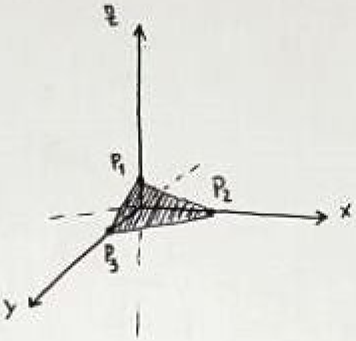
1. Superfícies de nível, Planos tangentes e Derivadas direcionais

1.1.

(a) $F(x,y,z) = x + 2y + 3z$; $c = 1$.

Para descobrir a superfície basta fazer: $x + 2y + 3z = c \Rightarrow x + 2y + 3z = 1 \rightsquigarrow$ É um plano

Marcando 3 pontos: $\underbrace{x=0 \text{ e } y=0 \Rightarrow z=\frac{1}{3}}_{P_1(0,0,\frac{1}{3})}$; $\underbrace{y=0 \text{ e } z=0 \Rightarrow x=1}_{P_2(1,0,0)}$; e $\underbrace{x=0 \text{ e } z=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}}_{P_3(0,\frac{1}{2},0)}$

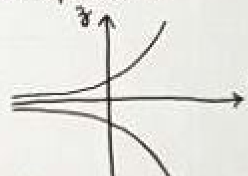


(b) $F(x,y,z) = x^2 - e^y + z^2$; $c=0$;

Fazendo: $F(x,y,z) = c \Rightarrow x^2 - e^y + z^2 = 0. \rightsquigarrow$ É uma superfície "estranha"

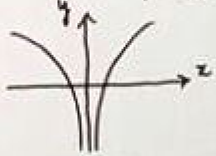
Para esboçá-la, faremos cortes:

- Para $x=0$: $z^2 = e^y \Rightarrow z = \pm\sqrt{e^y}$ $\rightsquigarrow$



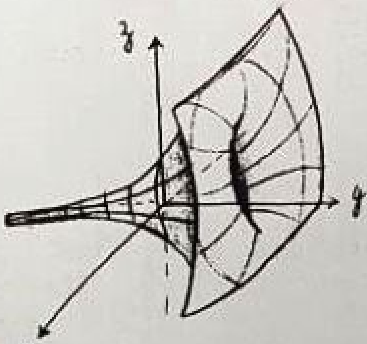
$\rightsquigarrow$ "gráfico" de $z(y)$

- Para $z=0$: $x^2 = e^y \Rightarrow y = \ln(x^2)$



- Para $y=k$, $k \in \mathbb{R}$: $x^2 + z^2 = e^k \Rightarrow$ são circunferências de raio crescente

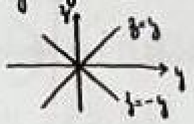
Temos algo assim:



$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$; $c=0$

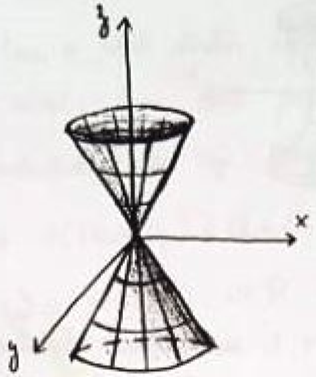
Temos a superfície: $F(x,y,z)=0 \Rightarrow x^2+y^2-z^2=0 \Rightarrow z^2=x^2+y^2$ ⇝ é um cone!

Fazendo cortes: $x=0$: $z=\pm|y|$ →



$y=0$: $z=\pm|x|$ ⇝ análogo

$z=k$: $x^2+y^2=k^2$ ⇝ Circunferências de raio crescente com K ; Para $K=0$, temos $(x,y)=(0,0)$.



(d) $F(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$; $c=-1$

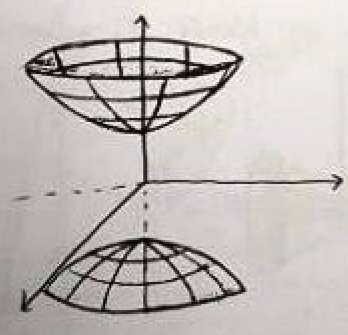
Superfície: $F(x,y,z)=-1 \Rightarrow x^2+y^2-z^2=-1 \Rightarrow x^2+y^2=z^2-1$ ⇝ Hiperbolóide de 2 folhas

Fazendo cortes: $x=0$: $z^2-y^2=1$ →

$y=0$: $z^2-x^2=1$ →

$z=k$: $x^2+y^2=k^2-1$; ⇝ Isso só é possível se: $k^2-1\geq 0 \Leftrightarrow k\geq 1$ ou $k\leq -1$

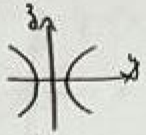
Temos algo do tipo:



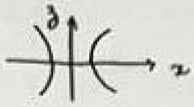
e) $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$; $c = 1$ $\boxed{\text{Hiperbolóide de 1 folha}}$

Superfície: $F(x,y,z) = c \Rightarrow x^2 + y^2 = z^2 + 1$

Fazendo cortes: $x = 0$: $y^2 - z^2 = 1 \rightsquigarrow$ hipérbole



$y = 0$: $x^2 - z^2 = 1 \rightsquigarrow$ hipérbole



$z = k \Rightarrow x^2 + y^2 = k^2 + 1 \rightsquigarrow$ Circunferências de raio crescente conforme k

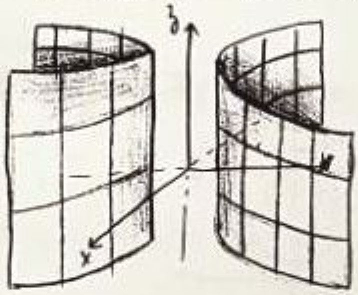
Temos algo do tipo:

f) $F(x,y,z) = x^2 - y^2$; $c = 1$

Superfície: $f(x,y,z) = c \Rightarrow x^2 - y^2 = 1 \rightsquigarrow$ É um cilindro hiperbólico

Os pontos devem obedecer à equação da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$, mas a coordenada z é livre.

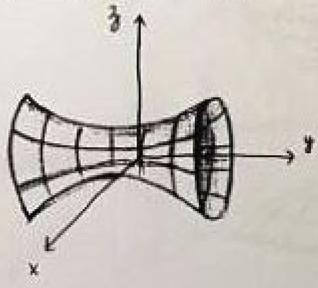
Temos:



g) $F(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$; $c = 1$

Superfície: $f(x,y,z) = c \Rightarrow x^2 + z^2 = 1 + y^2 \rightsquigarrow$ É um hiperbolóide de 1 folha

Os cortes em x e z resultam em hipérboles. Em y, os cortes são circunferências.



Seja $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2z^2 - 1$ ~ $\begin{cases} \text{Defini uma função cuja superfície de nível 0} \\ \text{é o hiperbolóide dado} \end{cases}$

Nos foram dados os pontos $P_1 = (3,-1,0)$ e $P_2 = (5,3,6)$. A reta que une os dois tem vetor diretor $\vec{r}$ tal que: $\vec{r} = P_2 - P_1 = (5,3,6) - (3,-1,0) = (2,4,6) = 2(1,2,3)$.

Calculando o grandiente da f: $\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (2x, -2y, 4z)$.

Sabemos que a reta normal à superfície em um ponto Q é tal que:

$$(x,y,z) = Q + \lambda \nabla f(Q), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ou seja, é uma reta que tem o vetor diretor igual ao gradiente de f pois o ∇f é <u>ORTOGONAL</u> às curvas de nível. Logo, basta procurar os pontos que satisfazem a propriedade de que o ∇f calculado neles seja <u>PARALELO</u> a $\vec{r} = 2(1,2,3)$. Seja $Q = (x_0, y_0, z_0)$:

Queremos: $\nabla f(Q) \parallel \vec{r} \Rightarrow \nabla f(x_0,y_0,z_0) \parallel (2,4,6) \Rightarrow \nabla f(x_0,y_0,z_0) \parallel (1,2,3) \to$ (um múltiplo de $\vec{r}$)

Isso equivale a: $\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \alpha(1,2,3), \ \alpha \in \mathbb{R}. \Rightarrow (2x_0, -2y_0, 4z_0) = (\alpha, 2\alpha, 3\alpha) \Leftrightarrow$

$\boxed{x_0 = \frac{\alpha}{2}}$; $\boxed{y_0 = -\alpha}$; $\boxed{z_0 = \frac{3\alpha}{4}}$;

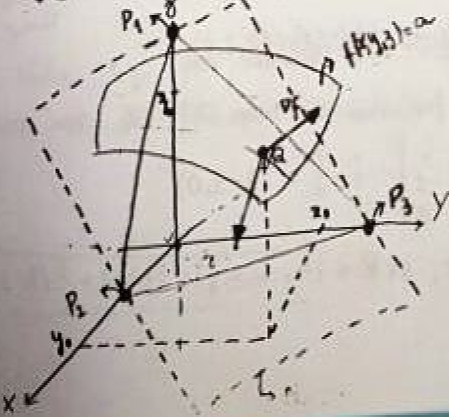
Além disso, (x_0,y_0,z_0) deve pertencer ao hiperbolóide, logo:

$x_0^2 - y_0^2 + 2z_0^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - (\alpha)^2 + 2\left(\frac{3\alpha}{4}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{3\alpha^2}{8} = 1 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{8}{3} \Rightarrow \boxed{\alpha = \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}}$

Então, os pontos são: $(x_0,y_0,z_0) = \left(\frac{\alpha}{2}, -\alpha, \frac{3}{4}\alpha\right) = \pm\left(\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{\frac{2}{3}}, -2\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{3}{4}\cdot 2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ Bota na raiz :)

$\Rightarrow (x_0,y_0,z_0) = \pm\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -2\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$: São 2 pontos, um ⊕ e outro ⊖.

1.3) Seja $f(x,y,z) = xyz$. Esboçarei a superfície de nível $f(x,y,z) = a$:



$Q = (x_0, y_0, z_0)$

P_1, P_2, P_3 e O são os vértices do tetraedro.

1.4) Seja $f(x,y,z) = 3x^2+2y^2+z^2-9$ (eq. do elipsóide) e $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-8x-6y-8z+16$

Completando quadrados em g: $g(x,y,z) = (x^2-8x+16)+(y^2-6y+9)+(z^2-8z+16)+24-16-9-16$

$\Rightarrow g(x,y,z) = (x-4)^2+(y-3)^2+(z-4)^2-17$

Calculando os gradientes: $\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (6x, 4y, 2z)$

$$\nabla g(x,y,z) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) = (2x-8, 2y-6, 2z-8)$$

No ponto $(1,1,2)$: $\nabla f(1,1,2) = (6,4,4)$ $\nabla g(1,1,2) = (-6,-4,-4)$

O plano tangente a $f(x,y,z)=0$ é dado por (no ponto $(1,1,2)$):

$\langle \nabla f(1,1,2), (x-1, y-1, z-2)\rangle = 0 \Rightarrow \langle (6,4,4), (x-1,y-1,z-2)\rangle = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6(x-1)+4(y-1)+4(z-2)=0 \Rightarrow$ Dividindo por $2 \Rightarrow \boxed{3(x-1)+2(y-1)+2(z-2)=0} : \pi_1$

O plano tangente a $g(x,y,z)=0$ em $(1,1,2)$ é dado por:

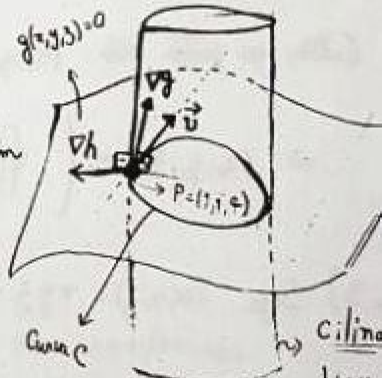
$\langle \nabla g(1,1,2), (x-1, y-1, z-2)\rangle = 0 \Rightarrow \langle (-6,-4,-4), (x-1,y-1,z-2)\rangle = 0 \rightarrow$

$\Rightarrow -6(x-1)-4(y-1)-4(z-2)=0 \Rightarrow$ Divide por $(-2) \Rightarrow \boxed{3(x-1)+2(y-1)+2(z-2)=0} : \pi_2$

Como $\pi_1 = \pi_2$, as superfícies se tangenciam em $(1,1,2)$.

1.5) Seja $f(x,y) = x^3+y^3+2 = z$ e $x^2+y^2=2$. Podemos definir duas funções:

$$g(x,y,z) = x^3+y^3-z+2 \quad \text{e} \quad h(x,y,z) = x^2+y^2-2$$



Para essas funções, sabemos que os gradientes são ortogonais às curvas de nível. E ambas as superfícies ($f(x,y)$ e o cilindro) correspondem às curvas de nível zero de $g(x,y,z)$ e $h(x,y,z)$.

Gradientes: $\nabla g(x,y,z) = (3x^2, 3y^2, -1)$; $\nabla h(x,y,z) = (2x, 2y, 0)$

Em $P=(1,1,4)$: $\nabla g(1,1,4) = (3,3,-1)$ e $\nabla h(1,1,4) = (2,2,0)$

Para achar a reta tangente em P, precisamos do vetor $\vec{v}$. Ele será dado pelo produto vet

$$\vec{v} = \nabla g(1,1,4) \wedge \nabla h(1,1,4) = \det \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i} - \hat{j} = (1,-1,0)^{(*)}$$

A reta tangente fica: $r: X = P + \lambda\vec{v}, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{r: (x,y,z) = (1,1,4) + \lambda(1,-1,0), \lambda \in \mathbb{R}}$

(*) Vale o múltiplo $(-1,1,0)$.

ponto $Q=(x_0,y_0,z_0)$ é um ponto de tangência no primeiro octante. O ∇f é ORTOGONAL à superfície do desenho em todos os pontos, incluindo Q. Então, ∇f é o vetor normal do plano tangente. Para descobrir a equação do plano, basta pegar um vetor arbitrário $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ e forçá-lo a ser ortogonal ao ∇f. Temos que calcular ∇f:

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (yz, xz, xy)$$

O plano tangente é tal que: $\langle \nabla f(Q), (x-x_0, y-y_0, z-z_0)\rangle = 0 \Rightarrow$

$\langle (y_0z_0, x_0z_0, x_0y_0), (x-x_0, y-y_0, z-z_0)\rangle = 0 \Rightarrow y_0z_0(x-x_0) + x_0z_0(y-y_0) + x_0y_0(z-z_0) = 0.$

Para descobrir os vértices P_1, P_2, P_3 devemos descobrir onde o plano corta os eixos:

P_1 é da forma $(0,0,z)$: Para $x=y=0$ o plano nos dá z:

$$y_0z_0(0-x_0) + x_0z_0(0-y_0) + x_0y_0(z-z_0) = 0 \Rightarrow \overset{(*)}{x_0y_0}(z-z_0) = 2x_0y_0z_0 \Rightarrow z-z_0 = 2z_0 \Rightarrow \boxed{z=3z_0}$$

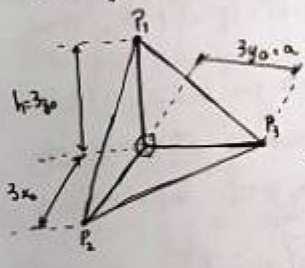
P_2 é da forma $(x,0,0)$: Para $y=z=0$ o plano nos dá x:

$$y_0z_0(x-x_0) + x_0z_0(0-y_0) + x_0y_0(0-z_0) = 0 \Rightarrow \boxed{x=3x_0} \rightarrow \text{Analogamente}$$

P_3 é da forma $(0,y,0)$: Para $x=z=0$ teremos: $\boxed{y=3y_0}$

Como o quarto vértice é a origem, teríamos um tetraedro com altura $3z_0$ e dois lados da base iguais $3x_0$ e $3y_0$. Logo:

O volume é: $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{ab}{2}\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\frac{3y_0\cdot 3x_0}{2}\cdot 3z_0 = \frac{27x_0y_0z_0}{6} = \frac{9}{2}x_0y_0z_0$



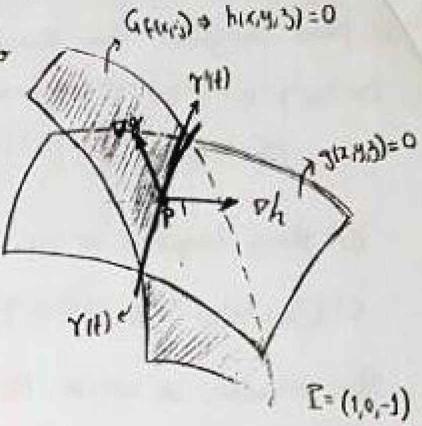
Mas como $(x_0,y_0,z_0)=Q$ pertence à superfície $f(x,y,z)=a$, temos que $x_0\cdot y_0\cdot z_0 = a \Rightarrow \boxed{V = \frac{9}{2}a}$

Logo, V não depende de $Q=(x_0,y_0,z_0)$.

(*) Obs: Eu pude cortar x_0y_0 pois sabia-se que $x_0y_0 \neq 0$, pois $a>0$ e, se alguma das coordenadas fosse nula, não satisfaríamos $f(x,y,z)=a$.

1.6) Seja $g(x,y,z) = z^3 + x^3 + yz + xy^3$. Temos uma função f tal que: $z = f(x,y)$.

Criaremos uma função $h(x,y,z) = f(x,y) - z$. A situação é tal que:



Para a reta tangente, precisamos de $\gamma'(t)$. Ele será obtido pelo produto vetorial entre ∇g e ∇h. Calculemos:

$$\nabla g(x,y,z) = \left(3x^2 + y^3,\ z + 3xy^2,\ 3z^2 + y\right);$$

$$\nabla h(x,y,z) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)$$

No ponto $P = (1,0,-1)$, teremos:

$$\nabla g(1,0,-1) = (3,-1,3);\quad \nabla h(1,0,-1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,0), \frac{\partial f}{\partial y}(1,0), -1\right)$$

Foi dado que $\nabla f(1,0) = (2,1) \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,0), \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\right) = (2,1) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 2$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1$

Logo: $\nabla h(1,0,-1) = (2,1,-1)$. Então:

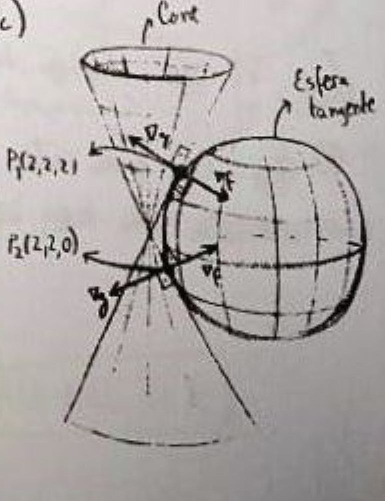
$$\gamma'(t) = \nabla g(1,0,-1) \wedge \nabla h(1,0,-1) = \det\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\hat{i} + (-9)\hat{j} + (-5)\hat{k} = (2,-9,-5)$$

Logo, a reta tangente é tal: $X = P + \lambda\gamma'(t),\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{X = (1,0,-1) + \lambda(2,-9,-5),\ \lambda \in \mathbb{R}}$ //

1.7) Seja $f(x,y,z) = (x-1)^2 + \frac{(y-2)^2}{4} - (z-1)^2$ e $g(x,y,z) = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + d$, onde $g(x,y,z) = 0$ corresponde à esfera que será tangente a $f(x,y,z) = 0$ em $(2,2,2)$ e $(2,2,0)$.

A equação $f(x,y,z) = 0$ corresponde a um cone. Como os gradientes são ortogonais às superfícies de nível, nos pontos $(2,2,2)$ e $(2,2,0)$ ocorrerá algo: $\nabla g \,//\, \nabla f$. Calculemos:

$$\nabla f(x,y,z) = \left(2x-2,\ \frac{y-2}{2},\ 2-2z\right) \text{ e } \nabla g(x,y,z) = (2x-2a,\ 2y-2b,\ 2z-2c)$$



No ponto $(2,2,2)$: $\nabla f(2,2,2) = (2,0,-2)$ e $\nabla g(2,2,2) = (4-2a, 4-2b, 4-2c)$

Nessa situação $\nabla f(2,2,2) \,//\, \nabla g(2,2,2) \Rightarrow \lambda\nabla f(2,2,2) = \nabla g(2,2,2)$, algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Logo: $\lambda(2,0,-2) = (4-2a, 4-2b, 4-2c) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2\lambda = 4-2a \\ 0 = 4-2b \\ -2\lambda = 4-2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2-a \ (1) \\ b = 2 \\ \lambda = c-2 \ (2) \end{cases}$$

$(2,2,0)$: $\nabla f(2,2,0) = (2,0,2)$ e $\nabla g(2,2,0) = (4-2a, 4-2b, -2c)$

Nessa situação, $\nabla f(2,2,0) \parallel \nabla g(2,2,0) \Rightarrow \mu \nabla f(2,2,0) = \nabla g(2,2,0)$, algum $\mu \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \mu(2,0,2) = (4-2a, 4-2b, -2c) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\mu = 4-2a \\ 0 = 4-2b \\ 2\mu = -2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 2-a \ (3) \\ b = 2 \\ \mu = -c \ (4) \end{cases}$

Montando um sistema com (1), (2), (3) e (4):

$\begin{cases} \lambda = 2-a \ (1) \\ \lambda = c-2 \ (2) \\ \mu = 2-a \ (3) \\ \mu = -c \ (4) \end{cases}$

De (1) e (3) $\Rightarrow \lambda = \mu = -c$

De (2) e (4) $\Rightarrow \lambda = c-2 \Rightarrow -c = c-2 \Rightarrow 2c = 2 \Rightarrow \boxed{c=1}$

Em (2) $\Rightarrow \boxed{\lambda = -1}$

Em (1) $\Rightarrow -1 = 2-a \Rightarrow \boxed{a=3}$

Para determinar a esfera de equação $g(x,y,z)=0$ devemos determinar d. Basta substituir um ponto que atenda à equação da esfera. Vejamos:

Esfera E: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + d = 0 \Rightarrow E: (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 + d = 0$.

Mas $(2,2,0) \in E$, logo: $(2-3)^2 + (2-2)^2 + (0-1)^2 + d = 0 \Rightarrow \boxed{d = -2}$

Logo, temos: $\boxed{E: (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2}$

1.8) Seja $V(x,y,z) = 5x^2 - 3xy + xyz$; $\nabla V(x,y,z) = (10x - 3y + yz, -3x + xz, xy)$

Note que, pelo gradiente, todas as derivadas parciais são contínuas, ou seja, $V(x,y,z)$ é diferenciável em A, conj. aberto de $\mathbb{R}^3$. Vale a Regra da cadeia e a regra para derivada direcional.

(a) $\vec{v} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, não é unitário. Calculemos: $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{3}$. Seja $\vec{w}$ o versor de $\vec{v} \Rightarrow \vec{w} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}[\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}] = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$. Seja $P=(3,4,5)$, temos:

$$\frac{\partial V}{\partial \vec{w}} = \langle \nabla V, \vec{w} \rangle \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \vec{w}}(3,4,5) = \langle \nabla V(3,4,5), \vec{w} \rangle = \langle (38,6,12), \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) \rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \langle (38,6,12), (1,1,-1) \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(38+6-12) = \frac{32}{\sqrt{3}}$$

(b) A direção de derivada máxima é a do gradiente P. Logo é a direção $(38,6,12)$. A direção de derivada mínima é a do $-\nabla V(P) = (-38,-6,-12)$.

(c) O valor máximo é a norma do gradiente: $\|\nabla V(P)\| = \|(38,6,12)\| = \sqrt{38^2+6^2+12^2} = 2\sqrt{406}$

2. Classificação de Pontos Críticos em Abertos de $\mathbb{R}^2$

(a) $z = 2x^2 + xy + 3y^2 + 10x - 9y + 11$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x + y + 10 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x + 6y - 9 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6$$

Como z é de classe $C^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 1$

Pontos críticos são aqueles onde $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$. Procuremos:

$$\begin{cases} 4x_0 + y_0 + 10 = 0 \\ x_0 + 6y_0 - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 = -3 \text{ e } y_0 = 2 \Rightarrow \begin{cases} \text{O único ponto crítico é} \\ P = (-3, 2) \end{cases}$$

Avaliando o hessiano: $H(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} \Rightarrow H(x,y) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 23 > 0$

Como $H(x,y) > 0$ para qualquer (x,y) e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ para qualquer (x,y), em particular, para $P = (-3,2)$ também, ~~isso~~ nos leva a concluir que P é ponto de mínimo.

b) $f(x,y) = z = x^2 y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2$$

Como f é de classe $C^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4xy$

Pontos críticos $\Rightarrow \nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy^2 = 0 \\ 2x^2 y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $P = (x, 0)$ ou $P' = (0, y)$

Basta uma das coordenadas zerar para satisfazer o sistema.

Avaliando o hessiano: $H(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} \Rightarrow H(x,y) = \begin{vmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{vmatrix} = -12x^2y^2$

Para os pontos $P = (x,0)$ e $P' = (0,y)$ o $H(x,y) = 0$, que é inconclusivo. Mas, olhando a função $f(x,y) = x^2y^2$, nota-se que $f(x,y) \geq 0$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, pois $x^2 \geq 0$ e $y^2 \geq 0$. Logo 0 é VALOR MÍNIMO. Então os pontos $(0, \lambda)$ e $(\lambda, 0)$ são de mínimo, com $\lambda \in \mathbb{R}$.

$(2,0)=0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,0)=0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,0)=-4 \;;\; H(2,0)=\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}=-16<0$

Como $H(2,0)<0 \Rightarrow P_3=(2,0)$ é ponto de sela

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,2)=0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,2)=0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,2)=-4 \;;\; H(0,2)=\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}=-16<0$

Como $H(0,2)<0 \Rightarrow P_4=(0,2)$ é ponto de sela

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,2)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,2)=0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,2)=4 \;;\; H(2,2)=\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}=-16<0$

Como $H(2,2)<0 \Rightarrow P_5=(2,2)$ é ponto de sela

f) $f(x,y)=z=xy\,e^{-x^2-y^2}$

$\frac{\partial f}{\partial x}=y\,e^{-x^2-y^2}(1-2x^2) \quad \frac{\partial f}{\partial y}=x\,e^{-x^2-y^2}(1-2y^2) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y\,e^{-x^2-y^2}\left[4x^3-6x\right]$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x\,e^{-x^2-y^2}\left[4y^3-6y\right]$

Como f é de classe $C^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=(1-2x^2)(1-2y^2)\,e^{-x^2-y^2}$

<u>Pontos críticos</u> $\Rightarrow \nabla f(x,y)=(0,0) \Rightarrow \begin{cases} y\,e^{-x^2-y^2}(1-2x^2)=0 \\ x\,\underbrace{e^{-x^2-y^2}}_{\text{nunca é zero!}}(1-2y^2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(1-2x^2)=0 \;(1) \\ x(1-2y^2)=0 \;(2) \end{cases}$

De (1): $y(1-2x^2)=0 \Rightarrow y=0$ ou $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Em (2): se $y=0 \Rightarrow x=0 \rightarrow P_1=(0,0)$

se $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow P_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\; P_3=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\; P_4=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\; P_5=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Vamos avaliar o hessiano de cada ponto:

$P_1)$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)=1 \;;\; H(0,0)=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1<0$

Como $H(0,0)<0 \Rightarrow P_1=(0,0)$ é ponto de sela

1) hessiano $H(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6xy^3 & 9x^2y^2 \\ 9x^2y^2 & 6x^3y \end{vmatrix} = 36x^4y^4 - 81x^4y^4$ será nulo pontos

pontos críticos para $x=0$ ou $y=0$. Isso é inconclusivo. Mas pelo fato de a função ser de natureza cúbica (x^3y^3), basta tomar (x,y) com $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Quando $x<0$ e $y<0$ ou $x>0$ e $y>0$ a função retorna um valor positivo. Se tomarmos x e y com sinais distintos (um $\oplus$ e outro $\ominus$) a função retorna valores negativos. Logo, os pontos $P=(\lambda,0)$ e $P=(0,\lambda)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, são pontos de sela.

3) $f(x,y) = z = (2x-x^2)(2y-y^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (2-2x)(2y-y^2) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = (2-2y)(2x-x^2) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2-4y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2-4x$$

Como f é de classe $C^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (2-2x)(2-2y)$

Pontos críticos $\Rightarrow \nabla f(x,y) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} (2-2x)(2y-y^2)=0 & (1) \\ (2-2y)(2x-x^2)=0 & (2) \end{cases}$

Para (1): para zerar (1) é necessário que $2-2x=0$ ou $y(2-y)=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $y=0$ ou $y=2$

Em (2): Se $x=1$, para zerar é necessário que $y=1. \Rightarrow P_1=(1,1)$

Se $y=0$, para zerar: $x(2-x)=0 \Rightarrow x=0$ ou $x=2 \rightarrow P_2=(0,0)$ e $P_3=(2,0)$

Se $y=2$, para zerar: $x(2-x)=0 \Rightarrow x=0$ ou $x=2 \rightarrow P_4=(0,2)$ e $P_5=(2,2)$

Vamos avaliar o hessiano para cada ponto:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = -2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = -2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)=0\ ; \ H(1,1) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

Com $H(1,1) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) < 0 \Rightarrow P_1$ é ponto de máximo.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4\ ; \ H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

Como $H(0,0) < 0 \Rightarrow P_2 = (0,0)$ é ponto de sela

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2e^{-1}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$; $H\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{vmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -2e^{-1} \end{vmatrix} = 4e^{-2} > 0$

Como $H\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0 \Rightarrow P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ é ponto de máximo

P_3) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_3) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_3) = -2e^{-1}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_3) = 0$; $H(P_3) = \begin{vmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -2e^{-1} \end{vmatrix} = 4e^{-2} > 0$

Como $H(P_3) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_3) < 0 \Rightarrow P_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ é ponto de máximo

P_4) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_4) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_4) = 2e^{-1}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_4) = 0$; $H(P_4) = \begin{vmatrix} 2e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{vmatrix} = 4e^{-2} > 0$

Como $H(P_4) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_4) > 0 \Rightarrow P_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ é ponto de mínimo

P_5) Analogamente a P_4, $P_5 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ é ponto de mínimo.

2.2) $f(x,y) = 2ax^4 + y^2 - ax^2 - 2y$

$\nabla f(x,y) = (8ax^3 - 2ax,\ 2y - 2)$

Pontos críticos: $\nabla f = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 8ax^3 - 2ax = 0 \\ 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax(4x^2-1) = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ $x = 0$ ou $x = \pm\frac{1}{2}$ e $y = 1$

Logo, temos 3 pontos críticos PARA $a \neq 0$: $P_1(0,1)$; $P_2 = \left(\frac{1}{2},1\right)$; $P_3 = \left(-\frac{1}{2},1\right)$;

Derivadas de 2ª ordem: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24ax^2 - 2a$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$

classe C^2

Hessiana: $H(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 24ax^2 - 2a & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4(12ax^2 - a)$

Para os pontos críticos:

$H(0,1) = -4a$ $\quad H\left(\frac{1}{2},1\right) = H\left(-\frac{1}{2},1\right) = 8a$

Verificando $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2a(12x^2 - 1)$

$P_1 = (0,1) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = -2a$ $\qquad$ $P_2(\frac{1}{2},1)$ e $P_3(-\frac{1}{2},1) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_3) = 4a$

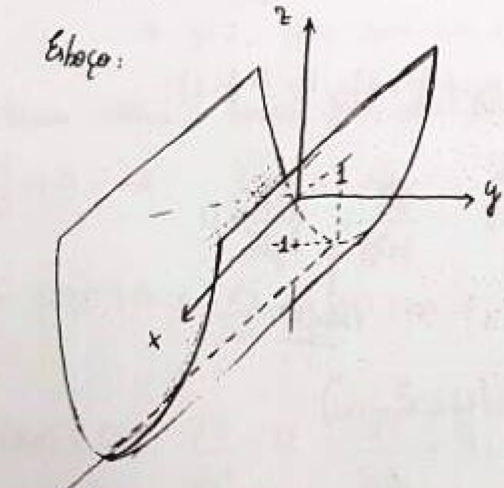
Respostas: (a) Para termos um ponto de sela e dois pontos de mínimo, precisamos de um valor de $\underline{a}$ tal que o hessiano dê negativo para 1 ponto e positivo para os outros dois pontos. Ainda, esse valor deve ser tal que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ para os pontos de hessiano positivo. Isso é obtido para $a > 0$. (Cálculos acima)

(b) Para termos dois pontos de sela e um ponto de mínimo, precisamos de um $\underline{a}$ tal que o hessiano seja negativo para 2 pontos e positivo para o outro. Ainda, neste ponto no qual o hessiano é ⊕, necessitamos que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$. Isso é obtido para $\underline{a} < 0$.

(c) Não existe, pois para $a > 0$ há 1 pto. de sela e 2 ptos. de mín. e para $a < 0$ há 2 ptos. de sela e 1 pto. de mín. Para $a = 0$ há infinitos pontos de mínimo (explicação no item (d)).

(d) Existe $a = 0$. Neste caso, o gradiente f é $\nabla f(x,y) = (0, 2y-2)$. Logo, para <u>QUALQUER</u> ponto com $y = 1$, o gradiente é nulo. A função fica $f(x,y) = y^2 - 2y \sim$ <u>Cone parabólico</u>. Qualquer ponto do tipo $(\lambda, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ é ponto crítico.

Esboço:

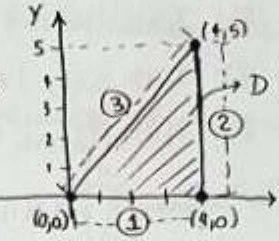


$\sim$ { Reta que contém os pontos críticos $(\lambda, 1)$

3. Máximos e Mínimos em Conjuntos Compactos

(a) $f(x,y) = 5 - 3x + 4y$; D = triângulo de vértices $(0,0)$; $(4,0)$; $(4,5)$; (Interior incluso)

① Interior: Um ponto de máx/min interior possui $\nabla f = (0,0)$ nele. Como $\nabla f = (-3,4,0)$, para qualquer $(x,y) \in D$, não há pontos críticos no interior.



② Fronteira: Parametrizei a fronteira:

Região ①: $\gamma_1(t) = (t,0)$, $t \in [0,4]$.

Região ②: $\gamma_2(t) = (4,t)$, $t \in [0,5]$

Região ③: $\gamma_3(t) = \left(t, \frac{5}{4}t\right)$, $t \in [0,4] \Rightarrow \{$ É a reta de coeficiente angular $\frac{5}{4}$: $y = \frac{5}{4}x$

Fazendo a composta: $- f(\gamma_1(t)) = f(t,0) = 5 - 3t$; $f'(\gamma_1(t)) = -3 \Rightarrow$ Derivada em $]0,4[$

$- f(\gamma_2(t)) = f(4,t) = 4t - 7$; $f'(\gamma_2(t)) = 4 \Rightarrow$ Derivada em $]0,5[$

$- f(\gamma_3(t)) = f(t, \frac{5}{4}t) = 5 + 2t$; $f'(\gamma_3(t)) = 2 \Rightarrow$ Derivada em $]0,4[$

Qualquer ponto pertencente às curvas ①, ② e ③ que fosse ponto de máx/min também seria ponto de máx/min das compostas $f(\gamma(t))$ acima (☝). Como todas as derivadas deram não nulas, não há pontos críticos nos intervalos abertos. Mas, graças ao teorema de Weierstrass sabe-se que se não há máx/min no interior de D e nem nos intervalos abertos que parametrizam a fronteira, certamente haverá nos extremos do intervalo. Vejamos os pontos $(0,0)$, $(4,0)$ e $(4,5)$:

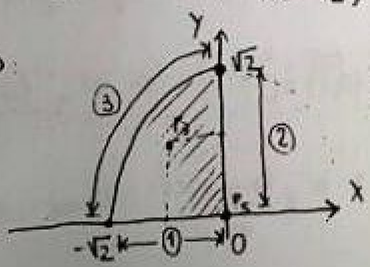
$f(0,0) = 5$; $f(4,0) = -7$; $f(4,5) = 13 \Longrightarrow$ [Desse modo, o valor máximo é 13, cujo pto. de máx é $(4,5)$. O mínimo é -7, com pto. de mín $(4,0)$.

(b) $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 2,\ x \leq 0,\ y \geq 0\}$

Como resolvido no item f. da questão 21 $\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = ye^{-x^2-y^2}(1-2x^2)$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{-x^2-y^2}(1-2y^2)$

Os pontos críticos são: $P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $P_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $P_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $P_5 = (0,0)$

Região D:



$\rightarrow \frac{1}{4}$ de circunferência de raio $\sqrt{2}$, interior incluso, $x \leq 0$ e $y \geq 0$.

Pelo desenho, nota-se que P_1, P_2 e P_4 estão FORA de D

Agora, parametrizaremos a fronteira:

Região ①: $\gamma_1(t) = (t, 0)$; $t \in]-\sqrt{2}, 0[$

Região ②: $\gamma_2(t) = (0, t)$; $t \in]0, \sqrt{2}[$

Região ③: $\gamma_3(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t)$, $t \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ $\Rightarrow \{$ Parametrização usual de circunferência

Fazendo as compostas: $- f(\gamma_1(t)) = f(t,0) = 0$

$- f(\gamma_2(t)) = f(0,t) = 0$

$- f(\gamma_3(t)) = f(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t) = (\sqrt{2}\cos t)(\sqrt{2}\sin t)\, e^{-(\sqrt{2}\cos t)^2 - (\sqrt{2}\sin t)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\gamma_3(t)) = 2\sin t \cos t\, e^{-2\cos^2 t - 2\sin^2 t} = \sin(2t)\, e^{-2\underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{=1}} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\gamma_3(t)) = \sin(2t)\, e^{-2}$

Façamos a análise de $f(\gamma_3(t))$: $\frac{d}{dt}(f(\gamma_3(t))) = \frac{d}{dt}[\sin(2t)\, \overset{\text{nº real}}{e^{-2}}] = 2\cos(2t) \cdot e^{-2}$

$\frac{d^2}{dt^2}[f(\gamma_3(t))] = \frac{d}{dt}[2\cos(2t) \cdot e^{-2}] = -4\sin(2t)\, e^{-2}$

Para achar os pontos críticos de $f(\gamma_3(t))$, devemos achar $t \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ tal que: $f'(\gamma_3(t)) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos(2t) \cdot e^{-2} = 0 \Leftrightarrow \cos(2t) = 0 \Leftrightarrow 2t = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Para $k = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{3\pi}{4} \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$; Para $t = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \gamma_3\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right), \sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow P_6 = \gamma_3\left(\frac{3\pi}{4}\right) = (-1, 1) \Rightarrow \boxed{P_6 = (-1,1)}$

Sabemos que $f(P_3) = -\frac{1}{2e}$ (exercício 2.1-f); $f(P_5) = 0$; $f(\gamma_1(t)) = f(\gamma_2(t)) = 0$;

$f(P_6) = (-1)(1)\, e^{-(-1)^2 - (1)^2} \Rightarrow f(P_6) = -e^{-2}$;

Mas note que: $e^2 > 2e \Rightarrow \frac{1}{e^2} < \frac{1}{2e} \Rightarrow -\frac{1}{e^2} > -\frac{1}{2e} \Rightarrow -e^{-2} > -\frac{1}{2e} \Rightarrow f(P_6) > f(P_3)$.

Pelo teo. de Weierstrass, devemos verificar nos extremos do intervalo, ou seja, nos pontos $(0,\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2},0)$

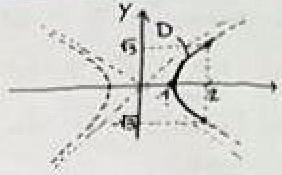
Temos: $f(0,\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, 0) = 0$. Comparando tudo isso, temos que:

Ponto de mín: $P_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $f(P_3) = -\frac{1}{2e}$

Pontos de máx: $(\lambda, 0)$ e $(0, \mu)$, com $\begin{cases} \lambda \in [-\sqrt{2}, 0] \\ \mu \in [0, \sqrt{2}] \end{cases}$; $f(\lambda, 0) = f(0, \lambda) = 0$;

(c) $f(x,y) = xy$; $\nabla f(x,y) = (y,x)$;

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1,\ x \in [1,2]\} \to$ hipérbole



Parametrizemos D:

- Se $x = 2 \Rightarrow (2)^2 - y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$;
- Parametrização: $\gamma(t) = (\sec t, \operatorname{tg} t)$, $t \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$; $\gamma(t)$ é a parametrização usual da hipérbole; O intervalo $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ foi escolhido de forma que $1 \leq x \leq 2$ e $y \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

Note que: $\gamma(-\frac{\pi}{3}) = (2, -\sqrt{3})$ e $\gamma(\frac{\pi}{3}) = (2, \sqrt{3})$.

Fazendo a composta: • $f(\gamma(t)) = f(\sec t, \operatorname{tg} t) = \sec t \cdot \operatorname{tg} t$;

• $f'(\gamma(t)) = \sec t \cdot (\operatorname{tg} t)' + (\sec t)' \cdot \operatorname{tg} t = \sec t(\sec^2 t) + (\sec t \cdot \operatorname{tg} t) \cdot \operatorname{tg} t \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(\gamma(t)) = \sec^3 t + \sec t \cdot \operatorname{tg}^2 t = \sec t(\sec^2 t + \operatorname{tg}^2 t)$; /* se $\sec^2 t = 1 + \operatorname{tg}^2 t \Rightarrow \sec^2 t + \operatorname{tg}^2 t = 1 + 2\operatorname{tg}^2 t$

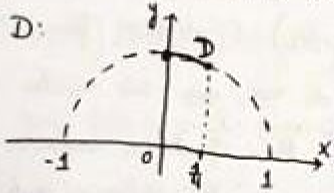
$\Rightarrow f'(\gamma(t)) = \sec t(2\operatorname{tg}^2 t + 1)$; Para $t \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$, $\sec t > 0$ e $2\operatorname{tg}^2 t + 1 > 0$, logo, $f'(\gamma(t)) > 0$, $\forall t \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$. Então não há pontos críticos em $f(\gamma(t))$. Pelo teo. de Weierstrass devemos ver nos extremos $-\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{3}$. Vejamos:

$f(\gamma(-\frac{\pi}{3})) = \sec(-\frac{\pi}{3}) \cdot \operatorname{tg}(-\frac{\pi}{3}) \Rightarrow f(2, -\sqrt{3}) = -2\sqrt{3}$; ⇝ Valor mínimo; Pto. mín $= (2, -\sqrt{3})$

$f(\gamma(\frac{\pi}{3})) = \sec(\frac{\pi}{3}) \cdot \operatorname{tg}(\frac{\pi}{3}) \Rightarrow f(2, \sqrt{2}) = 2\sqrt{3}$; ⇝ Valor máximo; Pto. máx $= (2, \sqrt{3})$

(d) $D = \{x^2 + y^2 = 1,\ x \in [0, \frac{1}{4}],\ y \geq 0\}$; $f(x,y) = 2x^3 + y^4$

Esboço de D:



⇝ Podemos parametrizar como uma circunferência usual.

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [\arccos(\frac{1}{4}), \frac{\pi}{2}]$

O intervalo é tal que $x \in [0, 1/4]$. (Lembre que $\cos(\arccos(\frac{1}{4})) = \frac{1}{4}$).

Fazendo a composta: $f(\gamma(t)) = f(\cos t, \sin t) = 2\cos^3 t + \sin^4 t$;

Derivando: $f'(\gamma(t)) = 2 \cdot (\cos^3 t)' + (\sin^4 t)' \Rightarrow f'(\gamma(t)) = -6\cos^2 t \sin t + 4\sin^3 t \cos t \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(\gamma(t)) = \underbrace{2\sin t \cos t}_{= \sin(2t)} [2\sin^2 t - 3\cos t] = \sin(2t)[2(1 - \cos^2 t) - 3\cos t] \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(\gamma(t)) = -\sin(2t)[\underbrace{2\cos^2 t + 3\cos t - 2}_{(I)}] \Rightarrow$ {Fatore (I) como uma equação de 2° grau} $\Rightarrow$

$\Rightarrow f'(\gamma(t)) = -\sin(2t)[2(\cos t + 2)(\cos t - \frac{1}{2})]$; Então, $f'(\gamma(t)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2t) = 0 \text{ ou} \\ \cos t = \frac{1}{2} \end{cases}$

... que a derivada $f'(\gamma(t))$ é avaliada no ABERTO $]\arccos(\frac{1}{4}), \frac{\pi}{2}[$. Temos que $\sin(2t) = 0 \Leftrightarrow 2t = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow t = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Percebe que NÃO existe $k \in \mathbb{Z}$ de modo que $t \in]\arccos(\frac{1}{4}), \frac{\pi}{2}[$. Para $k=1$, temos $t = \frac{\pi}{2}$, que será avaliado posteriormente com EXTREMO de INTERVALO.

• $\cos t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ou $t = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Graficamente nota-se que NÃO EXISTE $t \in]\arccos(\frac{1}{4}), \frac{\pi}{2}[$. Isso pois $\arccos(\frac{1}{4}) > \frac{\pi}{3}$ ⇝

$\theta = \arccos(\frac{1}{4})$

Agora, avaliaremos os extremos do intervalo:

$t = \frac{\pi}{2}$) $f(\gamma(\frac{\pi}{2})) = f(\cos\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2}) = f(0,1) = 2\cdot 0^3 + 1^4 = 1$

$t = \arccos(\frac{1}{4})$) se $x = \frac{1}{4}$, temos: $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (\frac{1}{4})^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - \frac{1}{16} \Rightarrow y^2 = \frac{15}{16} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$

Como $y > 0$ em D, temos: $f(\gamma(\arccos(\frac{1}{4}))) = f(\cos(\arccos(\frac{1}{4})), \sin(\arccos(\frac{1}{4}))) = f(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}) = 2(\frac{1}{4})^3 + (\frac{\sqrt{15}}{4})^4 = \frac{2}{64} + (\frac{15}{16})^2 = \frac{1}{32} + (\frac{15}{16})^2 \approx 0{,}91 < 1$

Logo: Ponto mín $= (\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4})$; Valor mín: $\frac{1}{32} + (\frac{15}{16})^2$

Ponto Max $= (0,1)$; Valor máx: 1

3.2 - (a) $f(x,y) = xy$; $\nabla f = (y,x)$

Condição: $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 64 = 0$; seja $g(x,y) = 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 64$

Então, os pontos a serem avaliados são aqueles pertencentes a $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}$.

Vale o Teo. de Lagrange pois $\nabla g(x,y) = (10x + 6y, 10y + 6x)$ é $\neq (0,0)$ para $(x,y) \neq (0,0)$ e $(x,y) = (0,0)$ não atende a $g(x,y) = 0$. Logo, pontos de max/min são aqueles em que: $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \Rightarrow (y,x) = \lambda(10x + 6y, 10y + 6x)$. Para facilitar, resolverei a condição $\nabla g(x,y) = \mu \nabla f(x,y)$, pois se ∇f e ∇g são múltiplos, não faz diferença onde botamos o escalar; Temos: $(10x + 6y, 10y + 6x) = \mu(y,x)$. Temos:

$$\begin{cases} \mu y = 10x + 6y \\ \mu x = 10y + 6x \\ 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 64 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\mu - 6)y = 10x & (1) \\ (\mu - 6)x = 10y & (2) \\ 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 64 = 0 & (3) \end{cases}$$

(1): $x = \frac{(\mu - 6)}{10}y$, se $\mu \neq 6$

Em (2): $(\mu - 6)\cdot\frac{(\mu - 6)}{10}y = 10y \Rightarrow$ se $y \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{(\mu - 6)^2}{10} = 10 \Rightarrow (\mu - 6)^2 = 100 \Rightarrow \mu - 6 = \pm 10 \Rightarrow \mu = \pm 10 + 6 \Rightarrow \boxed{\mu = 16}$ ou $\boxed{\mu = -4}$

Se $\mu = 16$, por (1): $x = \frac{(\mu - 6)}{10}y \Rightarrow x = \frac{(16 - 6)}{10}y \Rightarrow \boxed{x = y}$

Se $\mu = -4$, por (1): $x = -y$

10) Substituindo em (3): $x=y \Rightarrow 5y^2+5y^2+6y\cdot y-64=0 \Rightarrow 16y^2=64 \Rightarrow y=\pm 2$;
Como no caso $\mu=16$, $x=y$, teremos 2 pontos: $P_1=(2,2)$ e $P_2=(-2,-2)$

Para $\mu=-4$, em (3): $x=-y \Rightarrow 5(-y)^2+5y^2+6(-y)y-64=0 \Rightarrow 4y^2=64 \Rightarrow y=\pm 4$;
Como aqui $x=-y$, temos mais 2 pontos $\Rightarrow P_3=(4,-4)$ e $P_4=(-4,4)$.

Isso tudo foi calculado assumindo $\mu \neq 6$. Mas, se $\mu=6$, $x=y=0$, que não satisfaz (3). Logo essas são as soluções. Vejamos os 4 valores em f:

$$f(P_1)=f(2,2)=4;\quad f(P_2)=f(-2,-2)=4;\quad f(P_3)=f(P_4)=f(4,-4)=f(-4,4)=-16;$$

Então: $\begin{cases} \underline{\text{Valor}}\ \underline{\text{Max}}: 4;\ \underline{\text{Pontos}}: P_1=(2,2) \text{ e } P_2=(-2,-2) \\ \underline{\text{Valor}}\ \underline{\text{Min}}: -16;\ \underline{\text{Pontos}}: P_3=(4,-4) \text{ e } P_4=(-4,4) \end{cases}$

(b) $f(x,y,z)=xyz$; Condição: $x^2+2y^2+3z^2=6$; Seja $g(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2$; $\Rightarrow \nabla g=(2x,4y,6z)$

Avaliaremos os pontos em $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: g(x,y,z)=6\}$. Note $\nabla g\neq(0,0,0)$ se $(x,y,z)\neq(0,0,0)$. E $(0,0,0)$ não satisfaz $g(x,y,z)=6$. Usaremos, então, Lagrange. Com $\nabla f=\lambda\nabla g \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)=\lambda(2x,4y,6z) \Rightarrow (yz, xz, xy)=\lambda(2x,4y,6z) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} yz=2\lambda x \ (1) \\ xz=4\lambda y \ (2) \\ xy=6\lambda z \ (3) \\ x^2+2y^2+3z^2=6 \ (4) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Se } \left.\begin{array}{r} x,y,z\neq 0 \\ \lambda\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{(1)}{(2)}: \frac{yz}{xz}=\frac{2\lambda x}{4\lambda y} \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{x}{2y} \Rightarrow x^2=2y^2 \ (5) \\ \text{Se } \left.\begin{array}{r} x,y,z\neq 0 \\ \lambda\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{(2)}{(3)}: \frac{xz}{xy}=\frac{4\lambda y}{6\lambda z} \Rightarrow \frac{z}{y}=\frac{2y}{3z} \Rightarrow 3z^2=2y^2 \ (6) \end{array}$$

Substituindo (5) e (6) em (4) temos: $2y^2+2y^2+2y^2=6 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$;

Em (6): $z^2=\frac{2}{3}\underbrace{y^2}_{=1} \Rightarrow z=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$; Em (5): $x^2=2y^2 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

Isso nos dá $\underline{\text{OITO}}$ pontos: $P=\left(\pm\sqrt{2}, \pm 1, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \to \{$Basta permutar os sinais de $\oplus$ e $\ominus$.

Não interessa o caso em que $x=0$ ou $y=0$ ou $z=0$, pois o f seria nulo nesses casos.

Vejamos os valores: $f\left(\sqrt{2},1,\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=f\left(-\sqrt{2},-1,\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=f\left(-\sqrt{2},1,-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=f\left(\sqrt{2},-1,-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}} \to$ Valor máximo

$$f\left(-\sqrt{2},1,\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)=f\left(\sqrt{2},-1,\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)=f\left(\sqrt{2},1,-\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)=f\left(-\sqrt{2},-1,-\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)=-\frac{2}{\sqrt{3}}$$ $\to$ Valor mínimo

(c) $f(x,y,z)=x^2y^2z^2$; $\nabla f(x,y,z)=(2xy^2z^2, 2x^2yz^2, 2x^2y^2z)$

Condição: $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2=1\}$; Seja $\begin{cases} g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2; \\ \nabla g(x,y,z)=(2x,2y,2z); \end{cases}$

Novamente, $\nabla g\neq(0,0,0)$ para atender $g(x,y,z)=1$; Logo, pode-se usar $\underline{\text{Lagrange}}$.

Procuremos os pontos onde: $\nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow 2(xy^2z^2, x^2yz^2, x^2y^2z) = 2\lambda(x,y,z) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} xy^2z^2 = \lambda x \ (1) \\ x^2yz^2 = \lambda y \ (2) \\ x^2y^2z = \lambda z \ (3) \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \ (4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Se } x\neq 0,\ y\neq 0,\ z\neq 0 \text{ e } \lambda\neq 0:\ y^2z^2=\lambda;\ x^2z^2=\lambda;\ x^2y^2=\lambda; \Rightarrow \\ \Rightarrow y^2=x^2;\ y^2=z^2;\ z^2=x^2; \end{cases}$$

Substituindo em (4): $3x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}};\ y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}};\ z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Note que $x=0$ ou $y=0$ ou $z=0$, não simultaneamente, (1), (2) e (3) são satisfeitas. Por exemplo, se $x=0$, em (4) teríamos $\Rightarrow y^2+z^2=1 \rightarrow$ Infinitos pontos satisfazem. Ou, se $x=0$ e $y=0$, teríamos $z^2=1 \Rightarrow z=\pm 1$, o que gera dois pontos. Em suma, qualquer solução que tenha 1 das coordenadas nulas ou duas nulas e a terceira igual a ± 1 satisfaz as equações. Vejamos os valores:

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left[\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]^3 = \left[\frac{1}{3}\right]^3 = \frac{1}{27} \rightsquigarrow \text{Valor máximo}$$

$f(a,b,0) = f(0,a,b) = f(a,0,b) = f(0,0,\pm 1) = f(0,\pm 1,0) = f(\pm 1,0,0) = 0 \Rightarrow$ Valor mínimo

obs: $a,b \in \mathbb{R}$ respeitam que $a^2+b^2=1$.

33. (a) $f(x,y,z) = (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2-14 \Rightarrow \{\text{equivale a } x^2-2x+y^2-4y+z^2-6z\}$

$R = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 56\}$; Seja $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$; $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$;

Avaliaremos no interior e na fronteira:

- Interior: $\nabla f = (2(x-1), 2(y-2), 2(z-3))$. No interior, os pontos críticos são aqueles nos quais $\nabla f = (0,0,0)$. Nesse ~~caso~~ caso, o único ponto é $P_1 = (1,2,3)$. O valor no ponto é: $f(P_1) = f(1,2,3) = -14$. Obs: P_1 atende a $x^2+y^2+z^2 \leq 56$.

- Fronteira: Será avaliada com Lagrange. Já vimos no interior (pontos com $x^2+y^2+z^2 < 56$). Agora avaliaremos os pontos ~~no~~ que atendem $x^2+y^2+z^2 = 56$. Temos que:

$\nabla f = \lambda \nabla g \Leftrightarrow 2(x-1, y-2, z-3) = 2\lambda(x,y,z) \Leftrightarrow (x-1, y-2, z-3) = \lambda(x,y,z) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \lambda x = x-1 \\ \lambda y = y-2 \\ \lambda z = z-3 \\ x^2+y^2+z^2=56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x = 1 \ (1) \\ (1-\lambda)y = 2 \ (2) \\ (1-\lambda)z = 3 \ (3) \\ x^2+y^2+z^2 = 56 \ (4) \end{cases} \Rightarrow \text{se } \lambda\neq 1: \left| x = \frac{1}{1-\lambda};\ y = \frac{2}{1-\lambda};\ z = \frac{3}{1-\lambda} \right.$$

Substituindo em (4): $\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{1-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{3}{1-\lambda}\right)^2 = 56 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{14}{(1-\lambda)^2} = 56 \Rightarrow (1-\lambda)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow 1-\lambda = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \lambda = \frac{3}{2} \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Se $\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2;\ y = 4;\ z = 6;$ $P_2 = (2,4,6);$

Se $\lambda = \frac{3}{2} \Rightarrow x = -2;\ y = -4;\ z = -6;$ $P_3 = (-2,-4,-6);$

ficando valores:

$f(P_1) = f(1,2,3) = -14$; $f(P_2) = f(2,4,6) = 0$; $f(P_3) = f(-2,-4,-6) = 112$;

↳ Valor mínimo ↳ Valor máximo.

(b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4xy - 4z + 3x$; $\nabla f = (2x-4y+3;\ 2y-4x;\ 4z-4)$

$R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z \leq 4 \text{ e } x,y,z \geq 0\}$

Seja $g(x,y,z) = x+y+z$; $\nabla g(x,y,z) = (1,1,1)$.

Avaliaremos no interior e na fronteira:

• Interior: Os pontos críticos são tais que $\nabla f = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4y+3=0 \\ y-2x=0 \\ 4z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

Região do problema

O ponto $P_1 = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) \in R$, pois $x,y,z > 0$ e $x+y+z < 4$.

• Fronteira: Utilizaremos Lagrange para avaliar na região na qual $x+y+z=4$. Como $\nabla g \neq (0,0,0)$, temos: $\nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow (2x-4y+3,\ 2y-4x,\ 4z-4) = \lambda(1,1,1) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2x-4y+3=\lambda & (1) \\ 2y-4x=\lambda & (2) \\ 4z-4=\lambda & (3) \\ x+y+z=4 & (4) \end{cases} \Rightarrow$$

Por (3): $z = \frac{\lambda+4}{4}$ (7)

Fazendo (2)=(1): $2y-4x = 2x-4y+3 \Rightarrow 6y = 6x+3 \Rightarrow y = \frac{2x+1}{2}$ (5)

Substituindo (5) em (2): $1-2x = \lambda \Rightarrow x = \frac{1-\lambda}{2}$ (6)

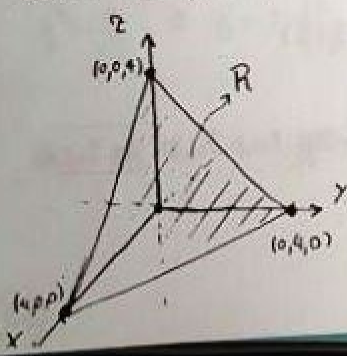
Substituindo (5), (6) e (7) em (4): $\frac{1-\lambda}{2} + \frac{2\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)+1}{2} + \frac{\lambda+4}{4} = 4 \Rightarrow 6 - 4\lambda + \lambda + 4 = 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3\lambda = 6 \Rightarrow \boxed{\lambda = -2}$; Se $\lambda = -2$: $x = \frac{3}{2}$; $y = 2$; $z = \frac{1}{2}$; $\Rightarrow P_2 = \left(\frac{3}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)$; e $P_2 \in R$, pois

$x+y+z \leq 4$ e $x,y,z \geq 0$.

Vejamos os valores: $f(P_1) = f\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) = -\frac{11}{4}$.

Ainda há pontos para serem analizados. Vejamos a região R:



A região R é um tetraedro. Analizando os pontos de vértice $(4,0,0)$; $(0,4,0)$ e $(0,0,4)$, temos: $f(4,0,0) = 28$; $f(0,4,0) = 16$ e $f(0,0,4) = 16$.

Logo, o valor máximo é $f(4,0,0) = 28$ e o mínimo é o $f\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) = -\frac{11}{4}$

3.4. (a) $f(x,y)=x^3y$; $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+2y^2=1\}$

Seja $g(x,y)=x^2+2y^2$. Então, C é tal que: $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: g(x,y)=1\}$.

Sabemos que $\nabla f(x,y)=(3x^2y, x^3)$ e $\nabla g(x,y)=(2x,4y)$. Para usar Lagrange, $\nabla g\neq (0$ mas como $\nabla g=(0,0)\Leftrightarrow x=0$ e $y=0$, não há problema, pois $(0,0)$ não satisfaz $g(x,y)=1$.

Por Lagrange, os candidatos a max/min em C atenderão à condição $\nabla f=\lambda\nabla g$, pelo para algum $\lambda\in\mathbb{R}$. Temos: $\nabla f=\lambda\nabla g \Rightarrow (3x^2y, x^3)=\lambda(2x,4y)\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 3x^2y=2\lambda x & (1)\\ x^3=4\lambda y & (2)\\ x^2+2y^2=1 & (3)\end{cases}$$

Já se $x\neq 0$ e $y\neq 0 \Rightarrow \frac{(2)}{(1)}: \frac{x^3}{3x^2y}=\frac{4\lambda y}{2\lambda x} \Rightarrow \frac{x}{3y}=\frac{2y}{x}\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{3}=2y^2}$

Substituindo em (3): $x^2+2y^2=1 \Rightarrow x^2+\frac{x^2}{3}=1 \Rightarrow \frac{4}{3}x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{3}{4}$

$\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; se $2y^2=\frac{x^2}{3}\Rightarrow 2y^2=\frac{1}{4}\Rightarrow y^2=\frac{1}{8}\Rightarrow y=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Isso nos dá 4 pontos: $P_1=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$; $P_2=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$; $P_3=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ e $P_4=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

Calculando valores: $f(P_1)=f(P_2)=\frac{3\sqrt{3}}{16\sqrt{2}}$; $f(P_3)=f(P_4)=-\frac{3\sqrt{3}}{16\sqrt{2}}$.

Então: Pontos de máx: $\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$; Pontos de min: $\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

(b) $f(x,y,z)=x-z$; $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: \underbrace{x^2+y^2=z}_{(I)}$ e $\underbrace{z=2y}_{(II)}\}$

(I) $x^2+y^2=z \Leftrightarrow x^2+y^2-z=0$; Seja $g(x,y,z)=x^2+y^2-z$.

(II) $z=2y \Leftrightarrow z-2y=0$; Seja $h(x,y,z)=z-2y$

Para realizar Lagrange, é necessário que as condições sejam definidas por funções. Pelo feito em (I) e (II), temos: $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: g(x,y,z)=0$ e $h(x,y,z)=0\}$.

Calculando os gradientes: $\nabla f(x,y,z)=(1,0,-1)$; $\nabla g(x,y,z)=(2x,2y,-1)$ e $\nabla h(x,y,z)=(0,-2,1)$

Em Lagrange para condição dupla, ocorre que: $\nabla f=\lambda\nabla g+\mu\nabla h$, para algum $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. (∇f é combinação linear de ∇g e ∇h). Temos: $(1,0,1)=\lambda(2x,2y,-1)+\mu(0,-2,1)\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2\lambda x=1 & (1)\\ 2\lambda y-2\mu=0 & (2)\\ -\lambda+\mu=-1 & (3)\\ x^2+y^2=z & (4)\\ z=2y & (5)\end{cases}$$

Por (2): $2\lambda y-2\mu=0\Rightarrow \boxed{\mu=\lambda y}$

Em (3): $-\lambda+\mu=-1 \Rightarrow -\lambda+\lambda y=-1\Rightarrow (y-1)\lambda=-1$ (6)

Por (1): $2\lambda x=1\Rightarrow -1=-2\lambda x$

Em (6): $(y-1)\lambda=-2\lambda x \Rightarrow$ se $\lambda\neq 0$, simplificando $\Rightarrow y-1=-2x \Rightarrow \boxed{y=1-2x}$

Ainda por (6): $\boxed{x=\frac{1-y}{2}}$ (7)

(15)

(iv) $11x^2 + 11y^2 + 14z^2 + 2xy + 8xz - 8yz - 12x + 12y + 12z =$

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 1 & 4 \\ 1 & 11 & -4 \\ 4 & -4 & 14 \end{bmatrix} \qquad P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 36\lambda^2 - 396\lambda + 1296 = 0$$

$$\lambda_1 = 6;\ \lambda_2 = 12,\ \lambda_3 = 18$$

V(6)

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & -4 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} 5x + y + 4z = 0 \\ x + 5y - 4z = 0 \\ 4x - 4y + 8z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ x = -y \end{cases}$$

$$V(6) = \left[\underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1)}_{\vec{e}_1}\right]$$

V(12)

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow V(12) = \left[\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)}_{\vec{e}_2}\right]$$

V(18)

$$\begin{bmatrix} -7 & 1 & 4 \\ 1 & -7 & -4 \\ 4 & -4 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} x = -y \\ z = -2y \end{cases} \Rightarrow V(18) = \left[\overbrace{\frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)}^{\vec{e}_3}\right]$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad \begin{cases} x = (1/\sqrt{3})x' + (1/\sqrt{2})y' + (1/\sqrt{6})z' \\ y = (-1/\sqrt{3})x' + (1/\sqrt{2})y' - (1/\sqrt{6})z' \\ z = (-1/\sqrt{3})x' + (2/\sqrt{6})z' \end{cases}$$

$\Sigma_1 = \{0; \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$

$$6x'^2 + 12y'^2 + 18z'^2 - \frac{12}{\sqrt{3}}x' - \frac{12}{\sqrt{2}}y' - \frac{12}{\sqrt{6}}z' - \frac{12}{\sqrt{3}}x' + \frac{12}{\sqrt{2}}y' - \frac{12}{\sqrt{6}}z' - \frac{12}{\sqrt{3}}x' +$$

$$+ \frac{24}{\sqrt{6}}z' = 6 \Rightarrow 6x'^2 + 12y'^2 + 18z'^2 - 12\sqrt{3}x' = 6$$

Isso foi calculado para $\lambda \neq 0$. Se $\lambda = 0$, temos: Por (1) ou (2): $\boxed{\mu = -\frac{1}{4}}$

Substituindo em (3): $1 = -\frac{1}{2}z \Rightarrow \boxed{z = -2}$

Por (5): $z^2 = 4x + 4y \Rightarrow (-2)^2 = 4x + 4y \Rightarrow 4 = 4x + 4y \Rightarrow x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$

Substituindo em (4): $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + (1-x)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + 1 - 2x + x^2 = 1 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 2 \end{cases}$

Se $x = 0 \Rightarrow y = 1$; se $x = 2 \Rightarrow y = -1$;

Isso nos fornece dois pontos: $(0,1,-2)$ e $\boxed{(2,-1,-2)}$ ↦ Que não é válido pois $(2)^2 + (-1)^2 \neq 1$
↳ Não atende a eq. (4).

Verificando valores: $f(0,1,-2) = -1$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2\sqrt[4]{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} + 2\sqrt[4]{2}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -2\sqrt[4]{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} - 2\sqrt[4]{2}$$

Analogamente ao sistema acima, podemos fazer $x = 1 - y$ e substituir em (4), dando: $y(y-2) = 0$. O que possibilita dizer que se $y = 0 \Rightarrow x = 1$ e se $y = 2 \Rightarrow x = -1$ (não é válido, pelo motivo dito acima). Então, há ainda o ponto $(1,0,-2)$, no qual: $f(1,0,-2) = -1$.

Obs: $\frac{2}{\sqrt{2}} - 2\sqrt[4]{2} \approx -0{,}964 \Rightarrow -1 < \frac{2}{\sqrt{2}} - 2\sqrt[4]{2}$

Então: Pontos de mínimo: $(0,1,-2)$ e $(1,0,-2)$

Pontos de máximo: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2\sqrt[4]{2}\right)$

(d) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$; $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } x + y + z = 1\}$

Sejam $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ e $h(x,y,z) = x + y + z$; Temos que $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = 1 \text{ e } h(x,y,z) = 1\}$

Sabemos que: $\nabla f = (3x^2, 3y^2, 3z^2)$; $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$; $\nabla h = (1,1,1)$. Por Lagrange:

$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h \Leftrightarrow (3x^2, 3y^2, 3z^2) = \lambda(2x, 2y, 2z) + \mu(1,1,1)$. Então:

$$\begin{cases} 2\lambda x + \mu = 3x^2 & (1) \\ 2\lambda y + \mu = 3y^2 & (2) \\ 2\lambda z + \mu = 3z^2 & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 & (4) \\ x + y + z = 1 & (5) \end{cases}$$

Fazendo (1)+(2)+(3): $2\lambda(x+y+z) + 3\mu = 3(x^2+y^2+z^2) \Rightarrow$ Por (4) e (5), temos:

$\boxed{2\lambda + 3\mu = 3} \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{3 - 2\lambda}{3}}$

Fazendo (1)−(2): $3(x^2 - y^2) = 2\lambda(x - y) \Rightarrow 3(x+y)(x-y) = 2\lambda(x-y)$

Se $x - y \neq 0 \Rightarrow 3(x+y) = 2\lambda$ (6)

Por (5): $x + y = 1 - z$; Então, em (6): $3(1 - z) = 2\lambda \Rightarrow \boxed{z = 1 - \frac{2\lambda}{3}}$

Substituindo em (3) $2\lambda z + \mu = 3z^2 \Rightarrow 2\lambda\left(1 - \frac{2\lambda}{3}\right) + \left(\frac{3 - 2\lambda}{3}\right) = 3\left(1 - \frac{2\lambda}{3}\right)^2 \Rightarrow$

$$2\lambda - \frac{4\lambda^2}{3} + 1 - \frac{2\lambda}{3} = 3\left(1 - \frac{4\lambda}{3} + \frac{4\lambda^2}{9}\right) \Rightarrow 2\lambda - \frac{4\lambda^2}{3} + 1 - \frac{2\lambda}{3} = 3 - 4\lambda + \frac{4\lambda^2}{3} \Rightarrow$$

(a) $f(x,y,z) = 2x + y - z^2$; $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0,\ z > 0 \text{ e } 2z = 2x + y + 4\}$

Sejam $g(x,y,z) = 4x^2 + y^2 - z^2 + 1$ e $h(x,y,z) = 2x + y + 4 - 2z$. Com isso, garantimos que $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = 0 \text{ e } h(x,y,z) = 0\}$. Sabemos que: $\nabla f = (2, 1, -2z)$; $\nabla g = (8x, 2y, -2z)$ e $\nabla h = (2, 1, -2)$. Em Lagrange de condição dupla:

$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h \Rightarrow (2, 1, -2z) = \lambda(8x, 2y, -2z) + \mu(2, 1, -2)$, o que nos leva ao:

$$\begin{cases} 8\lambda x + 2\mu = 2 \\ 2\lambda y + \mu = 1 \\ -2\lambda z - 2\mu = -2z \\ 4x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0 \\ 2x + y - 2z + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\lambda x + \mu = 1 & (1) \\ 2\lambda y + \mu = 1 & (2) \\ \lambda z + \mu = z & (3) \\ 4x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0 & (4) \\ 2x + y - 2z + 4 = 0 & (5) \end{cases}$$

Fazendo (1)=(2): $4\lambda x + \mu = 2\lambda y + \mu$

Se $\lambda \neq 0 \Rightarrow 4x = 2y \Rightarrow y = 2x \Rightarrow x = \frac{y}{2}$

Em (5) $\Rightarrow 2x + y - 2z + 4 = 0 \Rightarrow$

$2y - 2z + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{z = 2 + y}$

Substituindo em (4): $4\left(\frac{y}{2}\right)^2 + y^2 - (2+y)^2 + 1 = 0 \Rightarrow \frac{4y^2}{4} + y^2 - 4 - 4y - y^2 + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 - 4y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-3)}}{2} \Rightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{4 \cdot 7}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 2 \pm \sqrt{7}$

Como $x = \frac{y}{2} \Rightarrow \boxed{x = 1 \pm \frac{\sqrt{7}}{2}}$; Como $z = 2 + y \Rightarrow z = 4 \pm \sqrt{7}$;

Há uma condição em C que exige que $z > 0$. Tanto $4 + \sqrt{7}$ quanto $4 - \sqrt{7}$ são positivos.

Ou seja, temos dois pontos: $P_1 = \left(1 + \frac{\sqrt{7}}{2}, 2 + \sqrt{7}, 4 + \sqrt{7}\right)$ e $P_2 = \left(1 - \frac{\sqrt{7}}{2}, 2 - \sqrt{7}, 4 - \sqrt{7}\right)$

Obs: Isso é para a hipótese $\lambda \neq 0$. Mas, assumindo $\lambda = 0$, teríamos $\mu = 0$ e $\mu = 1$, o que é impossível, logo P_1 e P_2 são as únicas soluções.

$f(P_1) = f\left(1 + \frac{\sqrt{7}}{2}, 2 + \sqrt{7}, 4 + \sqrt{7}\right) = 2\left(1 + \frac{\sqrt{7}}{2}\right) + (2 + \sqrt{7}) - (4 + \sqrt{7})^2 = -19 - 6\sqrt{7}$ (Mínimo)

$f(P_2) = f\left(1 - \frac{\sqrt{7}}{2}, 2 - \sqrt{7}, 4 - \sqrt{7}\right) = 2\left(1 - \frac{\sqrt{7}}{2}\right) + (2 - \sqrt{7}) - (4 - \sqrt{7})^2 = -19 + 6\sqrt{7}$ (Máximo)

b) A função é a mesma; $C = \{4x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0,\ z > 0 \text{ e } 2z \leq 2x + y + 4\}$

Vamos reescrever $C \Rightarrow$ $C = \underbrace{\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0,\ z > 0 \text{ e } 2z = 2x + y + 4\}}_{A} \cup$

$\cup \underbrace{\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0,\ z > 0 \text{ e } 2z < 2x + y + 4\}}_{B}$

$\to 4\lambda^2 - 8\lambda + 3 = 0$; Resolvendo a equação:

$$\lambda = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(4)(3)}}{2(4)} \Rightarrow \lambda = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{8} \to \lambda = \frac{8 \pm 4}{8} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{3}{2} \\ \text{ou} \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Se $\lambda = \frac{3}{2}$, temos: $3\mu + 2\lambda = 3 \Rightarrow 3\mu + 2\cdot\frac{3}{2} = 3 \to \boxed{\mu = 0}$

Substituindo em (1): $3x^2 = 2\lambda x + \mu \Rightarrow 3x^2 - 3x = 0 \Rightarrow 3x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 1 \end{cases}$

Em (6): $3(x+y) = 2\lambda \Rightarrow \boxed{x+y=1} \Rightarrow \begin{cases} \text{Se } x=0 \Rightarrow y=1 \\ \text{Se } x=1 \Rightarrow y=0 \end{cases}$

Ainda: $z = 1 - \frac{2\lambda}{3} \Rightarrow z = 1 - \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \boxed{z=0}$

$\to$ Isso gera os pontos: $P_1 = (0,1,0)$ e $P_2 = (1,0,0)$

Se $\lambda = \frac{1}{2}$, temos: $3\mu + 2\lambda = 3 \Rightarrow 3\mu + 1 = 3 \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{2}{3}}$

Substituindo em (1): $3x^2 = 2\lambda x + \mu \Rightarrow 3x^2 - x - \frac{2}{3} = 0$

Resolvendo para x: $x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(3)\left(-\frac{2}{3}\right)}}{2(3)} \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{6} \Rightarrow x = \frac{1 \pm 3}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$

Em (6): $3(x+y) = 2\lambda \Rightarrow x+y = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} \text{Se } x = \frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \\ \text{Se } x = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3} \end{cases}$

Ainda: $z = 1 - \frac{2\lambda}{3} \Rightarrow \boxed{z = \frac{2}{3}}$; $\to$ Isso gera os pontos: $P_3 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e $P_4 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Isso foi resolvido para $x - y \neq 0 \Rightarrow x \neq y$; Se tomarmos $x = y$, teremos em (4) e (5)

$\Rightarrow z^2 = 1 - 2x^2$ e $z = 1 - 2x \Rightarrow (1-2x)^2 = 1 - 2x^2 \Rightarrow 6x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \frac{2}{3}$;

Para $x = y = \frac{2}{3}$, temos $z = -\frac{1}{3}$; Então, para $x = 0$, como $x = y$, temos $y = 0$ e por (5) $\Rightarrow z = 1$

O que dá o ponto $P_5 = (0,0,1)$. Calculando valores:

$$\left.\begin{aligned} f(P_1) &= f(P_2) = f(P_5) = 1 \\ f(P_3) &= f(P_4) = \frac{15}{27} = f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &(1,0,0);\ (0,1,0);\ (0,0,1) \Rightarrow \text{Pontos de mínimo} \\ &\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right);\ \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right);\ \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \text{Pontos de máximo} \end{aligned}$$

conjunto A já foi resolvido no item A. Todavia, o conj. B está descrito de uma forma na qual não se pode trabalhar. Vamos redefinir a função f:

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \text{ onde } D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2z < 2x+y+4,\ z > 0\}$$

Deste modo, redefiniremos C de tal modo que: $C = \{(x,y,z) \in D \subseteq \mathbb{R}^3 : 4x^2+y^2-z^2+1=0\}$.

Note que C agora é restrito ao domínio D de f. Mas deste modo, podemos usar Lagrange. Seja $g(x,y,z) = 4x^2+y^2-z^2+1=0$; $\nabla g = (8x, 2y, -2z)$. Acharemos os máximos e mínimos em C, e os resultados deverão pertencer a D. Vejamos:

$$\nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow (2,1,-2z) = \lambda(8x, 2y, -2z).$$

Adotarei uma abordagem diferente. Se $\nabla f \parallel \nabla g \Rightarrow \nabla f \wedge \nabla g = (0,0,0)$

↳ Produto vetorial

Então, o sistema fica: $\begin{cases} \nabla f \wedge \nabla g = (0,0,0) \\ 4x^2+y^2-z^2+1=0 \end{cases}$;

$$\nabla f \wedge \nabla g = \det\begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -2z \\ 8x & 2y & -2z \end{bmatrix} = (-2z+4zy)\hat{i} + (4z-16xz)\hat{j} + (4y-8x)\hat{k}$$

$$\nabla f \wedge \nabla g = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 4zy - 2z = 0 \quad (1) \\ 4z - 16xz = 0 \quad (2) \\ 4y - 8x = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Em (1): $2z = 4zy$, se $z \neq 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

Em (2): $4z = 16xz$, se $z \neq 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

Mas sabemos que: $4x^2+y^2-z^2+1=0 \Rightarrow 4\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = z^2 \Rightarrow z^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow z = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

Temos dois pontos: $P_1 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ e $P_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. Devemos checar se P_1 e P_2 pertencem a D, ou seja, se $2z < 2x+y+4$ e $z > 0$. $P_2 \notin D$, pois $-\sqrt{\frac{3}{2}} < 0$. Vejamos

P_1: $2\sqrt{\frac{3}{2}} = 2z \Rightarrow 2z = \sqrt{\frac{3}{2}\cdot 4} \Rightarrow 2z = \sqrt{6}$; $2x+4+y = 2\left(\frac{1}{4}\right)+4+\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x+y+4 = 5 = \sqrt{25}$

Logo, $2z < 2x+y+4$, pois $\sqrt{6} < \sqrt{25} \Rightarrow P_1 \in D$. Logo, P_1 é candidato a max/min. Vejamos seu valor: $f(P_1) = f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 2\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} - \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 = -\frac{1}{2}$.

Os outros candidatos são os do conjunto A. Evidentemente, o mínimo permanece $-19-6\sqrt{7}$, valor de $P = \left(1+\frac{\sqrt{7}}{2}, 2+\sqrt{7}, 4+\sqrt{7}\right)$. Todavia, o novo máximo é $-\frac{1}{2}$. Pois:

$-19+6\sqrt{7} < \underset{3}{-19+6\sqrt{9}} \Rightarrow -19+6\sqrt{7} < -1 < -\frac{1}{2} \Rightarrow$ logo $-\frac{1}{2}$ é novo máximo!

Pois $\sqrt{7} < \sqrt{9}$

3.6. (a) $f(x,y,z) = x^2+y^2+2z^2-4xy-4z$; $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2=4\}$

Seja $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. Podemos usar Lagrange em C. Sabemos que $\nabla g=(2x,2y,2z)$ e $\nabla f=(2x-4y,\ 2y-4x,\ 4z-4)$. (O teo de Lagrange é válido pois $\nabla g\neq(0,0)$, $\forall(x,y)\in C$.

Procuramos os pontos onde $\nabla f \parallel \nabla g$, ou seja, onde $\underbrace{\nabla f \wedge \nabla g}_{\text{Produto vetorial.}} = (0,0,0)$

$$\nabla f\wedge\nabla g = \det\begin{bmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2x-4y & 2y-4x & 4z-4\\ 2x & 2y & 2z\end{bmatrix} = (4yz-8xz-8yz+8y)\hat{i}+(-4xz+8yz+8xz-8x)\hat{j}+$$
$$+(4xy-8y^2-4xy+8x^2)\hat{k}$$

Então, o sistema fica: $\begin{cases}\nabla f\wedge\nabla g=(0,0,0) & (1)\\ x^2+y^2+z^2=4 & (2)\end{cases}$ Pela coordenada $\hat{k}$: $-8y^2+8x^2 \Rightarrow x^2=y^2 \Rightarrow \boxed{x=\pm y}$

Pela coordenada $\hat{j}$: $z(-4x+8y+8x)-8x=0$

Se $x=+y \Rightarrow z(12x)=8x \Rightarrow$ se $x\neq 0 \Rightarrow \boxed{z=\frac{2}{3}}$

Pela equação (2), se $x^2=y^2$: $2x^2+z^2=4 \Rightarrow 2x^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2=4 \Rightarrow x^2=\frac{16}{9} \Rightarrow x=\pm\frac{4}{3}$

Como $x=y$, temos dois pontos: $P_1=\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$ e $P_2=\left(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$

Se $x=-y \Rightarrow z(-4x)=8x \Rightarrow z=-2$;

Pela eq. (2), se $x^2=y^2$: $2x^2+z^2=4 \Rightarrow 2x^2+(-2)^2=4 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=0$.

Dá o ponto $P_3=(0,0,-2)$

~~Se~~ Calculando: $f(P_1)=f(P_2)=\underbrace{-\frac{48}{9}}_{\text{mínimo}}$; $f(P_3)=16 \Rightarrow$ Máximo

(b) O conjunto $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2\leq 4\}$ pode ser escrito como:

$$C=\underbrace{\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2=4\}}_{\text{Item (a)}}\cup\underbrace{\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2<4\}}_{\text{Conj. B}}$$

Basta ver o max/min de f em B. Como B é um conj. aberto, vamos procurar pontos em B que zerem ∇f (pontos críticos). Sabemos que: $\nabla f=(2x-4y,\ 2y-4x,\ 4z-4)$.

$$\nabla f=(0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases}2x-4y=0\\ 2y-4x=0\\ 4z-4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=0\\ z=1\end{cases} \Rightarrow P_4=(0,0,1)$$

Temos que: $f(P_4)=f(0,0,1)=-2$; $\Rightarrow$ logo P_4 não é máx/min, e a resposta é a mesma do item (a)!

c) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4 \text{ e } z \geq \frac{1}{2}\}$; Podemos reescrever:

$C = \underbrace{\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4 \text{ e } z = \frac{1}{2}\}}_{(A)} \cup \underbrace{\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4 \text{ e } z > \frac{1}{2}\}}_{(B)}$

Em (A): Trataremos com Lagrange de 2 condições. Sejam $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ e $h(x,y,z) = z$. Onde $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$ e $\nabla h = (0,0,1)$. Como $\nabla g(x,y,z) \wedge \nabla h(x,y,z) \neq (0,0,0)$, $\forall (x,y,z) \in (A)$, vale Lagrange. Ou seja, tomaremos ~~os~~ os pontos onde $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$. Mas há outra abordagem: se $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h \Rightarrow \{\nabla f, \nabla g, \nabla h\}$ é LD (pois $\nabla f \in$ ao plano formado por ∇g e ∇h). Então, a condição fica: $\det \begin{bmatrix} \nabla f \\ \nabla h \\ \nabla g \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \det \begin{bmatrix} 2x-4y & 2y-4x & 4z-4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow (2x)(2y-4x) - (2y)(2x-4y) = 0 \Rightarrow x^2 = y^2$. Substituindo isso na condição $x^2+y^2+z^2 = 4$ temos: $2x^2+z^2 = 4$. A outra restrição é $z = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 = \frac{15}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{15}{8} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{\pm\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}$ e $z = \frac{1}{2}$.

Temos 4 pontos: $P_1 = \left(\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$; $P_2 = \left(-\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$; $P_3 = \left(\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ e $P_4 = \left(-\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$; Os pontos de máximo são P_3 e P_4, pois $f(P_3) = f(P_4) = \frac{98}{8}$, em (A).

Em (B): Basta resolvermos Lagrange para $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4\}$ e verificar quais resultados possuem $z > \frac{1}{2}$. Sabemos pelo item (a) que as respostas são $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e $(0,0,-2)$. Mas, $(0,0,-2)$ está excluído, pois $-2 < \frac{1}{2}$.

Sabemos que: $f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = f\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = -\frac{48}{9} \Rightarrow$ Esses serão os mínimos

(d) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 4 \text{ e } z \geq \frac{1}{2}\}$; Reescrevendo:

$C = \underbrace{\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4 \text{ e } z \geq \frac{1}{2}\}}_{(A)} \cup \underbrace{\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 4 \text{ e } z \geq \frac{1}{2}\}}_{(B)}$

(A): Resolvido no item anterior

(B): Este é um conjunto aberto, então basta ver pontos críticos que atendem às condições. Fizemos isso no item (b).

Em (A): Temos os candidatos do item (C).

Em (B): o único ponto crítico é $(0,0,1)$, que atende a $x^2+y^2+z^2<4$ e $z\geq \frac{1}{2}$. Sabemos que $f(0,0,1)=-2$.

Todavia, os candidatos do conj. (A) possuem valores maiores que -2 $\left(\frac{78}{8}\right)$ e menores que -2 $\left(-\frac{46}{9}\right)$. Então, a resposta é a mesma que o item (C).

(c) $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2=4 \text{ e } z\geq x+y\}$; Reescrevendo:

$$C=\underbrace{\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2=4 \text{ e } z=x+y\}}_{(A)} \cup \underbrace{\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2=4 \text{ e } z>x+y\}}_{(B)}$$

Em (A): Basta fazer um Lagrange de condição dupla; Sejam $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ e $h(x,y,z)=x+y-z$. Temos que: $\nabla g=(2x,2y,2z)$ e $\nabla h=(1,1,-1)$. Com gradientes não nulos e $\nabla g\wedge\nabla h\neq(0,0,0)$ vale o teo. de Lagrange para condição dupla. Temos que ver os pontos que satisfazem a condição $\{\nabla f,\nabla g,\nabla h\}$ ser LD (equivale a $\nabla f=\lambda\nabla g+\mu\nabla h$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$).

Temos: $$\det\begin{bmatrix}\nabla f\\ \nabla g\\ \nabla h\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}2x-4y & 2y-4z & 4z-4\\ 2x & 2y & 2z\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}=\left[-z-2(x+y)-2\right](x-y)=0$$

Logo, $$\det\begin{bmatrix}\nabla f\\ \nabla g\\ \nabla h\end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{matrix}x-y=0\\ \text{ou}\\ -z-2x-2y-2=0\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x=y\\ \text{ou}\\ z=-2x-2y-2\end{cases}$$

Se $x=y$) Pela condição $x^2+y^2+z^2=4 \Rightarrow 2x^2+z^2=4$; Pela condição $z=x+y\Rightarrow z=2x$ $\Rightarrow$ juntando $\Rightarrow 2x^2+(2x)^2=4\Rightarrow 6x^2=4\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$; e $z=\pm2\sqrt{\frac{2}{3}}$;

Isso nos dá dois pontos: $\pm\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}},2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$; $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}},2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=4-8\sqrt{\frac{2}{3}}$; $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}},-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=4+8\sqrt{\frac{2}{3}}$

Se $z=-2x-2y-2$) Pela condição $z=-2x-2y-2$ e $z=x+y\Rightarrow x+y=-2x-2y-2\Rightarrow 3x+3y=-2$ $\Rightarrow x=\frac{-2-3y}{3}$; $z=x+y\Rightarrow z=\frac{-2-3y}{3}+\frac{3y}{3}\Rightarrow z=-\frac{2}{3}$;

Substituindo em $x^2+y^2+z^2=4\Rightarrow\left(\frac{-2-3y}{3}\right)^2+y^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2=4\Rightarrow 9y^2+6y-14=0$

Resolvendo a eq. temos: $y=\frac{-1\pm\sqrt{15}}{3}$; $x=-\frac{2}{3}-y\Rightarrow x=-\frac{2}{3}-\left(\frac{-1\pm\sqrt{15}}{3}\right)=-\frac{1\pm\sqrt{15}}{3}$ e $z=-\frac{2}{3}$; $f\left(-\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{15}}{3},-\frac{1}{3}\mp\frac{\sqrt{15}}{3},-\frac{2}{3}\right)=\frac{40}{3}$

Obs: Se $y=-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{15}}{3}$, $x=\frac{-1-\sqrt{15}}{3}$; se $y=-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{15}}{3}$, $x=-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{15}}{3}$

(B): Basta resolver Lagrange para $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$ e verificar quais resultados atendem $z > x+y$; Temos os resultados do item (a): $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e $(0,0,-2)$.

Só ponto $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ atende à condição, pois $-\frac{8}{3} > \frac{2}{3}$;

Sabemos que $f\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = -\frac{40}{9}$;

Então, $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ é ponto de mínimo e $\left(-\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{15}}{3}, -\frac{1}{3} \mp \frac{\sqrt{15}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ são pts. de Máximo

— // —

4. Máximos e Mínimos em Conjuntos Arbitrários

4.1 - Pedem os pontos da elipse mais próximos de $(0,0)$. Vamos minimizar a função distância:

$d = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} \Rightarrow d^2 = x^2+y^2$. Repare que minimizar d é equivalente a minimizar d^2. Seja $d(x,y) = x^2+y^2$ a função que buscamos minimizar. Queremos o mínimo no conjunto $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+xy+y^2=3\}$ ⤳ pontos da elipse. Usaremos Lagrange.

Seja $g(x,y) = x^2+xy+y^2$, de modo que $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y)=3\}$. Sabemos que:

$\nabla d(x,y) = (2x, 2y)$ e $\nabla g(x,y) = (2x+y, 2y+x)$; $\nabla g \neq (0,0)$, pois $(0,0)$ não satisfaz a condição $g(x,y)=3$. Por Lagrange, os candidatos a max/min atendem à condição $\nabla d = \lambda \nabla g$ $(\nabla d \parallel \nabla g)$. Em $\mathbb{R}^2$, se $\nabla d \parallel \nabla g$, significa que ∇d é ORTOGONAL ao mesmo vetor que ∇g é. Note que $v = (-(2y+x), 2x+y)$ é ortogonal a ∇g, pois $\langle \nabla g, v \rangle = 0$. Temos então:

$\langle \nabla d, v \rangle = 0 \Rightarrow \overset{\text{escalar}}{\langle (2x,2y), (-2y-x, 2x+y) \rangle} = 0 \Rightarrow 2\langle (x,y), (-2y-x, 2x+y) \rangle = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(-2y-x) + y(2x+y) = 0 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow \boxed{x = \pm y}$

Os pontos buscados pertencem à elipse. Substituindo, teremos:

Se $x=y$) $x^2+xy+y^2 = 3 \Rightarrow x^2+x^2+x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm 1$; Como $x=y$, teremos dois pontos $P_1 = (1,1)$ e $P_2 = (-1,-1)$.

Se $x=-y$) $x^2+xy+y^2=3 \Rightarrow x^2-x^2+x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$; Como $x=-y$, teremos dois pontos $P_3 = (\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ e $P_4 = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Vemos que $d(1,1) = d(-1,-1) = 2$ e $d(-\sqrt{3},\sqrt{3}) = d(\sqrt{3},-\sqrt{3}) = 6$.

Logo, os pontos $(1,1)$ e $(-1,-1)$ são os mais próximos de $(0,0)$.

4.2) Vamos minimizar a distância até $(1,1,1)$. A distância de um ponto genérico (x,y,z) é dada por: $d^2=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2$. Novamente, minimizar o quadrado da distância equivale a minimizar a distância. Seja, então $d(x,y,z)=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2$ a função a ser minimizada. Seja o conjunto $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x+2y-z+4=0\}$. Procuramos o mínimo em C. Usando Lagrange:

Seja $x+2y-z+4=g(x,y,z)$. Logo $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: g(x,y,z)=0\}$.

Sabe-se que: $\nabla g(x,y,z)=(1,2,-1)$ e $\nabla g\neq(0,0,0),\ \forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\nabla d(x,y,z)=(2(x-1),\ 2(y-1),\ 2(z-1)).$$

Buscam-se os pontos onde $\nabla d=\lambda\nabla g$ ($\nabla d\,//\,\nabla g$). Temos:

$$\begin{cases}2(x-1)=\lambda\\ 2(y-1)=2\lambda\\ 2(z-1)=-\lambda\\ x+2y-z+4=0\end{cases}\Rightarrow \text{É um sistema linear usual}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=-1\\ z=2\end{cases}$$

Então, o ponto do plano mais próximo de $(1,1,1)$ é $(0,-1,2)$.

4.3) Seja $f:D\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, com $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x,y,z\geq 0\}$ e $f(x,y,z)=xyz$. Esta é a função que dá o produto dos números. Queremos maximizá-la, no conjunto C tal que $C=\{(x,y,z)\in D: x+y+z=100\}$, ou seja, há a restrição de que a soma dos números seja 100. Usaremos Lagrange: Seja $g(x,y,z)=x+y+z$, tal que $C=\{(x,y,z)\in D: g(x,y,z)=100\}$. Sabemos que: $\nabla g(x,y,z)=(1,1,1)$ e $\nabla f=(yz,xz,xy)$. $\nabla g\neq(0,0,0),\ \forall(x,y,z)\in D$. Buscamos os pontos onde: $\nabla f=\lambda\nabla g\Rightarrow(yz,xz,xy)=\lambda(1,1,1)$. Temos:

$$\begin{cases}yz=\lambda\ (1)\\ xz=\lambda\ (2)\\ xy=\lambda\ (3)\\ x+y+z=100\ (4)\end{cases}\Rightarrow$$

se $x\neq0,\ y\neq0,\ z\neq0$ e $\lambda\neq0$: $\frac{(1)}{(2)}\Rightarrow\frac{yz}{xz}=\frac{\lambda}{\lambda}\Rightarrow x=y$

$\frac{(2)}{(3)}\Rightarrow\frac{xz}{xy}=\frac{\lambda}{\lambda}\Rightarrow y=z$; $\frac{(1)}{(3)}\Rightarrow x=z$.

Se $x=y=z$, em (4) temos: $3x=100\Rightarrow x=\frac{100}{3}$; $y=\frac{100}{3}$ e $z=\frac{100}{3}$.

O produto xyz é $\frac{10^6}{27}$. (Valor máximo de f em C).

Seja $f(\alpha,\beta,\gamma) = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$. Pede-se o valor máximo de f em $B = \{(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 : \alpha+\beta+\gamma = \pi\}$, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$ (π rad). O domínio da f é $D = \{(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 : 0<\alpha<\pi, 0<\beta<\pi \text{ e } 0<\gamma<\pi\}$.

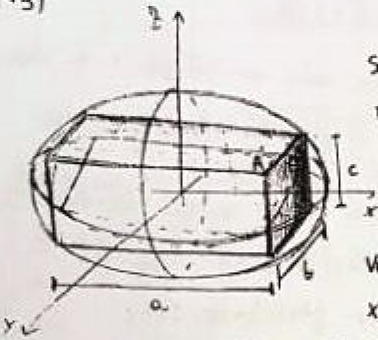
Usaremos Lagrange: Seja $g(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha+\beta+\gamma$, tal que $B = \{(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 : g(\alpha,\beta,\gamma) = \pi\}$. Sabemos que $\nabla f = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ e $\nabla g = (1,1,1)$. Buscamos os pontos em que: $\nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = (\lambda,\lambda,\lambda) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Temos:
$$\begin{cases} \cos\alpha = \lambda & (1) \\ \cos\beta = \lambda & (2) \\ \cos\gamma = \lambda & (3) \\ \alpha+\beta+\gamma = \pi & (4) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Por } (1),(2),(3) \Rightarrow \cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma. \\ \text{Como } \alpha,\beta,\gamma \in\,]0,\pi[\, \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma. \end{array}$$

Por (4): $3\alpha = \pi \Rightarrow \underline{\alpha = \frac{\pi}{3}}$; $\beta = \frac{\pi}{3}$ e $\gamma = \frac{\pi}{3}$.

Então, o valor máximo de f é $3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ //

4.5)



O paralelepípedo é simétrico em relação aos eixos. Então, seu volume é distribuído entre os 8 octantes igualmente. Vamos maximizar o produto das coordenadas do ponto A da figura e, como o paralelepípedo é simétrico, basta duplicar as coordenadas para termos a dimensão do sólido. Seja $V(x,y,z) = xyz$ a função volume, com $\nabla V = (yz, xz, xy)$ e definida em $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x,y,z > 0\}$ (primeiro octante). Seja $C = \{(x,y,z) \in D : 9x^2 + 36y^2 + 4z^2 = 36\}$ os pontos do elipsóide. Queremos o máximo de V em C. Seja $g(x,y,z) = 9x^2 + 36y^2 + 4z^2$ a função que usaremos de condição no teo. de Lagrange. Sabemos que: $\nabla g = (18x, 72y, 8z)$.

Procuram-se os pontos nos quais: $\nabla V = \lambda \nabla g \Rightarrow (yz, xz, xy) = \lambda(18x, 72y, 8z) \Rightarrow$

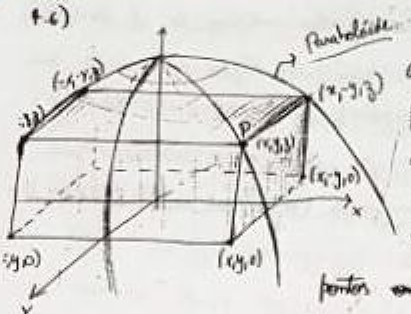
$$\begin{cases} yz = 18\lambda x & (1) \\ xz = 72\lambda y & (2) \\ xy = 8\lambda z & (3) \\ 9x^2 + 36y^2 + 4z^2 = 36 & (4) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Se } x,y,z,\lambda \neq 0: \frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{xz}{yz} = \frac{72\lambda y}{18\lambda x} \Rightarrow x^2 = 4y^2 \Rightarrow 9x^2 = 36y^2 \\ \frac{(3)}{(2)} \Rightarrow \frac{xy}{xz} = \frac{8\lambda z}{72\lambda y} \Rightarrow 9y^2 = z^2 \Rightarrow 36y^2 = 4z^2 \end{array}$$

substituindo em (4): $36y^2 + 36y^2 + 36y^2 = 36 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (lembre-se do domínio D, $y>0$).

$x^2 = 4y^2 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}$; $z^2 = 9y^2 \Rightarrow z^2 = 3 \Rightarrow z = \sqrt{3}$.

Então, o ponto A que maximiza o produto é $A = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right)$. Como o paralelepípedo é simétrico, basta "espelhar" o vértice A para obter os demais. Daí, os vértices ficam: $\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{3}\right)$

4.6)



Analogamente ao exercício 4.5, vamos maximizar o produto [das] coordenadas de $P=(x,y,z)$. Depois, é só espelhar o ponto (... pois não há parte de baixo do paralelepípedo). Seja $V(x,y,z)=xyz$ definida em $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x,y,z>0\}$ e $C=\{(x,y,z)\in D : z=4-x^2-y^2\}$. De C, definimos $g(x,y,z)=z+x^2+y^2$, onde $\nabla g=(2x,2y,1)$. Sabemos que $\nabla V=(yz,xz,xy)$. Procuramos os pontos ~~ono~~ tais que: $\nabla f=\lambda\nabla g \Rightarrow (yz,xz,xy)=\lambda(2x,2y,1)\Rightarrow$

$$\begin{cases} yz=2\lambda x & (1)\\ xz=2\lambda y & (2)\\ xy=\lambda & (3)\\ z+x^2+y^2=4 & (4)\end{cases} \Rightarrow \quad \text{Se } x,y,z,\lambda\neq 0 \Rightarrow \frac{(1)}{(2)}: \frac{yz}{xz}=\frac{2\lambda x}{2\lambda y}\Rightarrow x^2=y^2$$

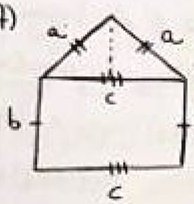
$$\frac{(1)}{(3)}: \frac{yz}{xy}=\frac{2\lambda x}{\lambda}\Rightarrow z=2x^2$$

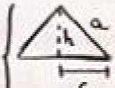
Substituindo em (4): $4x^2=4 \Rightarrow x=\pm 1$ (não esqueção que $P\in D$, e $x,y,z>0$)

$\Rightarrow$ Logo: $y=1$ e $z=2$; Temos que $P=(1,1,2)$, ~~onde~~ P está no primeiro octante.

Pelo desenho, vê-se que os vértices são: $(\pm1,\pm1,2)$ e $(\pm1,\pm1,0)$

4.7)





$\frac{c}{2}$

$h=\sqrt{a^2-\frac{c^2}{4}}$

A área do pentágono é a área do triângulo + a área do retângulo $\Rightarrow A(a,b,c)=\frac{c}{2}\sqrt{a^2-\frac{c^2}{4}}+bc$.

Procura-se a área máxima para a condição $2a+2b+c=12$ (perímetro igual a 12). Seja $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x,y,z>0\}$ e o conj. $C=\{(a,b,c)\in \underline{\underline{D}} : 2a+2b+c=12\}$. De C, definimos $g(a,b,c)=2a+2b+c$.

Sabemos que $\nabla g=(2,2,1)$ e que $\nabla A=\left(\frac{ac}{2\sqrt{a^2-\frac{c^2}{4}}}, c, \frac{1}{2}\sqrt{a^2-\frac{c^2}{4}}-\frac{c^2}{8\sqrt{a^2-\frac{c^2}{4}}}+b\right)$.

Procuramos os pontos (a,b,c) tais que: $\nabla A=\lambda\nabla g$, logo:

$$\begin{cases} \frac{ac}{2\sqrt{a^2-\frac{c^2}{4}}}=2\lambda & (1)\\ 2\lambda=c & (2)\\ \frac{1}{2}\sqrt{a^2-\frac{c^2}{4}}-\frac{c^2}{8\sqrt{a^2-\frac{c^2}{4}}}+b=\lambda & (3)\\ 2a+2b+c=12 & (4)\end{cases}\Rightarrow$$

Substituindo (2) em (1), $\frac{a}{2\sqrt{a^2-\frac{c^2}{4}}}=1\Rightarrow a^2=4\left(a^2-\frac{c^2}{4}\right)$

$\Rightarrow \boxed{c^2=3a^2}$ (5) $\Rightarrow \boxed{c=\sqrt{3}a}$

Substituindo (2) e (5) em (3): $\frac{c}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-\frac{c^2}{4}}-\frac{c^2}{8\sqrt{a^2-\frac{c^2}{4}}}+b\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}a}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-\frac{3a^2}{4}}-\frac{3a^2}{8\sqrt{a^2-\frac{3a^2}{4}}}+b\Rightarrow\frac{\sqrt{3}a}{2}=\frac{a}{4}-\frac{3a}{4}+b$

$\Rightarrow \boxed{b=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)a}$ (6)

Substituindo (5) e (6) em (4): $2a+2\left[\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)a\right]+\sqrt{3}a=12 \Rightarrow (2\sqrt{3}+3)a=12 \Rightarrow a=\frac{12}{2\sqrt{3}+3} \Rightarrow \boxed{a=4(2\sqrt{3}-3)}$

Substituindo a em (5): $c=\sqrt{3}a \Rightarrow \boxed{c=12(2-\sqrt{3})}$;

Substituindo a em (6): $b=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)a \Rightarrow \boxed{b=2(3-\sqrt{3})}$;

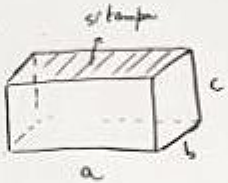
Sabemos que esses são os valores que dão área máxima pois a área mínima é zero, para $a=0$ ou $b=0$ ou $c=0$.

— // —

Obs: Os exercícios 4.8 e 4.9 eu não pude fazer. O 4.9 especialmente resulta em uma equação de 5º grau. Continuarei a partir do 4.10.

— // —

4.10)



Queremos maximizar o volume $V(a,b,c)=abc$. Há a restrição de área da caixa, logo: $2ac+2bc+ab=27$. Então, construiremos o conj. $C=\{(a,b,c)\in D: 2ac+2bc+ab=27\}$, onde $D=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3: a,b,c>0\}$. Maximizaremos $V(a,b,c)$ em C.

Seja $g(a,b,c)=2ac+2bc+ab$; Sabemos que: $\nabla V=(bc,ac,ab)$ e $\nabla g=(2c+b,\ 2c+a,\ 2a+2b)$.

Procuramos os pontos onde $\nabla V=\lambda\nabla g$. Temos:

$$\begin{cases} bc=\lambda(2c+b) & (1)\\ ac=\lambda(2c+a) & (2)\\ ab=\lambda(2a+2b) & (3)\\ 2ac+2bc+ab=27 & (4)\end{cases} \Rightarrow$$

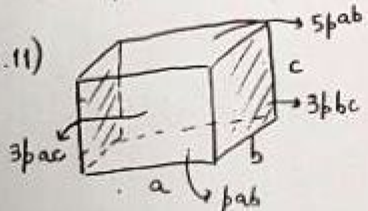
Se $a,b,c,\lambda\neq 0 \Rightarrow \frac{(2)}{(1)}: \frac{ac}{bc}=\frac{\lambda(2c+a)}{\lambda(2c+b)} \Rightarrow 2ac+ab=2bc+ab \Rightarrow \boxed{a=b}$

$\frac{(3)}{(2)}: \frac{ab}{ac}=\frac{\lambda(2a+2b)}{\lambda(2c+a)} \Rightarrow 2bc+ab=2ac+2bc \Rightarrow \boxed{b=2c}$

Então $a=b=2c$; Substituindo em (4): $12c^2=27 \Rightarrow c^2=\frac{9}{4} \Rightarrow c=\frac{3}{2}$, pois $c>0$, $D_V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ldots$

Temos que $a=b=2\cdot\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow a=b=3$. /* Obs: medidas em centímetros */

4.11)



Adote que p é a constante de perda de calor por unidade de área. Nas laterais p triplica e no teto p quintuplica. A função perda de calor é: $P(a,b,c)=6pac+6pbc+6pab$. Queremos minimizar P, com a restrição de que $abc=1000$ pés. Seja C o conj. tal que $C=\{(a,b,c)\in D /\ abc=1000\}$, onde $D=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 /\ a,b,c>0\}$. Seja $g(a,b,c)=abc$. Sabe-se que: $\nabla P=6p(b+c,a+c,a+b)$ e $\nabla g=(bc,ac,ab)$. Queremos os pontos onde: $\nabla P=\lambda\nabla g \Rightarrow 6p(b+c,a+c,a+b)=\lambda(bc,ac,ab) \Rightarrow$ Obs: a constante $6p$ é irrelevante

Temos: $$\begin{cases} b+c=\lambda bc & (1)\\ a+c=\lambda ac & (2)\\ a+b=\lambda ab & (3)\end{cases} \Rightarrow \frac{(1)}{(2)}: \frac{\lambda bc}{\lambda ac}=\frac{b+c}{a+c} \Rightarrow ab+ac=ab+bc \Rightarrow \boxed{a=b}$$

(4)