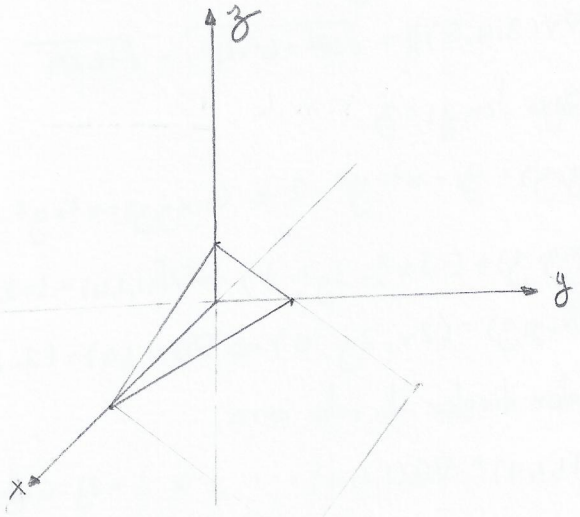
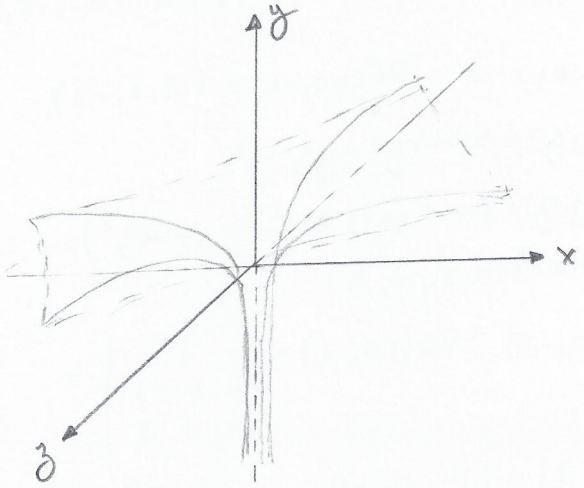
Lista 3 — Paulo Akira 2016.2

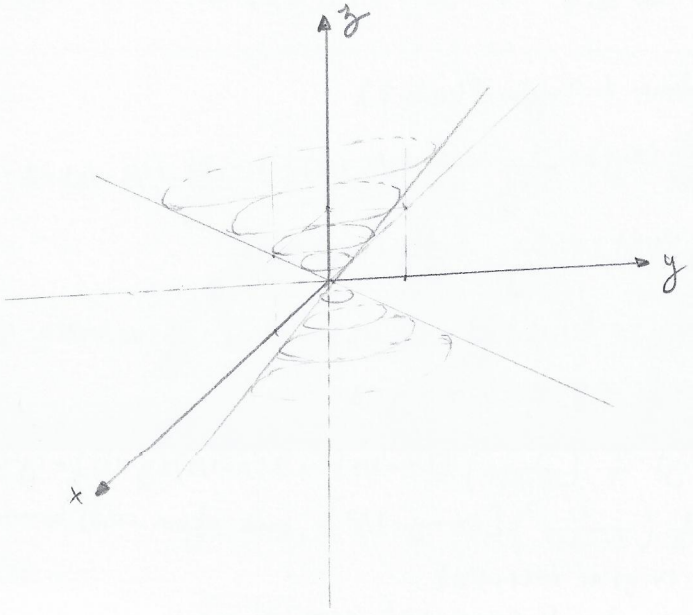
1) a) $x + 2y + 3z = 1$ $\begin{cases} x=0 : 2y+3z=1 \\ y=0 : x+3z=1 \\ z=0 : x+2y=1 \end{cases}$



b) $x^2 - e^y + z^2 = 0 \Rightarrow e^y = x^2 + z^2 \Rightarrow y = \ln(x^2+z^2)$

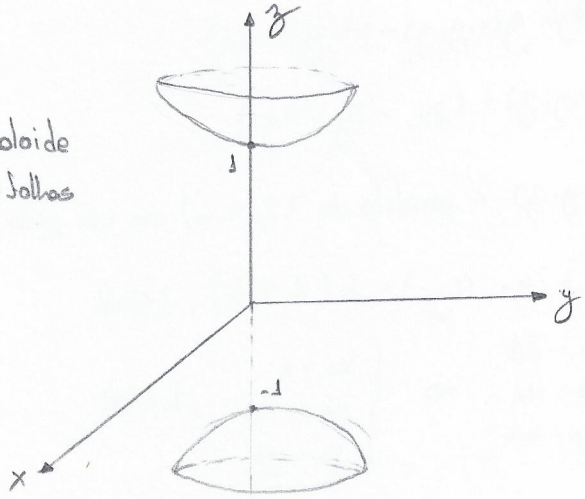


c) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$



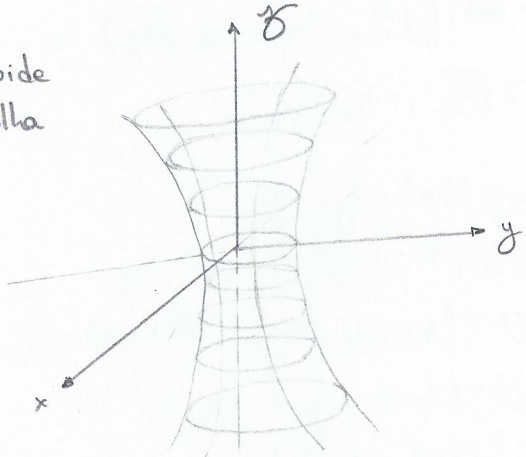
d) $x^2 + y^2 - z^2 = -1 \Rightarrow -x^2 - y^2 + z^2 = 1$

hiperboloide de 2-folhas

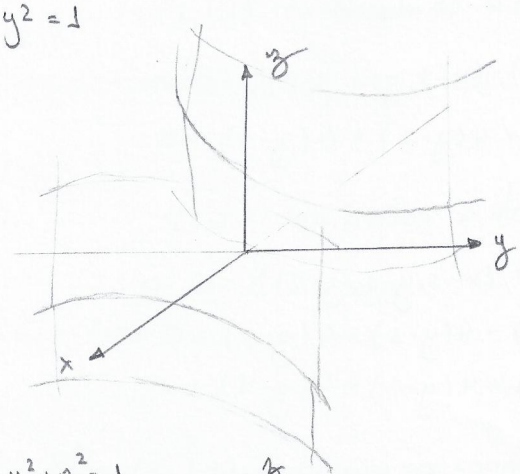


e) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

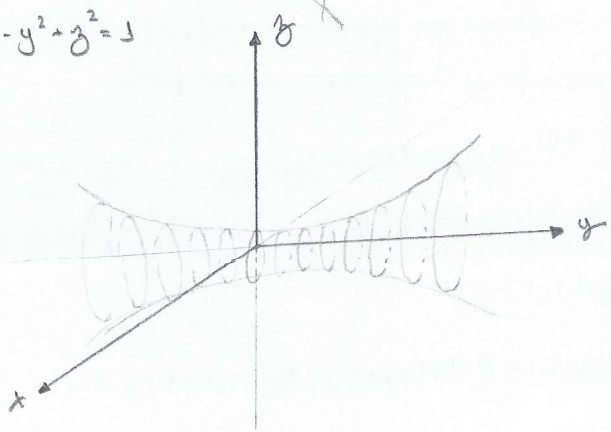
hiperboloide de 1-folha



f) $x^2 - y^2 = 1$



g) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$



Apenas a) é o gráfico da função $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

1.2) Seja $g(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2z^2$.

$\nabla g(x,y,z) = (2x, -2y, 4z)$

$\nabla g(x,y,z)$ é paralelo a $(2,4,6)$ em um ponto (x_0,y_0,z_0)

$(2x_0, -2y_0, 4z_0) = \lambda(2,4,6)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2x_0 = 2\lambda \\ -2y_0 = 4\lambda \\ 4z_0 = 6\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \lambda \\ y_0 = -2\lambda \\ z_0 = \frac{3\lambda}{2} \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$x_0^2 - y_0^2 + 2z_0^2 = 1 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda^2 + \frac{9\lambda^2}{2} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3\lambda^2}{2} = 1 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2/3}$

Os pontos são $(\sqrt{2/3}, -2\sqrt{2/3}, 3/2\sqrt{2/3})$ e

$(-\sqrt{2/3}, 2\sqrt{2/3}, -3/2\sqrt{2/3})$.

1.4) $F(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2$

$G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z$

$\nabla F(x,y,z) = (6x, 4y, 2z) \therefore \nabla F(1,1,2) = (6,4,4)$

$\nabla G(x,y,z) = (2x-8, 2y-6, 2z-8) \therefore$

$\nabla G(1,1,2) = (-6,-4,-4)$

Plano tangente ao elipsóide em $(1,1,2)$:

$\langle \nabla F(1,1,2), (x-1, y-1, z-2) \rangle = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6(x-1) + 4(y-1) + 4(z-2) = 0$

Plano tangente a esfera em $(1,1,2)$:

$\langle \nabla G(1,1,2), (x-1, y-1, z-2) \rangle = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -6(x-1) - 4(y-1) - 4(z-1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6(x-1) + 4(y-1) + 4(z-1) = 0$

Como os planos são iguais em $(1,1,2)$ então a esfera e o elipsóide se tangenciam nesse ponto.

1.8) a) $\nabla V(x,y,z) = (10x - 3y + yz, -3x + xz, xy)$

$\nabla V(3,4,5) = (38, 6, 12)$

$u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$

$\frac{\partial V}{\partial u}(3,4,5) = \langle \nabla V(3,4,5), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) \rangle =$

$= \frac{38}{\sqrt{3}} + \frac{6}{\sqrt{3}} - \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{32}{\sqrt{3}}$

b) A taxa de maior variação possível é na direção e no sentido do vetor gradiente $\nabla V(3,4,5) = (38,6,12)$

c) $\|\nabla V(3,4,5)\| = \sqrt{38^2 + 6^2 + 12^2} = \sqrt{1624}$

1.5) Seja $f(x,y) = z$.

$F(x,y,z) = z - x^3 - y^3 - 2$ e $G(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2$

$\nabla F(x,y,z) = (-3x^2, -3y^2, 1) \Rightarrow \nabla F(1,1,4) = (-3,-3,1)$

$\nabla G(x,y,z) = (2x, 2y, 0) \Rightarrow \nabla G(1,1,4) = (2,2,0)$

O vetor diretor da reta será:

$$\nabla F(1,1,4) \wedge \nabla G(1,1,4) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2j - 6k + 6k + 2i =$$

$= -2i + 2j \therefore (-2,2,0)$

A reta será: $r: x = (1,1,4) + \lambda(-2,2,0), \lambda \in \mathbb{R}$

1.6) $f(1,0) = -1 \therefore \nabla F(1,0,-1) = (2,1,-1)$

$G(x,y,z) = x^3 + xy^3 + yz^3 + z^3$

$\nabla G(x,y,z) = (3x^2 + y^3, 3xy^2 + z, y + 3z^2)$

$\nabla G(1,0,-1) = (3,-1,2)$

$$\nabla F(1,0,-1) \wedge \nabla G(1,0,-1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$= 3i - 3j - 2k - 3k - 4j - i = 2i - 9j - 5k$

$\therefore (2,-9,-5)$

A reta será: $r: x = (1,0,-1) + \lambda(2,-9,-5), \lambda \in \mathbb{R}$

Polinômio de Taylor (Lista 2)

1) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x+y} \therefore \frac{\partial f}{\partial x}(1/2, 1/2) = 1 = \frac{\partial f}{\partial y}(1/2, 1/2) = 1$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{1}{(x+y)^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x \partial y}$

$P_1(x,y) = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1/2, 1/2)(x - 1/2) + \frac{\partial f}{\partial y}(1/2, 1/2)(y - 1/2)$

$= x - \frac{1}{2} + y - \frac{1}{2} = x + y - 1$

$E(x,y) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(c+d)^2}\right)[(x-1/2)^2 + 2(x-1/2)(y-1/2) + (y-1/2)$

$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(c+d)^2}\right)[(x+y-1)^2]$, para algum (c,d) que liga (x,y) a $(1/2, 1/2)$

$|E(x,y)| < 1/2 (x+y-1)^2$, com $x+y > 1$

3) a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y \therefore \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x \therefore \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 0$

$P_1(x,y) = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1) = 7$

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x \qquad \frac{\partial f}{\partial x \partial y} = -3$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y$

$2E(x,y) = 6[c(x-1)^2 - (x-1)(y-1) + d(y-1)^2] \Rightarrow$

$\Rightarrow E(x,y) = 3[c(x-1)^2 - (x-1)(y-1) + d(y-1)^2]$, para (c,d) pertencente ao segmento que liga (x,y) a $(1,1)$

c) $E_1(x,y) = \frac{3}{(cd)^{-1/2}}[c(x-1)^2 - \sqrt{cd}(x-1)(y-1) + d(y-1)^2] =$

$= \frac{3}{(cd)^{1/2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot [\sqrt{c}(x-1) - \sqrt{d}(y-1)]^2$

$\therefore E_1(x,y) \geq \frac{3}{2}(x-y)^2$

2) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 2x \therefore \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 + 4 \therefore \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 7$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x-2, \frac{\partial^2 f}{\partial y}(x,y) = 6y, \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$

$P_1(x,y) = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)(y-1) =$

$= 5 + x - 1 + 7y - 7 = x + 7y - 2$

$E_2(x,y) = \frac{1}{2} \cdot [(6c-2)(x-1)^2 + 6d(y-1)^2] =$

$= (3c-1)(x-1)^2 + (3d)(y-1)^2$, para algum (c,d) pertencente ao segmento (x,y) a $(1,1)$.

$|E_1(x,y)| < 5(x-1)^2 + 6(y-1)^2$

$f(1{,}001, 0{,}99) = 1{,}001 + 7(0{,}99) - 2 = 5{,}931$

O erro é de 10^{-4}.

2.1) a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + y + 10$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 6y - 9$ $\therefore \nabla f(x,y) = (4x+y+10, x+6y-9)$

$\nabla f(x_0,y_0) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 4x+y+10 = 0 \\ x+6y-9 = 0 \Rightarrow x = 9-6y \end{cases}$

$4(9-6y) + y + 10 = 0 \Rightarrow 36 - 24y + y + 10 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 23y = 46 \Rightarrow y = 2 \therefore x = -3$

Ponto crítico é $(-3,2)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$

Como $f_{xx}(-3,2) > 0$, $f_{yy}(-3,2) > 0$ e $\det Hf(-3,2) > 0$ então $(-3,2)$ é ponto de mínimo local

b) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2$ $\therefore \nabla f(x,y) = (2xy^2, 2x^2y)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2yx^2$

$\begin{cases} 2xy^2 = 0 \\ 2x^2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$

Pontos críticos são $(a,0)$ e $(0,a)$, $\forall a \in \mathbb{R}$

Como $z = f(x,y) \geq 0$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$, então todos os pontos críticos da forma $(a,0)$ e $(0,a)$, $\forall a \in \mathbb{R}$, são pontos de mínima

c) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{6x-2}{3x^2+4y^2-2x+7}$ $\therefore \nabla f(x_0,y_0) = 0 \Rightarrow$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{8y}{3x^2+4y^2-2x+7}$

$\Rightarrow \begin{cases} 6x-2 = 0 \\ 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ e $y = 0$ $\therefore$

ponto crítico é $(1/3, 0)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{6(3x^2+4y^2-2x+7) - (6x-2)(6x-2)}{(3x^2+4y^2-2x+7)^2}$ $\therefore \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1/3,0) > 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{8(3x^2+4y^2-2x+7) - 8y(8y)}{(3x^2+4y^2-2x+7)^2}$ $\therefore \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1/3,0) > 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-(6x-2)\cdot 8y}{(3x^2+4y^2-2x+7)^2}$ $\therefore \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1/3,0) = 0$

Conclui-se que $\det \begin{pmatrix} f_{xx}(1/3,0) & f_{xy}(1/3,0) \\ f_{yx}(1/3,0) & f_{yy}(1/3,0) \end{pmatrix} > 0$

Como $f_{xx}(1/3,0) > 0$, $f_{yy}(1/3,0) > 0$ e $\det Hf(1/3,0) > 0$ então $(1/3,0)$ é ponto de mínimo local

d) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^3$ $\therefore \nabla f(x,y) = (3x^2y^3, 3x^3y^2)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2x^3$

$\nabla f(x_0,y_0)=(0,0) \Rightarrow \begin{cases} 3x^2y^3=0 \\ 3x^3y^3=0 \end{cases} \Rightarrow x=0 \text{ ou } y=0$

Os pontos críticos serão da forma $(b,0)$ e $(0,b)$, $\forall b \in \mathbb{R}$

A função $z=f(x,y)$ pode assumir valores negativos que implica na possibilidade de encontrar tanto valores maiores quanto menores do que os valores associados aos pontos críticos. Assim todos os pontos críticos são pontos de sela.

e) $\frac{\partial f}{\partial x} = 4y - 2y^2 - 4xy + 2xy^2$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x - 4xy - 2x^2 + 2x^2y$

$\nabla f(x_0,y_0)=0 \Rightarrow \begin{cases} 4y-2y^2-4xy+2xy^2=0 \\ 4x-4xy-2x^2+2x^2y=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2y-y^2-2xy+1xy^2=0 \\ 2x-2xy-x^2+1x^2y=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2y(1-x)-y^2(1-x)=0 \\ 2x(1-y)-x^2(1-y)=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} (1-x)(2y-y^2)=0 \\ (1-y)(2x-x^2)=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} y(1-x)(2-y)=0 \\ x(1-y)(2-x)=0 \end{cases}$

$y=0 \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$

$x=1 \Rightarrow y=1$

$y=2 \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$

Os pontos críticos são $(0,0)$; $(2,0)$; $(1,1)$; $(0,2)$; $(2,2)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4y+2y^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4x+2x^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \underbrace{4-4y-4x+4xy}_{4y(-1+x)-4(-1+x)=}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \underbrace{4-4y-4x+4xy}_{(-1+x)(4y-4)}$

$=(-1+x)(4y-4)$

$\det Hf(x,y) = (-4y+2y^2)(-4x+2x^2) - (-1+x)^2(4y-4)^2$

$\det Hf(0,0) < 0$, $\det Hf(2,0) < 0$, $\det Hf(0,2) < 0$, $\det Hf(2,2) < 0$.

$\det Hf(1,1) > 0$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) < 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) < 0$

Os pontos de sela são $(0,0)$; $(2,0)$, $(0,2)$, $(2,2)$

O ponto de máximo é $(1,1)$

f) $\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot e^{-x^2-y^2} + xy \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2-y^2} =$

$= ye^{-x^2-y^2}(1-2x^2)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot e^{-x^2-y^2} + xy(-2y) \cdot e^{-x^2-y^2} =$

$= x \cdot e^{-x^2-y^2}(1-2y^2)$

$\nabla f(x_0,y_0)=0 \Rightarrow \begin{cases} ye^{-x^2-y^2}(1-2x^2)=0 \\ xe^{-x^2-y^2}(1-2y^2)=0 \end{cases}$

$x=0 \Rightarrow y=0$; $x=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ $x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

Os pontos críticos são $(0,0)$, $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2xy\, e^{-x^2-y^2}(1-2x^2) - 4xy\, e^{-x^2-y^2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2xy \cdot e^{-x^2-y^2}(1-2y^2) - 4xy\, e^{-x^2-y^2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{-x^2-y^2}(1-2y^2) - 2x^2 e^{-x^2-y^2}(1-2y^2) =$

$= e^{-x^2-y^2}(1-2y^2)[1-2x^2]$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^{-x^2-y^2}(1-2x^2)[1-2y^2]$

$\det Hf(x,y) = (2xy e^{-x^2-y^2})(2x^2-1) - e^{-x^2-y^2}(1-2y^2)^2(1-2$

Nos pontos $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\,,\,) > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\,,\,) > 0$ e $\det Hf(\,,\,) > 0$

$\therefore$ são pontos de mínimo local

Nos pontos $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\,,\,) < 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\,,\,) < 0$ e $\det Hf(\,,\,) > 0$

$\therefore$ são pontos de máximo local

No ponto $(0,0)$: $\det Hf(0,0) = 0$ $\therefore$ é ponto de sela

2.2) a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 8ax^3 - 2ax$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24ax^2 - 2a$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$

$\det Hf(x,y) = 48ax^2 - 4a = 4a(12x^2 - 1)$

$$\begin{cases} 8ax^3 - 2ax = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x^3 - 2x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x(4x^2 - 1) = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

∴ os pontos críticos são $(0,1)$; $(1/2, 1)$; $(-1/2, 1)$

$\det Hf(0,1) = -4a$

$\det Hf(1/2, 1) = 8a$ e $\det Hf(-1/2, 1) = 8a$

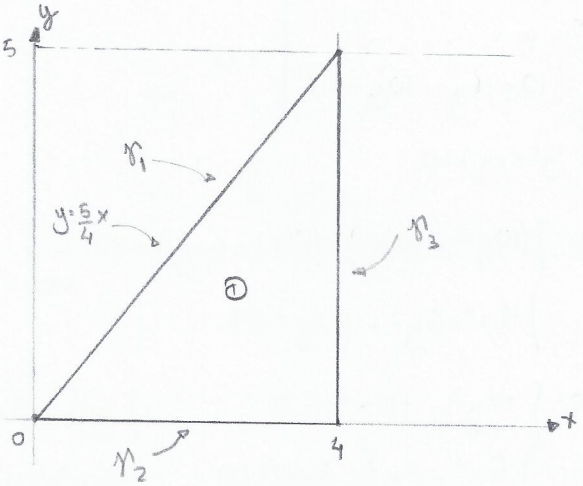
∴ para que haja dois mínimos locais devemos ter $8a > 0 \Rightarrow a > 0$

b) Para que haja exatamente dois pontos de sela devemos ter $8a < 0 \Rightarrow a < 0$

c) Não há como ter um máximo local, pois, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$.

d) Se $a = 0$ teremos pontos críticos da forma $(x, 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

3.1) a)



Pontos Críticos em $\mathring{D}$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -3$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4$

Como $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0,0)$, $\forall x_0, y_0$, então não há pontos críticos em $\mathring{D}$.

Em ∂D:

$\gamma_1(t) = \left(t, \frac{5}{4}t\right)$, $t \in [0,4]$

$g(t) = f(\gamma_1(t)) = 5 - 3t + 5t = 2t + 5$, $t \in [0,4]$

$g(0) = 5$ e $g(4) = 13$

$g'(t) = 2$ ∴ não existem pontos críticos.

$(4,5)$ é um candidato a máximo global

$\gamma_2(t) = (t, 0)$, $t \in [0,4]$

$g(t) = f(\gamma_2(t)) = 5 - 3t$, $t \in [0,4]$

$g(0) = 5$ e $g(4) = -7$

$g'(t) = 5$ ∴ não existem pontos críticos

$(4,0)$ é um candidato a ponto de mínimo

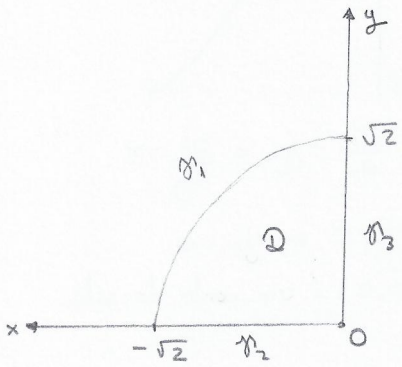
$\gamma_3(t) = (4, t)$, $t \in [0,5]$

$g(t) = f(\gamma_3(t)) = 5 - 12 + 4t = 4t - 7$, $t \in [0,5]$

$g(0) = -7$ e $g(5) = 13$

Conclui-se que $(4,5)$ é um ponto de máximo global e $(4,0)$ é um ponto de mínimo global

b)



Pontos críticos em $\mathring{D}$:

$\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$

Os pontos críticos são $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ e $(0,0)$

Os únicos pontos que pertencem ao interior $\mathring{D}$ são $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $(0,0)$.

$(0,0)$ é um ponto de sela

$(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ é um ponto de mín. local com $f(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = -\frac{1}{2e}$

Em ∂D:

$\gamma_1(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t)$, $t \in [\pi/2, \pi]$

$g(t) = f(\gamma_1(t)) = 2\sin t \cos t\, e^{-2}$, $t \in [\pi/2, \pi]$

$g(0) = 0$ e $g(\pi/2) = 0$

$g'(t) = 2e^{-2}(\cos^2 t - \sin^2 t) \Rightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow$

$\cos^2 t = \sin^2 t \Leftrightarrow t = 3\pi/4$

$g(3\pi/4) = f(\gamma_1(\pi/4)) = -e^{-2}$

$\gamma_2(t) = (t, 0)$, $t \in [-\sqrt{2}, 0]$

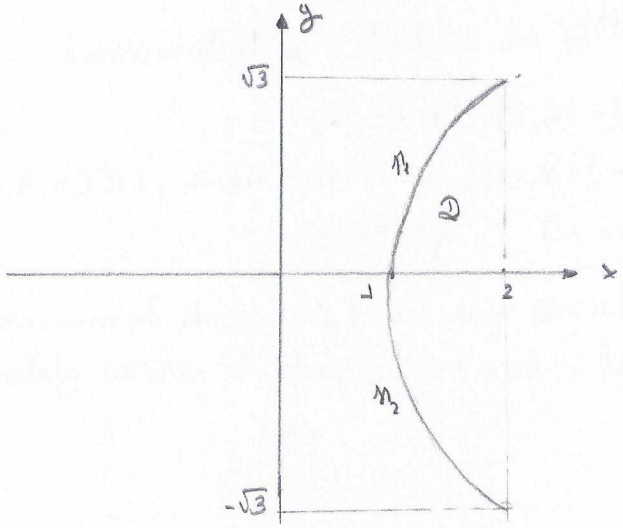
$g(t) = f(\gamma_2(t)) = 0$, $t \in [-\sqrt{2}, 0]$

$\gamma_3(t) = (0,t)$, $t \in [0, \sqrt{2}]$

$g(t) = f(\gamma_3(t)) = 0$, $t \in [0, \sqrt{2}]$

Conclui-se que $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ é ponto de mínimo global. Já $(x,0)$ e $(0,y)$ são pontos de máximos globais para $x \in [-\sqrt{2}, 0]$ e $y \in [0, \sqrt{2}]$.

c)



Pontos críticos em $\mathring{D}$: $\frac{\partial f}{\partial x} = y$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x$

$\nabla f(x_0, y_0) = (0,0) \Rightarrow x_0 = 0$ ou $y_0 = 0$

$\det Hf(x,y) = -1 \therefore (0,0)$ é um ponto de sela.

Em ∂D:

$\gamma_1(t) = (\sec t, \operatorname{tg} t)$, $t \in [0, \pi/3]$

$g(t) = f(\gamma_1(t)) = \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}$, $t \in [0, \pi/3]$

$g(0) = 0$ e $g(\pi/3) = 2\sqrt{3}$

$g'(t) = \sec t (\operatorname{tg} t + \sec^2 t) > 0$, $\forall t \in [0, \pi/3]$

$\gamma_2(t) = (\sec t, \operatorname{tg} t)$, $t \in [-\pi/3, 0]$

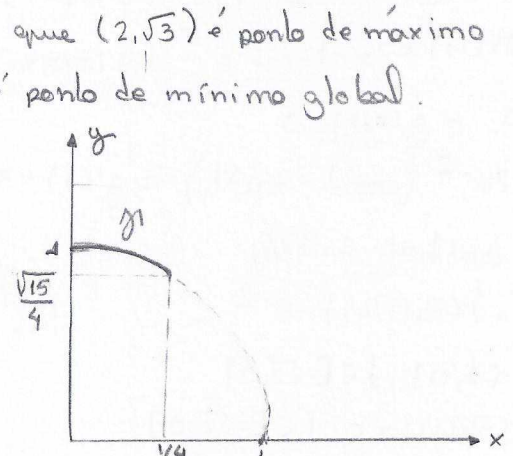
$g(t) = f(\gamma_2(t)) = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}$, $t \in [-\pi/3, 0]$

$g(0) = 0$ e $g(-\pi/3) = -2\sqrt{3}$

$g'(t) = \sec t (\operatorname{tg}^2 t + \sec^2 t) > 0$, $\forall t \in [-\pi/3, 0]$

Conclui-se que $(2, \sqrt{3})$ é ponto de máximo e $(2, -\sqrt{3})$ é ponto de mínimo global.

d)



Pontos críticos de $\mathring{D}$: $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3$

$\nabla f(x_0, y_0) = (0,0) \Leftrightarrow (6x_0^2, 4y_0^3) = (0,0) \Leftrightarrow x_0 = 0$ e $y_0 = 0$

$\det Hf(x,y) = 12x \cdot 12y^2$

$f_{xx}(x,y) = 12x$

Em ∂D:

$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [a, \pi/2]$, $a > \pi/3$

$g(t) = f(\gamma(t)) = 2\cos^3 t + \operatorname{sen}^4 t$

$g'(t) = 4\operatorname{sen}^3 t \cos t - 6 \operatorname{sen} t \cos^2 t \Rightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\operatorname{sen}^3 t \cos t = 6 \operatorname{sen} t \cos^2 t \Leftrightarrow \frac{2}{3} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos t} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen} t = 0$, não há t para que $\operatorname{sen} t = 0$

$g(a) = \frac{1}{32} + \left(\frac{15}{16}\right)^2$ e $g(\pi/2) = 1$

Conclui-se que $(1/4, \sqrt{15}/4)$ é ponto de mínimo e $(0,1)$ é ponto de máximo.

3.2) a) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 64 = 0\}$

$f(x,y) = xy$

$g(x,y) = 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 64$

$\nabla f = (y, x)$ e $\nabla g = (10x + 6y, 10y + 6x)$

Tratando-se de uma função contínua em um conjunto compacto:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} y & x \\ 10x+6y & 10y+6x \end{vmatrix} = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (10y^2 + 6xy) - (10x^2 + 6xy) = 0 \\ 5x^2 + 5y^2 + 6xy = 64 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10y^2 - 10x^2 = 0 \\ 5x^2 + 5y^2 + 6xy = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = x^2 \Rightarrow y = \pm x \\ 5x^2 + 5y^2 + 6xy = 64 \end{cases}$$

$y = x$: $10x^2 + 6x^2 - 64 \Rightarrow x = \pm 2 \therefore (2,2), (-2,-2)$

$y = -x$: $10x^2 - 6x^2 - 64 \Rightarrow x = \pm 4 \therefore (4,-4), (-4,4)$

O valor de máximo é 4 e o valor de mínimo é -16

b) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6 = 0\}$

$f(x,y,z) = xyz$

$g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6$

$\nabla f = (yz, xz, xy)$ e $\nabla g = (2x, 4y, 6z)$

Como o conjunto B é compacto, pelo Teorema de Weierstrass, sabemos que f assumirá um valor de máximo e de mínimo (extremantes locais/globais).

$$\nabla f \wedge \nabla g = \begin{vmatrix} i & j & k \\ yz & xz & xy \\ 2x & 4y & 6z \end{vmatrix} = 6xz^2 i + 2x^2 yj + 4y^2 zk - 2x^2 z k - 6yz^2 j - 4xy^2 i =$$

$$= (6xz^2 - 4xy^2)i + (2x^2 y - 6yz^2)j + (4y^2 z - 2x^2 z)k$$

$$\begin{cases} \nabla f \wedge \nabla g = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6xz^2 = 4xy^2 \\ 2x^2 y = 6yz^2 \\ 4y^2 z = 2x^2 z \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6 = 0 \end{cases}$$

Se $\underbrace{x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0}_{f(x,y,z) = 0}$:
$$\begin{cases} 6z^2 = 4y^2 \\ 2x^2 = 6z^2 \\ 4y^2 = 2x^2 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3z^2 = 2y^2 \\ x^2 = 3z^2 \\ x^2 = 2y^2 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6 = 0 \end{cases} \quad \therefore 3z^2 + 3z^2 + 3z^2 = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9z^2 = 6 \Rightarrow z^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow z = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Se $z = \frac{\sqrt{6}}{3}$: $2y^2 = \cancel{3} \cdot \frac{2}{\cancel{3}} \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2}$

$$x^2 = \cancel{3} \cdot \frac{2}{\cancel{3}} \Rightarrow x = \pm \sqrt{2} \Rightarrow y = \pm 1$$

Pontos candidatos: $\left(\sqrt{2}, 1, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $\left(-\sqrt{2}, 1, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $\left(\sqrt{2}, -1, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $\left(-\sqrt{2}, -1, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

Se $z = -\frac{\sqrt{6}}{3}$: $x^2 = 3\,\frac{2}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow y = \pm 1$

Pontos candidatos: $\left(\sqrt{2}, 1, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $\left(-\sqrt{2}, 1, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $\left(\sqrt{2}, -1, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $\left(-\sqrt{2}, -1, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

$f(\sqrt{2}, 1, \sqrt{6}/3) = f(-\sqrt{2}, -1, \sqrt{6}/3) = f(\sqrt{2}, -1, -\sqrt{6}/3) =$
$= f(-\sqrt{2}, 1, -\sqrt{6}/3) = \sqrt{12}/3 \longrightarrow$ Valor de máximo

$f(-\sqrt{2}, 1, \sqrt{6}/3) = f(\sqrt{2}, -1, \sqrt{6}/3) = f(\sqrt{2}, 1, -\sqrt{6}/3) =$
$= f(-\sqrt{2}, -1, -\sqrt{6}/3) = -\sqrt{12}/3 \longrightarrow$ Valor de mínimo.

c) $f(x,y,z) = x^2 y^2 z^2$ e $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

$\nabla f = (2xy^2 z^2, 2x^2 y z^2, 2x^2 y^2 z)$

$\nabla g = (2x, 2y, 2z)$

Pelo Teorema de Weierstrass sabemos que f assumirá um valor de máximo e de mínimo:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} = \begin{cases} 2xy^2 z^2 = \lambda 2x \\ 2x^2 y z^2 = \lambda 2y \\ 2x^2 y^2 z = \lambda 2z \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Se $\underbrace{x_0 \neq 0, y_0 \neq 0, z_0 \neq 0}_{f(x_0, y_0, z_0) = 0}$:
$$\begin{cases} 2y^2 z^2 = 2\lambda \\ 2x^2 z^2 = 2\lambda \\ 2x^2 y^2 = 2\lambda \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \therefore$$

$2y^2 z^2 = 2x^2 z^2 \Rightarrow x^2 = y^2$

$2x^2 y^2 = 2x^2 z^2 \Rightarrow y^2 = z^2$

$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \Rightarrow 3y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$y = 1$: $x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$z^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow z = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $z = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$y = -1$: $x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$z^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow z = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $z = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Como f tem sempre valor positivo então o valor de máximo é $\frac{1}{27}$ e o valor do mínimo é zero.

3.3) a) No interior $\mathring{R}$: sabemos que o interior é um conjunto aberto então podemos calcular os pontos críticos tal que $\nabla f = 0$.

$f(x,y,z) = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 - 14 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 - 14$

$\nabla f = (2x - 2, 2y - 4, 2z - 6)$

$\nabla f = 0 \Rightarrow (2x_0 - 2, 2y_0 - 4, 2z_0 - 6) = (0,0,0)$

$\therefore x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 3$

$(1,2,3)$ é um ponto crítico e $f(1,2,3) = -14$

Vamos analisar a fronteira ($x^2 + y^2 + z^2 = 56$ ... é um conjunto compacto) ∂R:

$g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-56 \therefore \nabla g = (2x, 2y, 2z)$

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-2 = \lambda 2x \\ 2y-4 = \lambda 2y \\ 2z-6 = \lambda 2z \\ x^2+y^2+z^2-56 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-\lambda x = 1 \\ y-\lambda y = 2 \\ z-\lambda z = 3 \\ x^2+y^2+z^2-56 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1-\lambda) = 1 \\ y(1-\lambda) = 2 \\ z(1-\lambda) = 3 \\ x^2+y^2+z^2 = 56 \end{cases}$$

Se $\lambda \neq 1$ (caso contrário não há solução):

$$x = \frac{1}{1-\lambda}, \quad y = \frac{2}{1-\lambda}, \quad z = \frac{3}{1-\lambda}$$

$$\frac{1}{(1-\lambda)^2} + \frac{4}{(1-\lambda)^2} + \frac{9}{(1-\lambda)^2} = 56 \Rightarrow \frac{14}{(1-\lambda)^2} = 56 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)^2 = \frac{1}{4} \therefore \lambda - 1 = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2} \text{ ou } \lambda = \frac{1}{2}$$

$\lambda = \frac{3}{2}$: $x = -2$, $y = -4$, $z = -6$

$\lambda = \frac{1}{2}$: $x = 2$, $y = 4$, $z = 6$

$f(-2,-4,-6) = 112$ e $f(2,4,6) = 0$

O valor de máximo é 112 e o valor de mínimo é 0.

b) No interior $\mathring{R}$:

$\nabla f = (2x-4y+3, 2y-4x, 4y-4)$

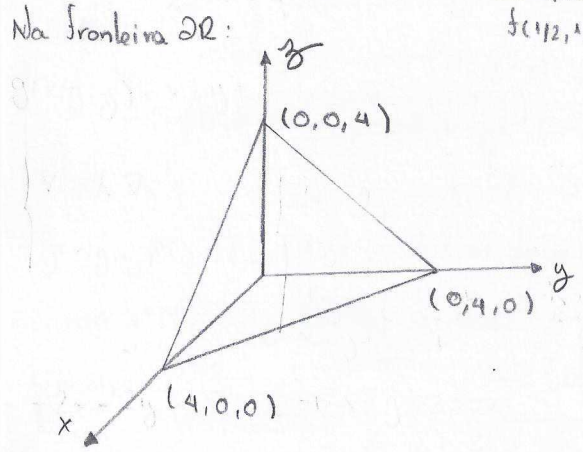
$$\nabla f = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2x_0-4y_0+3 = 0 \\ 2y_0-4x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 2x_0 \\ 4y_0-4 = 0 \Rightarrow y_0 = 1 \end{cases}$$

$2x_0-4y_0+3 = 0 \Rightarrow 2x_0-8x_0+3 = 0 \Rightarrow 6x_0 = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_0 = 1/2 \therefore y_0 = 1$

$x_0+y_0+z_0 \leq 4$ e $x_0 y_0, z_0 \geq 0 \therefore \underbrace{(1/2, 1, 1)}_{f(1/2,1,1) = -\frac{11}{4}} \in R$.

Na fronteira ∂R:



$f(0,0,4) = 16$, $f(0,4,0) = 16$, $f(4,0,0) = 28$

O valor de máximo é 28 e o valor de mínimo é $-\frac{11}{4}$.

3.4) a) C é um conjunto compacto então vale o Teorema de Weierstrass:

$f(x,y) = x^3y \therefore \nabla f = (3x^2y, x^3)$

$g(x,y) = x^2+2y^2-1 \therefore \nabla g = (2x, 4y)$

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} 3x^2y & x^3 \\ 2x & 4y \end{vmatrix} = 0 \\ x^2+2y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x^2y^2 - 2x^4 \\ x^2+2y^2 = 1 \end{cases}$$

Se $x \neq 0$: $\begin{cases} 12y^2 = 2x^2 \\ x^2+2y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 6y^2 \\ x^2+2y^2 = 1 \end{cases}$

$8y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{8}}$ ou $y = -\frac{1}{\sqrt{8}}$

$x^2 = 6y^2 \Rightarrow x^2 = \cancel{6}^{3} \frac{1}{\cancel{8}_{4}} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Pontos que são candidatos: $(\sqrt{3}/2, 1/\sqrt{8})$, $(\sqrt{3}/2, -1/\sqrt{8})$, $(-\sqrt{3}/2, 1/\sqrt{8})$, $(-\sqrt{3}/2, -1/\sqrt{8})$

Se $x = 0$: $2y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Pontos que são candidatos: $(0, 1/\sqrt{2})$, $(0, -1/\sqrt{2})$

$f(\sqrt{3}/2, 1/\sqrt{8}) = f(-\sqrt{3}/2, -1/\sqrt{8}) = \frac{3\sqrt{3}}{16\sqrt{2}}$

$f(\sqrt{3}/2, -1/\sqrt{8}) = f(-\sqrt{3}/2, 1/\sqrt{8}) = -\frac{3\sqrt{3}}{16\sqrt{2}}$

$f(0, 1/\sqrt{2}) = f(0, -1/\sqrt{2}) = 0$

Os pontos de mínimo são $(\sqrt{3}/2, -1/\sqrt{8})$ e $(-\sqrt{3}/2, 1/\sqrt{8})$ e os pontos de máximo são $(\sqrt{3}/2, 1/\sqrt{8})$ e $(-\sqrt{3}/2, -1/\sqrt{8})$

b) Como C é um compacto:

$f(x,y,z) = x-z \therefore \nabla f = (1, 0, -1)$

$g(x,y,z) = x^2+y^2-z \therefore \nabla g = (2x, 2y, -1)$

$h(x,y,z) = z-2y \therefore \nabla h = (0, -2, 1)$

∇g e ∇h são li mas $\{\nabla f, \nabla g, \nabla h\}$ é l.d., portanto

$\nabla f = \lambda \nabla g + \lambda \nabla h$, $\lambda \in R$

$$[\nabla f, \nabla g, \nabla h] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2x & 2y & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2y + 4x - 2 = 0 \Rightarrow 4x = 2-2y \Rightarrow x = \frac{1-y}{2}$

$$\begin{cases} x = \frac{1-y}{2} \\ z - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1-y}{2} \\ z = 2y \\ x^2 + y^2 - z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{1-y}{2}\right)^2 + y^2 - 2y = 0 \Rightarrow \frac{1 - 2y + y^2}{4} + y^2 - 2y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 2y + y^2 + 4y^2 - 8y = 0 \Rightarrow 5y^2 - 10y + 1 = 0$$

$$y = \frac{10 \pm 4\sqrt{5}}{10} \Rightarrow y = 1 \pm \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow y = 1 \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$y = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}} \therefore x = \frac{1}{2} - \frac{y}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$z = 2y \Rightarrow z = 2 + \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$y = 1 - \frac{2}{\sqrt{5}} \therefore x = \frac{1}{2} - \frac{y}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$z = 2y \Rightarrow z = 2\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 2 - \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$f(-1/\sqrt{5}, 1 + 2/\sqrt{5}, 2 + 4/\sqrt{5}) = -\frac{1}{\sqrt{5}} - 2 - \frac{4}{\sqrt{5}} = -\frac{5}{\sqrt{5}} - 2$$

$$f(1/\sqrt{5}, 1 - 2/\sqrt{5}, 2 - 4/\sqrt{5}) = \frac{1}{\sqrt{5}} - 2 + \frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{5}{\sqrt{5}} - 2$$

O ponto $(-1/\sqrt{5}, 1 + 2/\sqrt{5}, 2 + 4/\sqrt{5})$ é ponto de mínimo e o ponto $(1/\sqrt{5}, 1 - 2/\sqrt{5}, 2 - 4/\sqrt{5})$ é ponto de máximo

c) $f(x,y,z) = x + y + z \therefore \nabla f = (1, 1, 1)$

$g(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1 \therefore \nabla g = (2x, 2y, 0)$

$h(x,y,z) = 4x + 4y - z^2 \therefore \nabla h = (4, 4, -2z)$

$$[\nabla f, \nabla g, \nabla h] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 0 \\ 4 & 4 & -2z \end{vmatrix} = -4yz + 8x - 8y + 4xz = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4z(x - y) + 8(x - y) = 0 \Rightarrow (x - y)(4z + 8) = 0$$

$$\begin{cases} (x-y)(4z+8) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ 4x + 4y = z^2 \end{cases}$$

$z = -2 : 4x + 4y = 4 \Rightarrow x = 1 - y$

$(1-y)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 1 - 2y + y^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 2y^2 - 2y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y(y-1) \therefore y = 0 \Rightarrow x = 1$

$y = 1 \Rightarrow x = 0$

Pontos que são candidatos: $(1, 0, -2)$ e $(0, 1, -2)$

$x = y : 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{8}{\sqrt{2}} = z^2 \Rightarrow z = \pm 2\sqrt[4]{2}$

$x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \therefore \nexists z \in \mathbb{R}$

Pontos que são candidatos: $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 2\sqrt[4]{2})$ e $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, -2\sqrt[4]{2})$

$f(1,0,-2) = f(0,1,-2) = -1$

$f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 2\sqrt[4]{2}) = \frac{2}{\sqrt{2}} + 2\sqrt[4]{2}$

$f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, -2\sqrt[4]{2}) = \frac{2}{\sqrt{2}} - 2\sqrt[4]{2}$

Os pontos de mínimo são $(1,0,-2)$ e $(0,1,-2)$ e o ponto de máximo $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, -2\sqrt[4]{2})$.

d) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 \therefore \nabla f = (3x^2, 3y^2, 3z^2)$

$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \therefore \nabla g = (2x, 2y, 2z)$

$h(x,y,z) = x + y + z - 1 \therefore \nabla h = (1, 1, 1)$

$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 3x^2 = \lambda 2x + \mu \\ 3y^2 = \lambda 2y + \mu \\ 3z^2 = \lambda 2z + \mu \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \Rightarrow x + y = 1 - z \end{cases} \therefore 3(x^2 + y^2 + z^2) = 2\lambda(x + y + z) + 3\mu \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3 = 2\lambda + 3\mu \Rightarrow \mu = \frac{3 - 2\lambda}{3}$ — subst. $x + y$

$3(x^2 - y^2) = 2\lambda(x - y) \Rightarrow 3(x+y)(x-y) = 2\lambda(x-y) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\lambda = 3(x + y) \Rightarrow 2\lambda = 3(1 - z) \Rightarrow 2\lambda = 3 - 3z \Rightarrow$

$\Rightarrow z = 1 - \frac{2\lambda}{3}$

$3z^2 = \lambda 2z + \mu \Rightarrow 3\left(1 - \frac{2\lambda}{3}\right)^2 = \lambda 2\left(1 - \frac{2\lambda}{3}\right) + \frac{3 - 2\lambda}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\left(1 - \frac{4\lambda}{3} + \frac{4\lambda^2}{9}\right) = 2\lambda - \frac{4\lambda^2}{3} + 1 - \frac{2\lambda}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 - 4\lambda + \frac{4\lambda^2}{3} = 2\lambda - \frac{4\lambda^2}{3} + 1 - \frac{2\lambda}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\lambda^2 - 8\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{8 \pm 4}{8} \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2}$ ou $\lambda = \frac{1}{2}$

$\lambda = \frac{3}{2} : \mu = 0 : 3x^2 = 3x \Rightarrow 3x(x - 1) = 0$

$\therefore x = 0 \Rightarrow y = 1$

$x = 1 \Rightarrow y = 0$

$z = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow z = 0$

$\lambda = \frac{1}{2} : \mu = \frac{2}{3}$

$3x^2 = \lambda 2x + \mu \Rightarrow 3x^2 - x - \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm 3}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$

$x = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}$

$z = 1 - \frac{2\lambda}{3} \Rightarrow z = \frac{2}{3}$

Pontos que são candidatos: $(0,1,0)$, $(1,0,0)$, $(-1/3, 2/3, 2/3)$, $(2/3, -1/3, 2/3)$

se $x = y$: $(1-2x)^2 = 1 - 2x^2 \Rightarrow 1 - 4x + 4x^2 = 1 - 2x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6x^2 - 4x \Rightarrow 2x(3x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$

$x = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}$

$z = 1 - 2x \Rightarrow z = -1/3$, se $x = 2/3$

$z = 1$, se $x = 0$

Pontos que são candidatos: $(2/3, 2/3, -1/3)$, $(0,0,1)$

Os pontos de mínimo são $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ e os pontos de máximo são $(2/3, 2/3, -1/3)$, $(2/3, -1/3, 2/3)$, $(-1/3, 2/3, 2/3)$

41) $f(x,y) = x^2 + y^2$

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy + y^2 = 3\}$

Como B é um conjunto compacto, podemos garantir pelo Teorema de Weierstrass que haverão pontos extremantes

$\nabla f = (2x, 2y)$

$g(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3 \therefore \nabla g(x,y) = (2x + y, x + 2y)$

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x+y & x+2y \end{vmatrix} = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 4xy - 4xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases} \therefore x = y \text{ ou } x = -y$$

$x = y$: $x^2 + x^2 + x^2 = 3 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$

$x = -1 \Rightarrow y = -1$

Pontos que são candidatos: $(1,1)$ e $(-1,-1)$

$x = -y$: $x^2 - x^2 + x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3} \Rightarrow y = -\sqrt{3}$

$x = -\sqrt{3} \Rightarrow y = \sqrt{3}$

Pontos que são candidatos: $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

Os pontos mais próximos da origem serão os pontos de mínimo, ou seja, $(1,1)$ e $(-1,-1)$

42) $f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$

$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z + 4 = 0\}$

$g(x,y,z) = x + 2y - z + 4 \quad \nabla g = (1, 2, -1)$

$\nabla f = (2x-2, 2y-2, 2z-2)$

$$\nabla f \wedge \nabla g = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2x-2 & 2y-2 & 2z-2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow -(2y-2)i + (2z-2)j + 2(2x-2)k - (2y-2)k +$

$+ (2x-2)j - 2(2z-2)i = 0 \Rightarrow$

$(6 - 2y - 4z)i + (2x + 2z - 4)j + (4x - 2y - 2)k =$

$$\begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ 2x + 2z = 4 \\ 2y + 4z = 6 \\ x + 2y - z = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = -x + 2 \\ y + 2z = 3 \\ x + 2y - z = -4 \end{cases}$$

$x + 2y - z = -4 \Rightarrow x + 4x - 2 + x - 2 = -4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -1 \text{ e } z = 2$

O ponto mais prorímo é o $(0, -1, 2)$.

36) a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4xy - 4z \therefore$

$\nabla f = (2x - 4y, 2y - 4x, 4z - 4)$

$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 \therefore \nabla g = (2x, 2y, 2z)$

$$\nabla f \wedge \nabla g = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2x-4y & 2y-4x & 4z-4 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2z(2y-4x)i + 2x(4z-4)j + 2y(2x-4y)k -$

$- 2x(2y-4x)k - 2z(2x-4y)j - 2y(4z-4)i = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (4yz - 8z - 8yz - 8y)i + (8xz - 8x - 4z + 8y)j +$

$+ (4xy - 8y^2 - 4xy - 8x^2)k$

$$\begin{cases} 8y + 8xz + 4yz = 0 \\ 8x - 4xy - 8yz = 0 \\ y^2 = x^2 \Rightarrow x = y \text{ ou } x = -y \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

Se $x = y$:

$$\begin{cases} 8x + 8xy + 4xy = 0 \\ 8x - 4xy - 8xy = 0 \\ 2x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \quad \therefore 8x = 12xy$$

$x \neq 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3} \therefore 2x^2 + \frac{4}{9} = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow x = \pm \frac{16}{9}$

$x = 0 \Rightarrow$ não há solução para este conjunto

Os pontos candidatos são $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Se $x = -y$: $8x - 4xy + 8xy = 0 \Rightarrow 8x = -4xy$

Como x é diferente de $0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$

O ponto candidato é $(0, 0, -2)$

$f(4/3, 4/3, 2/3) = f(-4/3, -4/3, 2/3) = -\frac{48}{9}$ (v. mínimo)

$f(0, 0, -2) = 16$ (valor de máximo)

b) Agora devemos analisar o interior do conjunto:

$$\nabla f = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 4y \\ 2y = 4x \\ 4z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = 2x \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 0 \text{ e } z = 1$$

O ponto candidato é $(0, 0, 1)$ que faz parte do conjunto mas não é um extremante. Então os extremantes continuam os mesmos do item a).

c) Vamos agora adicionar mais uma restrição ao conjunto. Quando $z > 1/2$ basta verificar os pontos já encontrados nos itens anteriores. Agora devemos calcular os possíveis candidatos na fronteira quando $z = 1/2$.

Na fronteira:

$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ e } z = 1/2\}$

$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 \therefore \nabla g = (2x, 2y, 2z)$

$h(x, y, z) = z - 1/2 \therefore \nabla h = (0, 0, 1)$

Como B é um compacto, pelo Teorema de Weierstrass, garantimos a existência de extremantes locais.

$$[\nabla f, \nabla g, \nabla h] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2x - 4y & 2y - 4x & 4z - 4 \\ 2x & 2y & 2z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y(2x - 4y) - 2x(2y - 4x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4xy - 8y^2 - 4xy + 8x^2 \Rightarrow x^2 = y^2$$

$$\begin{cases} [\nabla f, \nabla g, \nabla h] = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = 1/2 \end{cases}$$

Se $x = y$:

$$2x^2 + \frac{1}{4} = 4 \Rightarrow 2x^2 = \frac{15}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{15}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}$$

$$x = -\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}$$

Pontos candidatos são $\left(\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$

Se $x = -y$:

$$x^2 = \frac{15}{8} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}$$

$$x = -\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}$$

Pontos candidatos são $\left(\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$

$$f\left(\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{42}{8}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = \frac{78}{8}$$

Agora devemos analizar os pontos do item b) que satisfazem a condição $z > 1/2$:

$f(4/3, 4/3, 2/3) = f(-4/3, -4/3, 2/3) = -\frac{48}{9}$

O valor de mínimo é $-\frac{48}{9}$ nos pontos $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$. O valor de máximo é $\frac{78}{8}$ nos pontos $\left(-\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$.

d) Agora basta analisar o item b) nas condições do item c).

$f(0, 0, 1) = -2$

Então os pontos extremantes e os valores de máximo e mínimo continuam os mesmos do item anterior.

c) Devemos analisar a fronteira tal que:

$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4 \text{ e } z = x+y\}$

$h(x,y,z) = x+y-z \therefore \nabla h = (1,1,-1)$

B é compacto então pelo Teorema de Weierstrass garantimos a existência de extremantes.

$$[\nabla f, \nabla g, \nabla h] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2x-4y & 2y-4x & 4z-4 \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow -2y(2x-4y) + 2z(2y-4x) + 2x(4z-4) -$

$-2y(4z-4) + 2x(2y-4x) - 2z(2x-4y) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4xy + 8y^2 + 4yz - 8xy + 8xz - 8x - 8yz - 8y +$

$+ 4xy - 8x^2 - 4xy + 8yz = 0 \Rightarrow 8y^2 + 4yz - 4xz + 8y -$

$-8x^2 - 4xy = 0 \Rightarrow (-z - 2(x+y) - 2)(x-y) = 0$

$$\begin{cases} (-z-2x-2y-2)(x-y) = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 4 \\ z = x+y \end{cases}$$

Se $x = y$:

$z = 2x \therefore 2x^2 + 4x^2 = 4 \Rightarrow 6x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt{2/3} \Rightarrow z = 2\sqrt{2/3} \Rightarrow y = \sqrt{2/3}$

$x = -\sqrt{2/3} \Rightarrow z = -2\sqrt{2/3} \Rightarrow y = -\sqrt{2/3}$

Os pontos candidatos são: $\underbrace{\left(\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}, 2\sqrt{2/3}\right)}_{x_1}$,

$\underbrace{\left(-\sqrt{2/3}, -\sqrt{2/3}, -2\sqrt{2/3}\right)}_{x_2}$

Se $z = -2x-2y-2$:

$-2x-2y-2 = x+y \Rightarrow 3x+3y = -2 \Rightarrow x = -\frac{2-3y}{3}$

$\therefore z = -\frac{2-3y}{3} + y = -\frac{2}{3}$

$x^2+y^2+z^2 = 4 \Rightarrow \left(-\frac{2-3y}{3}\right)^2 + y^2 + \frac{4}{9} = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{4+12y+9y^2}{9} + y^2 + \frac{4}{9} = 4 \Rightarrow 18y^2 + 12y + 8 = 36 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9y^2+6y+4 = 18 \Rightarrow 9y^2+6y-14 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{-6 \pm 6\sqrt{15}}{18} \Rightarrow y = -\frac{1 \pm \sqrt{15}}{3}$

$y = -\frac{1+\sqrt{15}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{-3-\sqrt{15}}{3} \Leftrightarrow z = -\frac{2}{3}$

$y = -\frac{1-\sqrt{15}}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{-3+\sqrt{15}}{3} \Leftrightarrow z = -\frac{2}{3}$

Os pontos candidatos são $\underbrace{\left(\frac{-3+\sqrt{15}}{3}, -\frac{1+\sqrt{15}}{3}, -\frac{2}{3}\right)}_{x_3}$

$\underbrace{\left(\frac{-3+\sqrt{15}}{3}, -\frac{1-\sqrt{15}}{3}, -\frac{2}{3}\right)}_{x_4}$

$f(x_1) = 4 - 8\sqrt{\frac{2}{3}}$, $f(x_2) = 4 + 8\sqrt{\frac{2}{3}}$

$f(x_3) = f(x_4) = \frac{40}{3}$

Agora devemos analisar a restrição $z > x+y$ tal que $B' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4\}$. O único ponto válido é $\underbrace{\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)}_{x_5} \therefore f(x_5) = -\frac{48}{9}$

O ponto de mínimo é x_5 com $f(x_5) = -\frac{48}{9}$ e os pontos de máximo são x_3 e x_4 com $f(x_3) = f(x_4) = \frac{40}{3}$

4.3) $f(x,y,z) = xyz \therefore \nabla f = (yz, xz, xy)$

$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}_+^* : x+y+z = 100\}$

B é um compacto então por Weierstrass podemos garantir a existência de extremantes.

$g(x,y,z) = x+y+z-100 \therefore \nabla g = (1,1,1)$

$$\nabla f \wedge \nabla g = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (xz-xy)i + (xy-yz)j + (yz-xz)k = 0$

Note que já sabemos que $x \neq 0, y \neq 0 \neq z \neq 0$

$$\begin{cases} xz = xy \\ xy = yz \\ yz = xz \\ x+y+z = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = y \\ x = z \\ y = x \\ x+y+z = 100 \end{cases} \Rightarrow 3z = 100 \Rightarrow$$

$\Rightarrow z = \frac{100}{3} \therefore x = \frac{100}{3} \therefore y = \frac{100}{3}$

4.4) $f(\alpha,\beta,\gamma) = \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma$

$B = \{(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^{*3}_+ : \alpha+\beta+\gamma = \pi\}$

B é um compacto, portanto, pelo Teorema de Weierstrass sabemos que existirão extremantes.

$\nabla f = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

$g(x,y,z) = \alpha+\beta+\gamma-\pi \therefore \nabla g = (1,1,1)$

$$\nabla f \wedge \nabla g = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\cos\beta - \cos\gamma)\,i +$$

$$+ (\cos\gamma - \cos\alpha)\,j + (\cos\alpha - \cos\beta)\,k = 0$$

$$\begin{cases} \cos\beta = \cos\gamma \\ \cos\gamma = \cos\alpha \\ \cos\alpha = \cos\beta \\ \alpha+\beta+\gamma = \pi \end{cases} \Rightarrow \cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma$$

Como $\alpha,\beta,\gamma \in]0,\pi]$ então $\alpha = \beta = \gamma \therefore 3\alpha = \pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$

O valor máximo será dado por $f(\pi/3,\pi/3,\pi/3) = 3\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

4.5) O volume do paralelepípedo é dado por $V(x,y,z) = xyz$

O compacto D é dado por $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{*3} : 9x^2+36y^2+4z^2 = 36\}$

$g(x,y,z) = 9x^2+36y^2+4z^2-36 \therefore \nabla g = (18x, 72y, 8z)$

$\nabla V = (yz, xz, xy)$

$$\nabla V = \lambda \nabla g \therefore \begin{cases} yz = \lambda 18x \\ xz = \lambda 72y \\ xy = \lambda 8z \\ 9x^2+36y^2+4z^2 = 36 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}^*$$

Note que $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$:

$$\frac{z}{y} = 9\frac{y}{z} \Rightarrow z^2 = 9y^2$$

$$\therefore 36y^2+36y^2+36y^2 = 36 \Rightarrow$$

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{4y} \Rightarrow x^2 = 4y^2$$

$$\Rightarrow 3y^2 = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ ou } x = -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ z = \sqrt{3} \text{ ou } z = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ ou } x = -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ z = \sqrt{3} \text{ ou } z = -\sqrt{3} \end{cases}$$

As dimensões que maximizam o volume do paralelepípedo são $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right)$, $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right)$, $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{3}\right)$, $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{3}\right)$.

P3 de 2015 : Paulo Akira 2016.2

1) A superfície S é a superfície de nível 8 da função $f(x,y,z) = x^2 - 3xy + 8y + 2(y-1)^2$

$\nabla f = (2x - 3y, 8 - 3x, 4(y-1))$

$\nabla f(1,1,0) = (-1, 5, -4)$

$\phi(t) = g(\gamma(t)) \therefore \phi(1) = g(\gamma(1)) \therefore \phi'(1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle \nabla g(1,1,0), \gamma'(1) \rangle = 0 \therefore \nabla g$ é ortogonal a γ'

No ponto $(1,1,0)$:

$$\nabla f(1,1,0) \wedge \nabla g(1,1,0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 5 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -8j + 2k - 10k - 8i$$

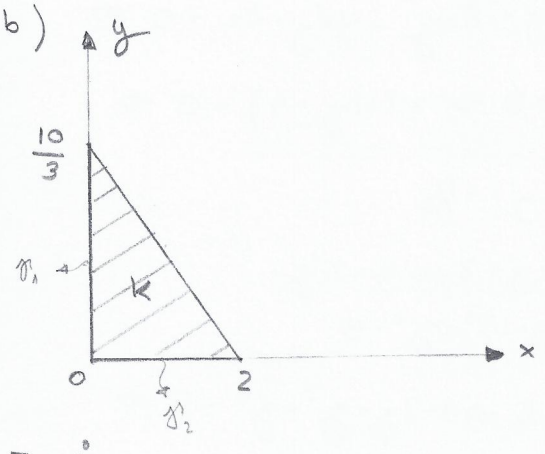
$= -8i - 8j - 8k$

$r: x = (1,1,0) + \lambda(1,1,1), \lambda \in \mathbb{R}$

2) a) Sim, pois, K é um conjunto fechado e limitado, portanto, compacto... e f é uma função contínua.

Assim pelo Teorema de Weierstrass podemos garantir a existência de pontos de máximo e de mínimo

b)



Em $\mathring{K}$:

$\nabla f = \left(\frac{1}{4}x^{-3/4}y^{3/4}, \frac{3}{4}x^{1/4}y^{-1/4}\right)$

$\nabla f(x_0, y_0) = (0,0) \Leftrightarrow y = 0$ ou $x = 0$

Os pontos candidatos são $(\lambda, 0)$ e $(0, \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Mas eles não estão no interior de K.

Na fronteira ∂K:

$\gamma_1(t) = (0, t)$, $t \in [0, 10/3]$

$g(t) = f(\gamma_1(t)) = 0$

O único valor possível de f é 0.

O mesmo argumento serve para a parametrização γ_2 do outro eixo.

Para o segmento aberto vamos utilizar o multiplicador de Lagrange.

$g(x,y) = 5x + 3y - 10 \therefore \nabla g = (5,3)$

$\nabla f = \left(\frac{1}{4}\left(\frac{y}{x}\right)^{3/4}, \frac{3}{4}\left(\frac{x}{y}\right)^{1/4}\right)$

$$\begin{vmatrix} 1/4\,(y/x)^{3/4} & 3/4\,(x/y)^{1/4} \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{3}{4}(y/x)^{3/4} - \frac{15}{4}(x/y)^{1/4} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[4]{\left(\frac{y}{x}\right)^3} = 5\sqrt[4]{\left(\frac{x}{y}\right)} \Rightarrow \frac{y^3}{x^3} = \frac{625x}{y} \Rightarrow \frac{y^4}{x^4} = 625 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{y}{x} = 5 \Rightarrow y = 5x$

$$\begin{cases} y = 5x \\ 5x + 3y = 10 \end{cases} \therefore 5x + 15x = 10 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \therefore y = \frac{5}{2}$$

O ponto $(1/2, 5/2)$ é ponto de máximo.

Os pontos $(\lambda, 0)$ e $(0, \lambda)$, $\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$, são pontos de mínimo

c) f assume ponto de máximo no ponto $(1/2, 5/2)$ que está sob o segmento $5x + 3y = 10$. Porém os eixos não fazem mais parte do conjunto então f não assume ponto de mínimo

3) $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 6x + 6y \therefore \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 6$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 6x - 6y \therefore \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 6$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6$

Pontos Críticos:

$\nabla f(x_0, y_0) = (0,0) \Rightarrow (4x^3 - 6x + 6y, 4y^3 + 6x - 6y) =$

$= (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_0^3 - 6x_0 + 6y_0 = 0 \\ 4y_0^3 + 6x_0 - 6y_0 = 0 \end{cases} \therefore x^3 = -y^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_0 = -y_0 \therefore -4y_0^3 + 6y_0 + 6y_0 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4y_0^3 + 12y_0 \Rightarrow y_0(-4y_0^2 + 12) = 0$

$y_0 = 0$ ou $4y_0^2 = 12 \Rightarrow y_0 = \sqrt{3}$ ou $y_0 = -\sqrt{3}$

Pontos: $(0,0), (-\sqrt{3}, \sqrt{3}), (\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

$\det H_f(x,y) = \begin{vmatrix} (12x^2 - 6) & 6 \\ 6 & (12y^2 - 6) \end{vmatrix} =$

$= (12x^2 - 6)(12y^2 - 6) - 36$

$\det H_f(0,0) = 0$

$\det H_f(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) = 900 - 36 > 0$

$\det H_f(\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = 900 - 36 > 0$

Como $f_{xx}(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) > 0$ e $\det H_f(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) > 0$ então $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ é mínimo local. O mesmo vale para $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$.

Agora devemos analisar o ponto $(0,0)$. Note que $f(x,y) = x^4 + y^4 - 3(x-y)^2$. Se tomarmos um ponto (x,x), $\forall x \in \mathbb{R}$, teremos $f(x,x) = 2x^4 > 0$. Se tomarmos $(0,y)$, $\forall y \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$, teremos $f(0,y) < 0$.

Assim $(0,0)$ é ponto de sela.

4) O conjunto D é compacto então podemos garantir a existência de extremantes locais pelo Teorema de Weierstrass.

$g(x,y,z) = x^2 + (y-1)^2 - z^2 - 5 \therefore \nabla g = (2x, 2y-2, 2z)$

$h(x,y,z) = y + z - 2 \therefore \nabla h = (0,1,1)$

$f(x,y,z) = 2z^2 - y^2 - x^2 \therefore \nabla f = (-2x, -2y, 4z)$

$\begin{cases} \{\nabla f, \nabla h\} \text{ são li} \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla f \wedge \nabla h = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2x & -2y & 4z \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2yi - 2xk + 2xj - 4yi = 0$

$\Rightarrow (-2y - 4y)i + 2xj - 2xk = 0$

$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = -4z \\ y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2z \\ y + z = 2 \end{cases} \therefore z = -2 \text{ e } y = 4$

O ponto candidato $(0, 4, -2) = P_1$

Como $0 + (4-1)^2 + (-2)^2 = 14 > 5$ então P_1 não serve.

$\begin{cases} \{\nabla f, \nabla g, \nabla h\} \text{ é l.d.} \\ g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} -2x & -2y & 4z \\ 0 & 1 & 1 \\ 2x & 2y-2 & 2z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4xz - 4yx - 8xz + 2x(2y-2) \Rightarrow$

$\Rightarrow -4xz - 4xy - 8xz + 4xy - 4x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -12xz - 4x = 0 \Rightarrow x(12z + 4) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0$ ou $z = -1/3$

Se $x = 0$: $\begin{cases} y + z = 2 \Rightarrow y = 2 - z \\ (y-1)^2 + z^2 = 5 \end{cases}$

$(1-z)^2 + z^2 = 5 \Rightarrow 1 - 2z + z^2 + z^2 = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2z^2 - 2z - 4 = 0 \Rightarrow z^2 - z - 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow z = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} z = 2 \therefore y = 0 \\ z = -1 \therefore y = 3 \end{cases}$

Os pontos candidatos são $\underbrace{(0,0,2)}_{P_2}, \underbrace{(0,3,-1)}_{P_3}$ se $z = -1/3$.

$y = 2 + \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{7}{3}$

$x^2 + (y-1)^2 + y^2 = 5 \Rightarrow x^2 + \left(\frac{7}{3} - 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + \frac{16}{9} + \frac{1}{9} = 5 \Rightarrow x^2 = 5 - \frac{17}{9} \Rightarrow x^2 = \frac{28}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{28}}{3}$ ou $x = -\frac{\sqrt{28}}{3}$

Os candidatos são $\underbrace{\left(\frac{\sqrt{28}}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right)}_{P_4}, \underbrace{\left(-\frac{\sqrt{28}}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right)}_{P_5}$

$f(P_4) = f(P_5) = \frac{2}{9} - \frac{49}{9} - \frac{28}{9} = -\frac{75}{9}$

$f(P_2) = 8$, $f(P_3) = 2 - 9 = -7$

P_2 é o ponto de máximo e P_4 / P_5 são pontos de mínimo.

P3 de 2014.

1) a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 12x - 3y \therefore \nabla f(3x^2 - 12, 3y^2 - 3)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$

$\det Hf(x,y) = 36xy$

Os pontos críticos serão dados por:

$\nabla f(x_0, y_0) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2 \\ 3y^2 - 3 = 0 \Rightarrow y = 1 \text{ ou } y = -1 \end{cases}$

$P_1 = (2,1)$, $P_2(-2,-1)$, $P_3 = (-2,1)$, $P_4 = (2,-1)$

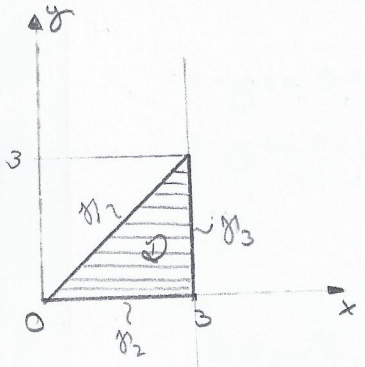
$\det Hf(P_1) > 0$ e $f_{xx}(P_1) > 0 \Rightarrow P_1$ é pto de mínimo local

$\det Hf(P_2) > 0$ e $f_{xx}(P_2) < 0 \Rightarrow P_2$ é pto de máximo local

$\det Hf(P_3) < 0 \Rightarrow P_3$ é ponto de sela

$\det Hf(P_4) < 0 \Rightarrow P_4$ é ponto de sela

b) f é uma função contínua e D é um conjunto compacto. Assim, pelo Teorema de Weierstrass, podemos garantir a existência de pontos de máximo e de mínimo:



No interior $\mathring{D}$, o possível ponto é (2,1) que foi encontrado no item a)

Na fronteira ∂D temos:

$\gamma_1(t) = (t,t)$, $t \in [0,3]$

$g(t) = f(\gamma_1(t)) = 2t^3 - 15t$

$g(0) = 0$ e $g(3) = 9$

$g'(t) = 0 \Rightarrow 6t^2 - 15 = 0 \Rightarrow t^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{5}{2}}$ ou $t = -\sqrt{\frac{5}{2}}$ (não serve)

$g\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = 5\sqrt{\frac{5}{2}} - 15\sqrt{\frac{5}{2}} = -10\sqrt{\frac{5}{2}}$

$\gamma_2(t) = (t,0)$, $t \in [0,3]$

$g(t) = f(\gamma_2(t)) = t^3 - 12t$

$g(0) = 0$ e $g(3) = -9$

$g'(t) = 3t^2 - 12 = 0 \Rightarrow t = 2$ ou $t = -2$

$g(2) = 8 - 24 = -16$ e $g(-2) = -8 + 24 = 16$

$\gamma_3(t) = (3,t)$, $t \in [0,3]$

$g(t) = f(\gamma_3(t)) = -9 + t^3 - 3t$

$g(0) = -9$ e $g(3) = 9$

$g'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 3 = 0 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = 1$ ou $t = -1$

$g(1) = -11$ e $g(-1) = -7$

O ponto de máximo é (3,3) e o ponto de mínimo é (2,1)

2) a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 + 3 \therefore \nabla f(2x, 2y, -2z)$

$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \therefore \nabla g = (2x, 2y, 2z)$

$\nabla f \wedge \nabla g = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2x & 2y & -2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4yz\,i - 4xz\,j + 4xy\,k - 4xy\,k - 4xz\,j + 4yz\,i = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8yz\,i - 8xz\,j = 0$

$$\begin{cases} yz = 0 \\ xz = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou } z = 0 \\ x = 0 \text{ ou } z = 0 \end{cases}$$

se $y = 0$: $x^2 + y^2 = 1$

$f(x, y, 0) = x^2 + y^2 + 3 = 4, \forall x, y \in \mathbb{R}$

se $y \neq 0$: $x = 0 \Rightarrow y = 0 \therefore z = 1$ ou $z = -1$

$f(0,0,1) = 2$ e $f(0,0,-1) = 2$

Existem infinitos pontos de máximo e dois pontos de mínimo.

b) $h(x,y,z) = x+y+z = 1 \therefore \nabla h = (1,1,1)$

$\{\nabla f, \nabla g, \nabla h\}$ l.d. $\therefore [\nabla f, \nabla g, \nabla h] = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2x & 2y & -2z \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4xy + 4yz - 4xz + 4yz -$$

$$-4xy - 4xz = 0 \Rightarrow 8yz = 8xz \Rightarrow yz = xz$$

$$\begin{cases} yz = xz \Rightarrow z(y-x) = 0 \Rightarrow z = 0 \text{ ou } x = y \\ x+y+z = 1 \\ x^2+y^2-z^2 = 1 \end{cases}$$

se $z = 0$: $x + y = 1 \Rightarrow x = 1 - y$

$x^2 - 2y + y^2 + y^2 = x \Rightarrow 2y^2 - 2y = 0 \Rightarrow 2y(y-1) = 0$

$\Rightarrow y = 0 \therefore x = 1$

$y = 1 \therefore x = 0$

Os pontos candidatos são $P_1 = (1,0,0)$ e $P_2 = (0,1,0)$

se $x = y$: $z = 1 - 2x$

$2x^2 + (1-2x)^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 + 1 - 4x + 4x^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 2x(3x-2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0 \therefore y = 0 \therefore z = 1$

$x = \frac{2}{3} \therefore y = \frac{2}{3} \therefore z = -\frac{1}{3}$

Os pontos candidatos são $P_3 = (0,0,1)$ e $P_4 = (2/3, 2/3, -1/3)$

$f(P_1) = 4$, $f(P_2) = 4$, $f(P_3) = 2$, $f(P_4) = \frac{34}{9}$

P_1 e P_2 são pontos de máximo e P_3 é ponto de mínimo

3) a) $\vec{v} = (3,0,4) - (1,-2,0) = (2,2,4)$

$g(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + 2z^2 - 10 = 0 \therefore$

$\nabla g = (2x, -4y, 4z)$

$$\nabla g(x_0, y_0, z_0) = \lambda \vec{v} \Rightarrow \begin{cases} 2x_0 = 2\lambda \\ -4y_0 = 2\lambda \\ 4z_0 = 4\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \lambda \\ y_0 = -\frac{\lambda}{2} \\ z_0 = \lambda \end{cases}$$

$\lambda^2 - \frac{\lambda^2}{2} + 2\lambda^2 - 10 = 0 \Rightarrow \frac{5\lambda^2}{2} - 10 \Rightarrow \lambda^2 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = 2$ ou $\lambda = -2$

se $\lambda = 2$: $r: x = (2,-1,2) + \alpha(1,1,2), \alpha \in \mathbb{R}$

então $A = (2,-1,2)$

se $\lambda = -2$: $r: x = (-2,1,-2) + \alpha(1,1,2), \alpha \in \mathbb{R}$

mas r não contém M e N.

b) se os planos são ortogonais então os valores normais também são em P:

$\langle (b,1,-1), (-4,4,-8) \rangle = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4b + 4 + 8 \Rightarrow b = 3$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -8 \end{vmatrix} = -8i + 4j + 12k + 4k + 24j + 4i =$$

$= -4i + 28j + 16k \therefore r: x = (-2,-1,-2) + \alpha(-4,28,16)$

$\alpha \in \mathbb{R}$

P3 de 2013

1) a) $f(x,y,z) = 2xy - 2y^2 + z^2 + 6z - 1$

$\nabla f = (2y, 2x - 4y, 2z + 6)$

$\nabla f(-4,-1,-1) = (-2,-4,4)$

$\pi: -2(x+4) - 4(y+1) + 4(z+1) = 0$

$\pi: (x+4) + 2(y+1) - 2(z+1) = 0$