rho\leq\frac{a}{2}$.

MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
1ª Prova - 29.03.2001 - Turma B

Questão 1. Calcule as seguintes integrais:

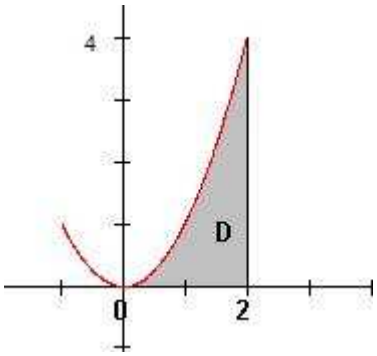
a) $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3}\, dxdy$

b) $\displaystyle\int\int_D x\, dxdy$, onde D é a região do plano limitada pelas curvas $y^2 = x+1$ e $x-2y-2=0$.

Solução

a) A região de integração é descrita pelas condições $\sqrt{y} \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq 4$. Vamos a aplicar o teorema de Fubini, invirtindo a ordem de integração podemos reescrever a região como

$$0 \leq y \leq x^2 \ , \ 0 \leq x \leq 2.$$

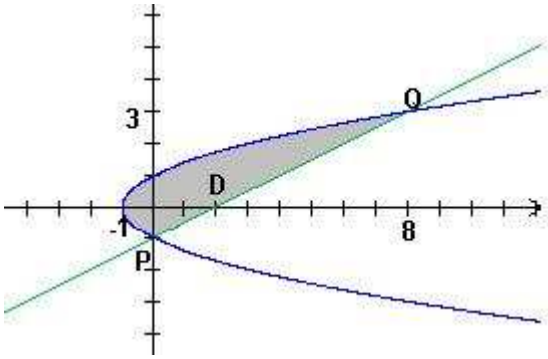


Logo, a integral fica:

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3}\, dxdy = \int_0^2 \int_0^{x^2} e^{x^3}\, dydx = \int_0^2 x^2 e^{x^3}\, dx$$
$$= \frac{1}{3} e^{x^3}|_0^2 = \frac{1}{3}(e^8 - 1).$$

b)Sejam P e Q os pontos de interseção das curvas $y^2 = x+1$ e $x = 2y+2$. Então, $y^2 - 2y - 3 = 0$ e

$$y = \frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{4+12}) = \frac{1}{2}(1 \pm 4) = 3 \text{ ou } -1.$$



Portanto, $P = (0, -1)$ e $Q = (8, 3)$. Assim, D pode ser escrita na forma

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 3 \text{ e } y^2 - 1 \leq x \leq 2y + 2\}.$$

Logo, usando o teorema de Fubini obtemos

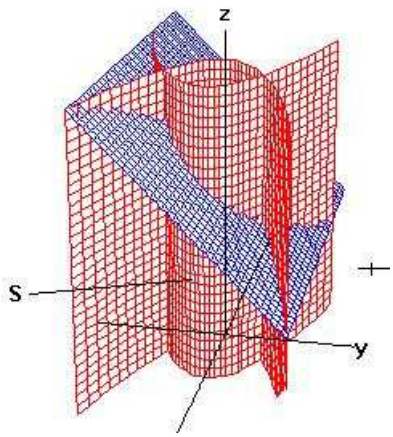
$$\int\int_D x\,dxdy = \int_{-1}^{3} dy \int_{y^2-1}^{2y+2} x\,dx = \int_{-1}^{3} \left(\frac{x^2}{2}\Big|_{y^2-1}^{2y+2} \right) dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{3} (6y^2 + 8y - y^4 + 3)dy$$

$$= \frac{1}{2}\left(2y^3 + 4y^2 - \frac{y^5}{5} + 3y\right)\Big|_{-1}^{3} = \frac{128}{5}.$$

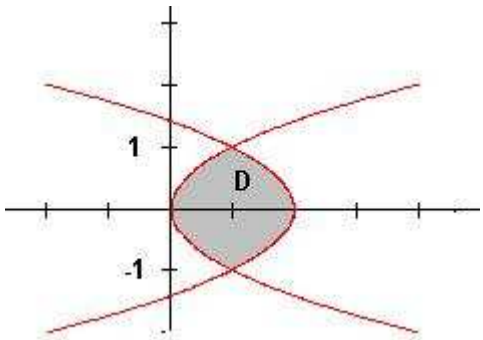
Questão 2. Calcule o volume do solido S descrito por

$$S = \{(x, y, z) \in R^3 : y^2 \leq x \leq 2 - y^2, z \geq 0 \ e \ y + z \leq 4\}$$

Solução Note-se que S é a região compreendida entre os cilindros parabólicos (ou calhas) $x = y^2$ e $x = 2 - y^2$, limitada inferiormente pelo plano $z = 0$ e superiormente pelo plano $z = 4 - y$ (ou $y + z = 4$).



A interseção entre as calhas dá-se em: $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $x = y^2$ e $x = 2 - y^2$, isto é para $y^2 = 2 - y^2$, assim $y = \mp 1$.



Logo, pelo teorema de Fubini temos,

$$V(S) = \int\int\int_S 1dxdydz = \int\int_D \left(\int_0^{4-y} dz\right) dxdy$$

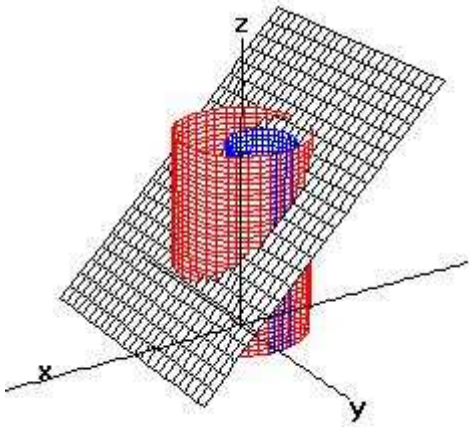
onde $D = \{(x, y) \in R^2 : -1 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq 2 - y^2\}$.

Portanto

$$V(S) = \int\int_D (4-y)dxdy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{y^2}^{2-y^2} (4-y)dx\right) dy = \int_{-1}^{1} (4-y)(2-2y^2)dx = \frac{32}{3}$$

Questão 3 . Seja D a região do espaço $\mathbb{R}^3$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ e exterior ao cilindro $x^2 + y^2 - ay = 0$, compreendida entre os planos $z = 0$ e $x + z = b$, onde $b > a > 0$. Calcule $\int\int\int_D y\, dxdydz$.

Solução:



Seja D' o traço de D no plano xy. D' é a região entre duas circunferências de equações $x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + (y - \frac{a}{2})^2 = (\frac{a}{2})^2$, e portanto

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D' \text{ e } 0 \leq z \leq b - x\},$$

onde

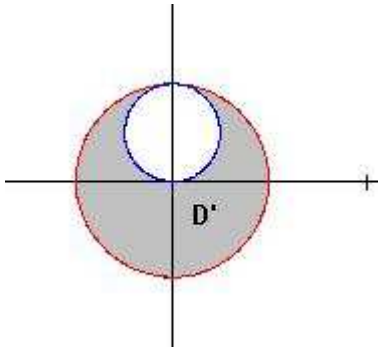
$$D' = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2 \text{ e } x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{a}{2}\right)^2\right\}.$$

Pelo Teorema de Fubini, temos

$$I = \int\int\int_D y\, dxdydz = \int\int_{D'} \left[\int_0^{b-x} y\, dz\right] dxdy = \int_{D'} y(b-x)\, dxdy = b\int\int_{D'} y\, dxdy.$$

(a segunda integral é *zero*, pois xy é *ímpar* com relação a x e a região D' é simétrica com relação ao eixo-y.) Logo,

$$I = b\left(\int\int_{x^2+y^2\leq a^2} y\, dxdy - \int\int_{x^2+(y-a/2)^2\leq(a/2)^2} y\, dxdy\right) =^{(*)} -b\int\int_{x^2+(y-a/2)^2\leq(a/2)^2} y\, dxdy$$



$$=^{(**)} -b\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a/2} \left(\frac{a}{2} + \rho\sin\theta\right)\rho\, d\rho = -b\int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{a\rho^2}{4} + \frac{\rho^3}{3}\sin\theta\right)\Bigg|_0^{a/2}\right] d\theta$$

$$= -b\int_0^{2\pi} \left(\frac{a^3}{16} + \frac{a^3}{24}\sin\theta\right) d\theta = -\frac{\pi a^3 b}{8}.$$

(*) A primeira integral é zero pela mesma razão anterior.
(**) coordenadas polares: $x = \rho\cos\theta$, $y = \frac{a}{2} + \rho\sin\theta$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \rho \leq \frac{a}{2}$.