LISTA 2 - CÁLCULO 2 (2017)

PARTE 5

POR:

Lucas Nunes

Eric Lemos

PARTE 5 - MAIS ALGUNS EXEMPLOS.

5.1-) a-) Devemos mostrar que f é diferenciável. Assim, o limite a seguir deverá existir e ser igual a 0:

$$\left.\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-\left[f(0,0)+\frac{\delta f}{\delta x}(0,0)\cdot(x-0)+\frac{\delta f}{\delta y}(0,0)\cdot(y-0)\right]}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}\right\}\text{"limitão"}$$

Antes, deve-se determinar $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\delta f}{\delta y}(0,0)$:

$$\frac{\delta f}{\delta x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0\cdot y^2-0}{0^2+0^4}=0$$

$$\frac{\delta f}{\delta y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{x\cdot 0^2}{x+0^4}=0$$

Voltando ao limitão:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^4}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\text{LIMITADA (I)}}\cdot\underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^4}}_{\text{LIMI. (II)}}\cdot\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\to 0}=0$$

c.q.d

(I): $0\leqslant x^2\leqslant x^2+y^2 \Rightarrow 0\leqslant \frac{x^2}{x^2+y^2}\leqslant 1$

(II): $0\leqslant y^2\leqslant x^2+y^4 \Rightarrow 0\leqslant \frac{y^2}{x^2+y^4}\leqslant 1$

b-) Verificando se são contínuas:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\delta f}{\delta x}(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(2xy^2)\cdot(x^2+y^4)-(x^2y^2)\cdot(2x)}{(x^2+y^4)^2}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy^6}{(x^2+y^4)^2}$$

Seja $\gamma(t)=(t^2,t)$ uma curva contínua com imagem em f. Temos:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}f(\gamma(t))=\lim_{t\to 0}\frac{2\cdot t^2\cdot t^6}{(t^4+t^4)^2}=\frac{1}{2}\neq\frac{\delta f}{\delta x}(0,0)\Rightarrow f_{xx}\text{ não é contínua!}$$

Verificando $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(2yx^2).(x^2+y^4)-(x^2y^2).(4y^3)}{(x^2+y^4)^2} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x^2}{(x^2+y^4)^2}}_{\text{limitada}^*} \cdot \underbrace{2x^2y}_{\to 0} - \underbrace{\frac{x^2}{(x^2+y^4)^2}}_{\text{limitada}} \cdot \underbrace{2y^5}_{\to 0} = 0 = \frac{\delta f}{\delta y}(0,0) \Rightarrow \underline{f_{yy} \text{ é contínua!}}$$

$* \quad 0 \leq x^2 \leq (x^2+y^4)^2 \Rightarrow 0 \leq \frac{x^2}{(x^2+y^4)^2} \leq 1$ (O mesmo vale p/ a outra limitada)

5.3-) a-) Temos:

$$\frac{\delta f}{\delta x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3 \cdot 0}{x^4+0^2} - 0}{x-0} = 0$$

$$\frac{\delta f}{\delta y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{0^3 \cdot y}{0^4+y^2} - 0}{y-0} = 0$$

$$\therefore \nabla f(0,0) = \left(\frac{\delta f}{\delta x}(0,0), \frac{\delta f}{\delta y}(0,0)\right) = \boxed{(0,0)}$$

b-) $f(\gamma(t)) = \frac{-t^3}{2t^2} = \frac{-t}{2} \Rightarrow \frac{d f(\gamma(t))}{dt} = -\frac{1}{2}, \forall t \in \mathbb{R}.$

Para $t = 0$:

$\nabla f(0,0) \cdot (-1,-1) = (0,0) \cdot (-1,-1) = 0 \neq -\frac{1}{2}$ $\therefore$ c.q.d

c-) $$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h.(m,n)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3 m^3}{h^2m^2+h^2n^2} \cdot \frac{1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{m^3}{\underbrace{m^2+n^2}_{=1}} = \boxed{m^3}$$

d-) Para esse item, é possível calcular o "limitão" de f e verificar que a função não é diferenciável em $(0,0)$.

Entretanto, um caminho mais fácil é analisar o exposto no item b.

A função seria diferenciável em $(0,0)$ se $\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \dfrac{d f(\gamma(t))}{dt}$.

5.4-) a-) V

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 . 0}{x^4 + 0^2} \cdot \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{0^3 . y}{0^4 + y^2} \cdot \frac{1}{y} = 0$$

Para provar que existem todas as derivadas direcionais em $(0,0)$, basta provar que f é contínua em $(0,0)$. Assim:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} = \lim_{(x,y) \to 0} \underbrace{\frac{x^2}{x^4 + y^2}}_{\text{limitada}} \cdot \underbrace{xy}_{\to 0} = 0 = f(0,0) //$$

Seja $\vec{u} = (a,b)$, onde $\|\vec{u}\| = 1$. Temos:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f((0,0) + h.(a,b)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^4 a^3 b}{h^4 a^4 + h^2 b^2} \cdot \frac{1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^3 a^3 b}{h^2 (h^2 a^4 + b^2)} \stackrel{?}{=} 0 = \nabla f(0,0) \cdot \vec{u} = (0,0) \cdot (a,b) = 0 ///$$

Para verificar se f é diferenciável em $(0,0)$, calculamos o "limitão":

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Utilizando as curvas $\gamma_1(t) = (t,t)$ e $\gamma_2(t) = (t, t^2)$ é fácil verificar que o limite não existe (e portanto f não é diferenciável). Fica a cargo do leitor.

5.2-) PULA AE MANO, HEHEHE