MAT2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II

$1^{\underline{a}}$ lista de exercícios - 2011

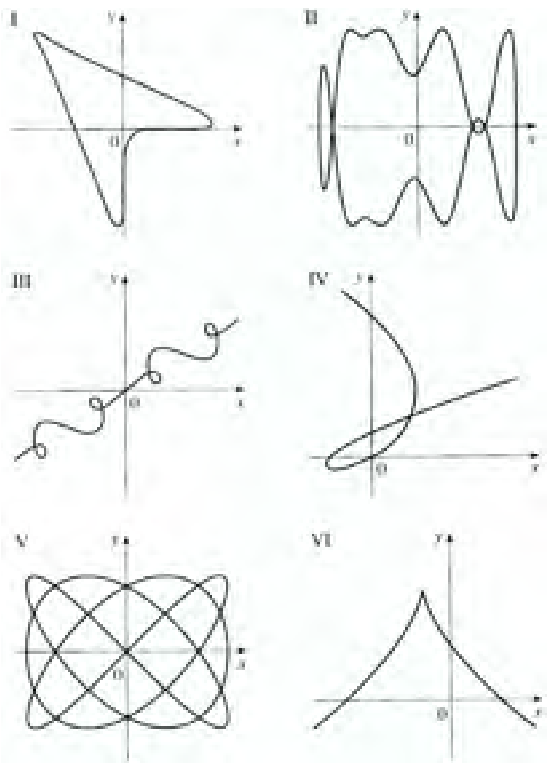
CURVAS E SUPERFÍCIES

1. Desenhe as imagens das seguintes curvas:

(a) $\gamma(t) = (1, t)$
(b) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$
(c) $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t)$
(d) $\gamma(t) = (2 + \cos t, 3 + 4\operatorname{sen} t)$
(e) $\gamma(t) = (\frac{1}{2}, 1 - t)$
(f) $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t)$, $t \geq 0$
(g) $\gamma(t) = (\sec t, \operatorname{tg} t)$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$
(h) $\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, 2\operatorname{sen} t)$

2. Associe as equações paramétricas aos gráficos I a VI. Justifique sua escolha.

(a) $x = t^3 - 2t, \quad y = t^2 - t$
(b) $x = t^3 - 1, \quad y = 2 - t^2$
(c) $x = \operatorname{sen}(3t), \quad y = \operatorname{sen}(4t)$
(d) $x = t + \operatorname{sen}(2t), \quad y = t + \operatorname{sen}(3t)$
(e) $x = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen} t), \quad y = \cos(t + \cos t)$
(f) $x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen}(5t))$



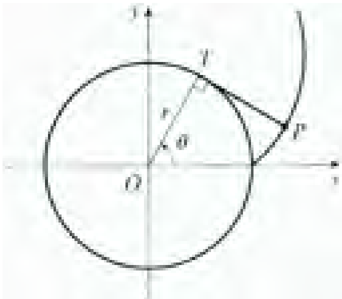
3. Considere $f(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2$. A função f é derivável em $x = 0$? Determine uma curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, derivável e cuja imagem seja igual ao gráfico de f.

4. Mostre que a curva $\gamma(t) = (\cos t\,,\ \operatorname{sen}\, t \cos\, t)$ tem duas tangentes em (0,0) e ache suas equações.

5. Sejam I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável. Mostre que, se existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $||\gamma(t)|| = C$, para todo $t \in I$, então $\gamma(t)$ é ortogonal a $\gamma'(t)$, para todo $t \in I$. Vale a recíproca? Interprete geometricamente.

6. Um barbante é enrolado ao redor de um círculo e então desenrolado, sendo mantido esticado. A curva traçada pelo ponto P no final do barbante é chamada de **involuta** do círculo. Se o círculo tiver raio r e centro O, a posição inicial de P for $(r, 0)$, e se o parâmetro θ for escolhido como na figura, mostre que as equações paramétricas da involuta são:

$$x = r(\cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta) \qquad y = r(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)$$



7. Uma circunferência de raio r rola sem escorregar ao longo do eixo Ox. Encontre equações paramétricas para a curva descrita por um ponto da circunferência que se encontra inicialmente no origem. (Esta curva é chamada de ciclóide; veja figura.)

8. Ache e esboce o domínio das funções:

(a) $f(x, y) = \sqrt{x - y}$ (b) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$

(c) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$ (d) $f(x, y) = \dfrac{x}{y^x}$

(e) $f(x, y) = \operatorname{tg}(x - y)$ (f) $f(x, y) = \ln(xy^2 - x^3)$

(g) $f(x, y) = \ln(16 - 4x^2 - y^2)$

9. Esboce uma família de curvas de nível de:

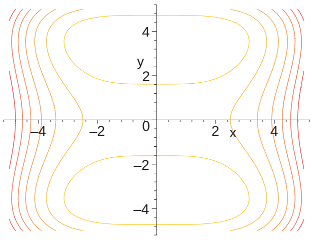
(a) $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$ (b) $f(x, y) = x - \sqrt{1 - y^2}$

(c) $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 - y^2}$ (d) $f(x, y) = \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^4}$

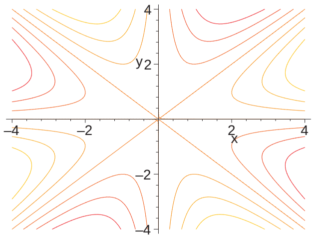
10. Esboce os gráficos de:

(a) $f(x,y) = 1 - x - y$ (b) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+1}$ (c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+9y^2}$
(d) $f(x,y) = 4x^2 + y^2$ (e) $f(x,y) = y^2 - x^2$ (f) $f(x,y) = y^2 + 1$
(g) $f(x,y) = y^2 + x$ (h) $f(x,y) = xy$ (i) $f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$
(j) $f(x,y) = \dfrac{1}{4x^2+9y^2}$ (k) $f(x,y) = (x-y)^2$ (l) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2y + 3$
(m) $f(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+2y^2)^2}$ (n) $f(x,y) = \ln(9x^2+y^2)$ (o) $f(x,y) = 2 - \sqrt[4]{x^2+4y^2}$
(p) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-9}$ (q) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+1}$

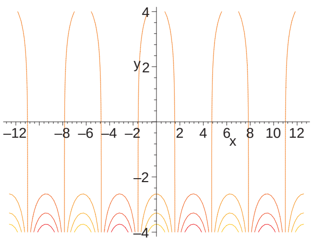
11. São dadas a seguir as curvas de nível e os gráficos de seis funções de duas variáveis reais. Decida quais curvas de nível correspondem a quais gráficos.



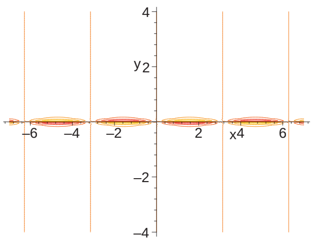
(I)



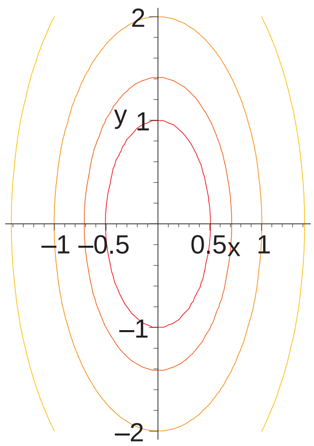
(II)



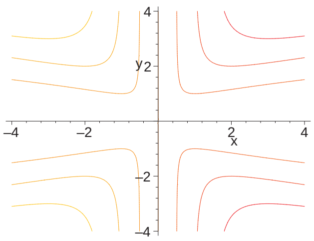
(III)



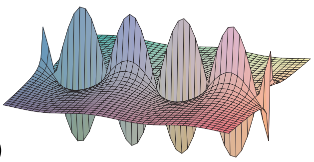
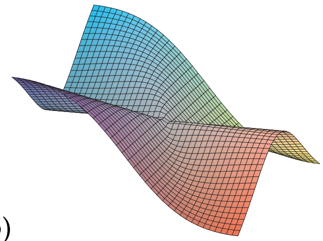
(IV)

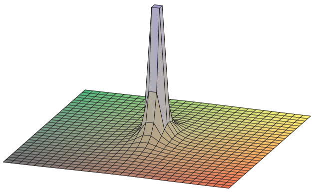
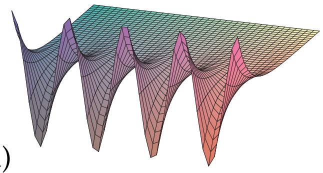


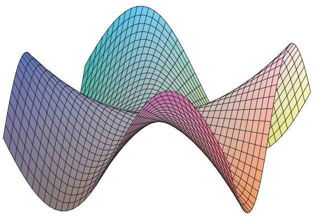
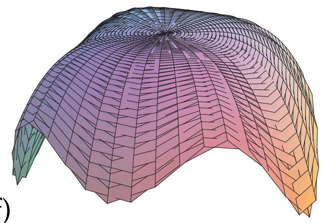
(V)



(VI)

(a)  (b) 

(c)  (d) 

(e)  (f) 

12. Seja $\gamma(t) = (e^t + 1, e^{-t})$, para $t \in \mathbb{R}$.

    (a) Desenhe a imagem de γ indicando o sentido de percurso.

    (b) A imagem de γ está contida em alguma curva de nível de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2y^2 - 2y - y^2 + 4$? Em caso afirmativo, em qual nível?

13. Em cada caso, esboce a superfície formada pelo conjunto dos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que:

    (a) $x + 2y + 3z = 1$ (b) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ (c) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
    (d) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ (e) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (f) $x^2 - y^2 = 1$
    (g) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

    Alguma dessas superfícies é o gráfico de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

14. Verifique que a imagem da curva $\gamma(t) = (\cos t, \cos t, \sqrt{2}\operatorname{sen} t)$, $t \in [0, \pi[$, está contida numa esfera com centro em $(0, 0, 0)$ e esboce a imagem de γ.

15. Seja $\gamma(t) = (\sqrt{t^2 + 1}\cos t, \sqrt{t^2 + 1}\operatorname{sen} t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Verifique que a imagem de γ está contida na superfície $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Esboce a imagem de γ.

16. Desenhe as imagens das seguintes curvas:

    (a) $\gamma(t) = (1, t, 1)$ (b) $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 2)$
    (c) $\gamma(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\operatorname{sen} t, e^{-t})$, $t \geq 0$ (d) $\gamma(t) = (t, \cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \geq 0$
    (e)$\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t, \sqrt{2}\cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$ (f) $\gamma(t) = (1 + \operatorname{sen} t, 1 + \operatorname{sen} t, \cos t)$

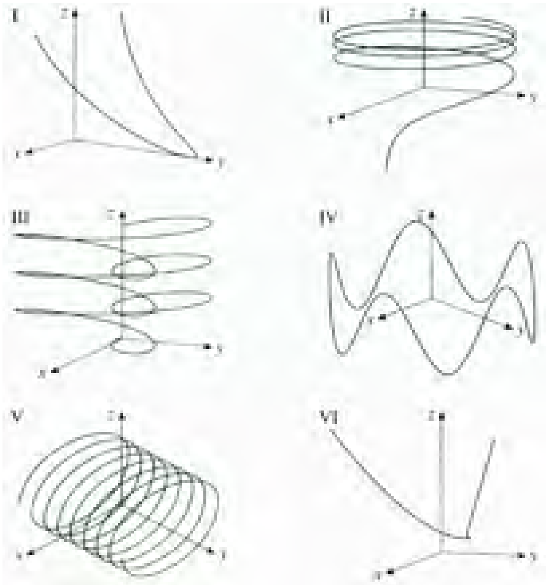
17. Seja $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+4}$ e seja $\gamma(t) = (t\ \cos t, t \operatorname{sen} t, \sqrt{t^2+4}),\ t \geq 0$.

    (a) Mostre que a imagem de γ está contida no gráfico de f.

    (b) Faça um esboço da imagem de γ.

18. Combine as equações com os esboços das imagens. Justifique a sua escolha:

    (a) $\gamma(t) = (\cos 4t, t, \operatorname{sen} 4t)$ (b) $\gamma(t) = (t^2-2, t^3, t^4+1)$
    (c) $\gamma(t) = (t, \frac{1}{1+t^2}, t^2)$ (d) $\gamma(t) = (\operatorname{sen} 3t\ \cos t, \operatorname{sen} 3t\ \operatorname{sen} t, t)$
    (e)$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \ln t)$ (f) $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 5t)$



19. Encontre uma parametrização para a curva de nível k de f nos casos:

    (a) $f(x,y) = x + 2y - 3, k = -2$;

    (b) $f(x,y) = x - \sqrt{1-2y^2}, k = 5$;

    (c) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2-y^2}, k = 1$.

    Encontre a reta tangente às curvas dos itens (a), (b) e (c) acima nos pontos $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $(6,0)$ e $(\sqrt{2}, 1)$, respectivamente.

20. (a) Encontre uma parametrização para a curva obtida pela intersecção do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ com o cilindro $x^2+y^2 = 1$.
    (b) Encontre uma parametrização para a curva obtida pela intersecção da superfície $x^2+y^2-2z^2 = 1$ com o plano $y = 2z+1$.
    (c) Encontre uma parametrização para a curva dada pela intersecção do plano $x = z$ com o parabolóide $x^2+y^2 = z$.
    (d) Encontre uma parametrização para a curva dada pela intersecção do cone $z = \sqrt{4x^2+y^2}$ com o plano $z = 2x+1$.

21. Encontre uma parametrização para C e a reta tangente a C no ponto P, onde:

(a) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1 \text{ e } z = x+1\}$ e $P = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$.

(b) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2+y^2} \text{ e } z = x+1\}$ e $P = (0,1,1)$.

(c) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1 \text{ e } (x-1)^2+y^2+(z-1)^2 = 1\}$ e $P = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$.

22. Seja $f(x,y) = \dfrac{2x^2+4y^2}{x^2+y^2+1}$.

(a) Esboce as curvas de nível c de f, para $c=1$, $c=2$ e $c=3$.

(b) Encontre uma curva γ derivável, definida num intervalo, cuja imagem seja a curva de nível 1 de f.

(c) Determine o vetor tangente à curva γ, que você encontrou no item anterior, no ponto $(-1,0)$.

(d) Seja $\Gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\Gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, z(t))$. Sabendo que a imagem da curva está contida no gráfico de f, encontre o vetor tangente a Γ em $\Gamma(\frac{\pi}{3})$.

LIMITES E CONTINUIDADE

23. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, explique o por quê:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{2x^4+x^2y+y^2}$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$ (f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3-y}$ (h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^4+y^2}$

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}$ (j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}\operatorname{sen}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

(k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y+y^4+x^4}{x^3y-xy^3}$ (l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{y^4+\operatorname{sen}(x^2+y^2)}$

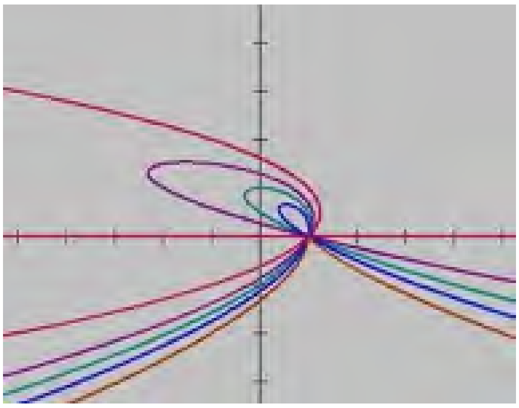
24. Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

25. Determine os pontos de continuidade da seguinte função:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)(x-1)^2}{(x^2+y^2)[(x-1)^2+(y-1)^2]} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \text{ e } (x,y) \neq (1,1), \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (1,1). \end{cases}$$

26. O domínio de uma função f é o conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x,y) \neq (1,0)\}$. A figura abaixo mostra as curvas de nível $k = 0$, $k = 0,3$, $k = 0,5$, $k = 0,7$ e $k = 1$ de f. Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$? Justifique.



RESPOSTAS

3. Não. $\gamma(t) = (t^3, t^2)$

4. $y = x$ e $y = -x$.

8. (a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x\}$
   (b) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$
   (c) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$
   (d) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$
   (e) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq x + \frac{1+2k}{2}\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
   (f) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x(y-x)(y+x) > 0\}$
   (g) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 < 16\}$

12. (b) Sim, no nível 5.

13. Apenas a superfície do item (a).

19. (a) $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (t, \frac{1}{2}(1-t))$; reta tangente: $X = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) + \lambda(2,-1), \lambda \in \mathbb{R}$
    (b) $\gamma\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (5 + \text{sen}(t), \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t))$; reta tangente: $X = (6,0) + \lambda(1,0), \lambda \in \mathbb{R}$

(c) $\gamma_1 \colon]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}^2, \gamma_1(t) = (\sec(t), \operatorname{tg}(t))$ parametriza um ramo da hipérbole e $\gamma_2 \colon]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[\to \mathbb{R}^2, \gamma_2(t) = (\sec(t), \operatorname{tg}(t))$ parametriza o outro ramo. Reta tangente: $X = (\sqrt{2}, 1) + \lambda(\sqrt{2}, 1), \lambda \in \mathbb{R}$

20. (a) $\gamma \colon [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), -\cos(2t))$
    (b) $\gamma \colon [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos(t), 2\operatorname{sen}(t) - 1, \operatorname{sen}(t) - 1)$
    (c) $\gamma \colon [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(t), \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t), \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(t))$
    (d) $\gamma \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\frac{1}{4}(t^2 - 1), t, \frac{1}{2}(t^2 + 1))$

21. (a) $\gamma \colon [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (\frac{1}{2}(\cos(t) - 1), \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(t), \frac{1}{2}(\cos(t) + 1))$. Nessa parametrização, $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$, assim o vetor tangente à trajetória de γ nesse ponto é paralelo a $\overrightarrow{\gamma}'(\frac{\pi}{2})$.
    Reta tangente: $X = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}) + \lambda(-1, 0, -1), \lambda \in \mathbb{R}$
    (b) $\gamma \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (\frac{1}{2}(t^2 - 1), t, \frac{1}{2}(t^2 + 1))$. Reta tangente: $X = (0, 1, 1) + \lambda(1, 1, 1), \lambda \in \mathbb{R}$
    (c) $\gamma \colon [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (\frac{1}{2}(1 - \cos(t)), \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(t), \frac{1}{2}(\cos(t) + 1))$. Reta tangente: $X = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}) + \lambda(1, 0, -1), \lambda \in \mathbb{R}$.

22. Veja a solução na P1 de 2009.

23. (a) não existe (b) 0 (c) 0
    (d) não existe (e) não existe (f) não existe
    (g) não existe (h) 0 (i) 0
    (j) 0 (k) não existe (l) 1

24. (a) 1 (b) 0

25. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$

Lista I - Cálculo II

02/08/11

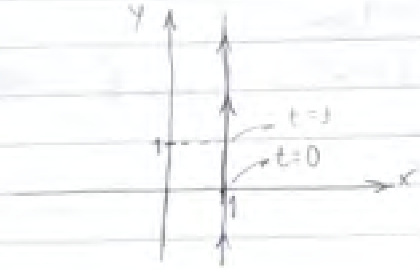
1.

(a) $\begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = t \end{cases}$

$\gamma(0) = (1, 0)$

$\gamma(1) = (1, 1)$

$\gamma(-1) = (1, -1)$

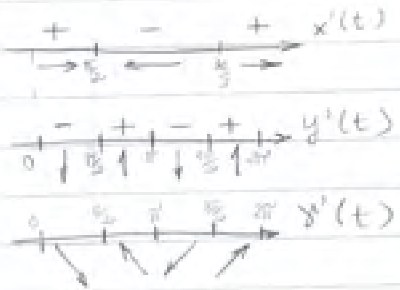


(b) $\begin{cases} x(t) = \cos^2 t \\ y(t) = \operatorname{sen} t \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

$x + y^2 = 1$

$\boxed{x = -y^2 + 1}$ (parábola rotacionada)

$\boxed{\begin{aligned} x'(t) &= 2\cos t \cdot (-\operatorname{sen} t) \\ y'(t) &= \cos t \end{aligned}}$



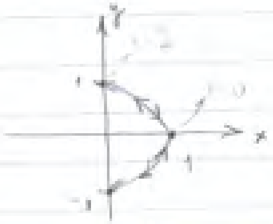
- $\cos t = 0$

  $t = \frac{\pi}{2}$ ou $t = \frac{3\pi}{2}$

- $-2\cos t \operatorname{sen} t = 0$

  $t = 0$, $t = 2\pi$, $t = \frac{\pi}{2}$ e $t = \frac{3\pi}{2}$

  $t = \pi$

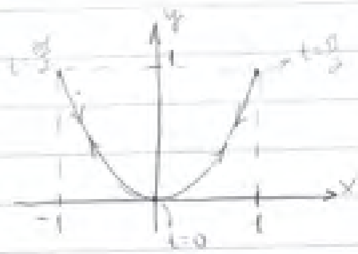


seno varia de -1 a 1

(c) $\begin{cases} x(t) = \operatorname{sen} t \\ y(t) = \operatorname{sen}^2 t \end{cases}$

$x^2 = y$ (parábola)

seno varia de -1 a 1 somente



02/08/11

(d) $\begin{cases} x(t) = 2 + \cos t \\ y(t) = 3 + 4 \operatorname{sen} t \end{cases}$

$$\left(\frac{y-3}{4}\right)^2 + (x-2)^2 = 1 \iff y^2 - 6y + 9 + 16(x^2 - 2x + 4) = 16$$

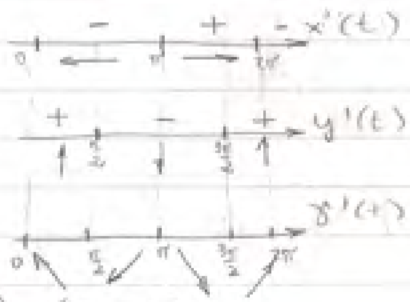
$$\boxed{\begin{aligned} x'(t) &= -\operatorname{sen} t \\ y'(t) &= 4\cos t \end{aligned}}$$

$-\operatorname{sen} t = 0$

$t = 0,\ t = \pi,\ t = 2\pi, \dots$

$4\cos t = 0$

$t = \frac{\pi}{2},\ t = \frac{3\pi}{2}, \dots$



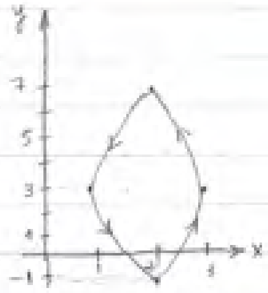
$\gamma(0) = (3, 3)$

$\gamma(\frac{\pi}{2}) = (2, 7)$

$\gamma(\pi) = (1, 3)$

$\gamma(\frac{3\pi}{2}) = (2, -1)$

$\gamma(2\pi) = (3, 3)$



—— o ——

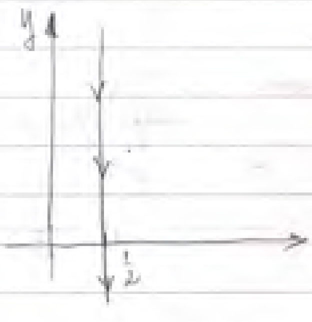
(e) $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} \\ y(t) = 1 - t \end{cases}$

$\gamma(0) = (\frac{1}{2}, 1)$

$\gamma(1) = (\frac{1}{2}, 0)$

$\gamma(2) = (\frac{1}{2}, -1)$

$\gamma(-1) = (\frac{1}{2}, 2)$



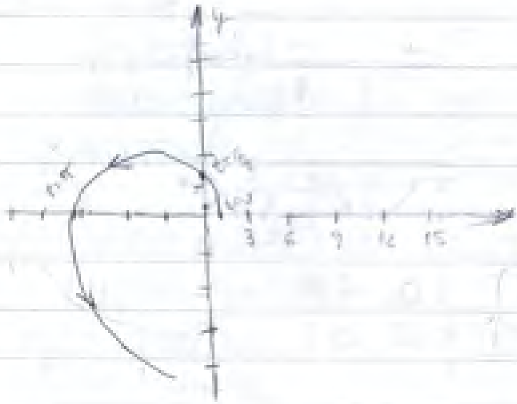
—— o ——

02/08/11

(f) $\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \operatorname{sen} t \end{cases}$ $t \geq 0$

$\gamma(t) = e^t(\operatorname{sen} t, \cos t)$

$\|\gamma(t)\| = e^t \cdot 1$



$\gamma(0) = (1, 0)$

$\gamma(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}}(0, 1)$

$\gamma(\pi) = e^{\pi}(-1, 0)$

$\gamma(\frac{3\pi}{2})\ e^{\frac{3\pi}{2}}(0, -1)$

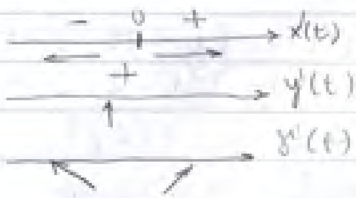
$\gamma(2\pi) = e^{2\pi}(1, 0)$

(g) $\begin{cases} x(t) = \sec t \\ y(t) = \operatorname{tg} t \end{cases}$ $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$

$\operatorname{tg}^2 t + 1 = \sec^2 t$

$\boxed{y^2 = x^2 - 1}$



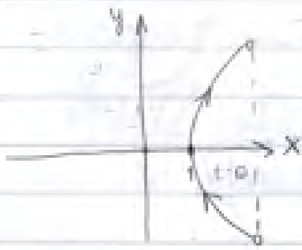
$x'(t) = \sec t \operatorname{tg} t$

$y'(t) = \sec^2 t$

$\sec t \cdot \operatorname{tg} t = 0$

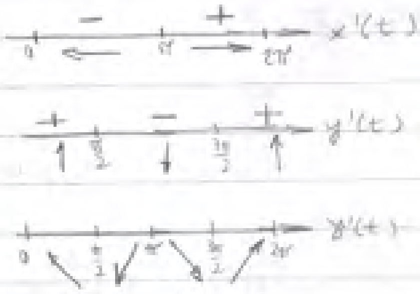
$t = 0$

$\sec^2 t = 0$ nunca



03/08/11

Q1 $\begin{cases} x(t) = \sqrt{2}\cos t \\ y(t) = 2\,\text{sen}\,t \end{cases}$



$x'(t) = -\sqrt{2}\,\text{sen}\,t$

$y'(t) = 2\cos t$

$-\sqrt{2}\,\text{sen}\,t = 0$ quando

$t=0,\ t=\pi,\ t=2\pi,$

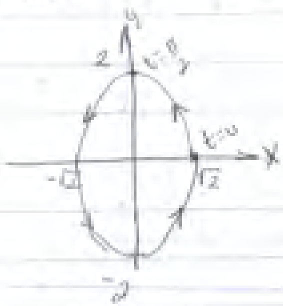
$2\cos t = 0$ quando

$t = \frac{\pi}{2},\ t = \frac{3\pi}{2}, \ldots$

$\gamma(0) = (\sqrt{2}, 0)$ $\quad \gamma(\frac{3\pi}{2}) = (0, -2)$

$\gamma(\frac{\pi}{2}) = (0, 2)$ $\quad \gamma(2\pi) = (\sqrt{2}, 0)$

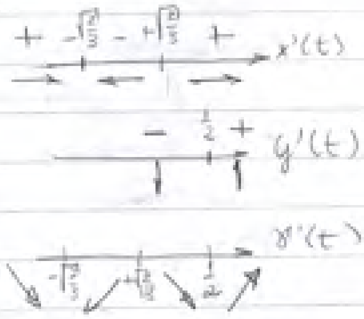
$\gamma(\pi) = (-\sqrt{2}, 0)$



Q2 -

(a) $\gamma(t) = (t^3 - 2t,\ t^2 - t)$

$\gamma'(t) = (3t^2 - 2,\ 2t - 1)$



$x'(t) = 0$

$t^2 = \frac{2}{3}$ $\quad t = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

$y'(t) = 0$

$t = \frac{1}{2}$

$\gamma(\frac{1}{2}) = (-\frac{7}{8}, -\frac{1}{2})$

gráfico $\underline{\underline{IV}}$

04/08/11

(b) $\begin{cases} x(t) = t^3 - 1 \\ y(t) = 2 - t^2 \end{cases}$

$x'(t) = 3t^2$

$y'(t) = -2t$

$t = 0$

$\gamma(0) = (-1, 2)$

+ 0 + $x'(t)$

+ 0 − $y'(t)$

0 $\gamma'(t)$

O único gráfico que possui essas características em algum ponto do 2º quadrante (ponto $(-1,2)$) é o VI

(c) $\begin{cases} x(t) = \operatorname{sen}(3t) \\ y(t) = \operatorname{sen}(4t) \end{cases}$

$x'(t) = 3\cos 3t$

$y'(t) = 4\cos 4t$

$x'(t) = 0$ quando

$t = \frac{\pi}{6}$, $t = \frac{\pi}{2}$, ...

$y'(t) = 0$ quando

$t = \frac{\pi}{8}$, $t = \frac{3\pi}{8}$, ...

+ $\frac{\pi}{6}$ − $\frac{\pi}{2}$ + $x'(t)$

+ $\frac{\pi}{8}$ − $\frac{3\pi}{8}$ + $y'(t)$

$\frac{\pi}{8}$ $\frac{\pi}{6}$ $\frac{3\pi}{8}$ $\frac{\pi}{2}$ $\gamma'(t)$

$\gamma(\frac{\pi}{8}) = (0,9 ; 1)$ $\gamma(\frac{3\pi}{8}) = (0,1 ; -1)$

$\gamma(\frac{\pi}{6}) = (1 ; 0,8)$ $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (-1 ; 0)$

$\gamma(0) = (0 ; 0)$

gráfico V

(d) $\begin{cases} x(t) = t + 2\operatorname{sen}(2t) \\ y(t) = t + \operatorname{sen}(3t) \end{cases}$

$\gamma(0) = (0, 0)$.

$x'(t) = 1 + 2\cos 2t$

$y'(t) = 1 + 3\cos 3t$

$x'(t) = 0$ $\cos 2t = -\frac{1}{2}$

$2t = \frac{5\pi}{6}$ $\boxed{t = \frac{5\pi}{12}}$

$\frac{2\pi}{6} + \frac{\pi}{3}$ $2\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \frac{3}{2} = \frac{5\pi}{2}$

$2 = \frac{10}{3}$ $\boxed{t = \frac{2\pi}{3}}$

Como a única imagem que contém este ponto é a do gráfico III, esta é a solução.

06/08/11

(e) $\begin{cases} x(t) = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen} t) \\ y(t) = \cos(t + \cos t) \end{cases}$

$x'(t) = \cos(t + \operatorname{sen} t)(1 + \cos t)$

$y'(t) = -\operatorname{sen}(t + \cos t)(1 - \operatorname{sen} t)$

$x'(t) = 0$

$1 + \cos t = 0 \Rightarrow \cos t = -1$

$t = \pi$

$y'(t) = 0$

$\operatorname{sen} t = 1$

$t = \frac{\pi}{2}$

$\gamma(0) = (0, \overset{>0}{\cos(1)})$

$\gamma(\frac{\pi}{2}) = (\underset{>0}{\operatorname{sen}(1 + \frac{\pi}{2})}, 0)$

$\gamma(\pi) = (0, \underset{<0}{\cos(\pi - 1)})$

gráfico I

(f) $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen}(5t)) \end{cases}$

$x'(t) = -\operatorname{sen} t$

$y'(t) = \cos(t + \operatorname{sen}(5t))(1 + 5\cos(5t))$

$\gamma(0) = (1, 0)$

$\gamma(\frac{\pi}{2}) = (0, \operatorname{sen}(1 + \frac{\pi}{2}))$

$\gamma(\pi) = (-1, 0)$

$\gamma(2\pi) = (1, 0)$

$\gamma(\frac{3\pi}{2}) = (0, \operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2} - 1))$

gráfico II

03 - Para que a função seja derivável no ponto $x = 0$, o limite

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ tem de existir

$\lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt[3]{x})^2 - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{2/3}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \nexists$

como os limites laterais não são iguais, a função não é derivável em $x = 0$.

$y = x^{\frac{2}{3}}$

Para $x = t^3$, temos. $\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^2 \end{cases}$

06/08/11

O vetor tangente será:

$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$

$\boxed{\gamma'(t) = (3t^2, 2t)}$ curva $\boxed{\gamma(t) = (t^3, t^2)}$

04 - O vetor tangente em qualquer ponto é dado por

$\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, +\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t)$

no ponto $(0,0)$ da curva γ' temos:

$\cos t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$ ou $t = \frac{3\pi}{2}$, $\forall t \in [0, 2\pi[$, pois depois começa a repetir os valores das funções seno e cosseno.

$\gamma'(\frac{\pi}{2}) = (-1, -1)$ (duas tangentes em $(0,0)$)

$\gamma'(\frac{3\pi}{2}) = (1, -1)$

Logo, as duas equações das retas tangente são:

$X_1 = (0,0) + \lambda(-1,-1)$ e

$X_2 = (0,0) + \lambda(1,-1)$

Escrevendo de outra forma:

$y_1 = x$

$y_2 = -x$

05 - $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$

$\|\gamma(t)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = C \iff \boxed{x^2 + y^2 = C^2}$ (I)

O vetor tangente à curva $\gamma'(t)$ pode ser escrito, na notação de Leibniz, como

$\gamma'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$

Para que dois vetores sejam ortogonais, o produto escalar precisa ser igual a zero;

07/08/11

$x \cdot \frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0$ } o que queremos provar.

Derivando (I) em função de t, temos:

$$2x \cdot \frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \qquad (\div 2)$$

$$\boxed{x \cdot \frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0} \qquad \text{c.q.d.}$$

Visamos provar a recíproca, vamos integrar esta última relação em dt:

$$\int\left(x\frac{dx}{dt}\right)dt + \int\left(y\frac{dy}{dt}\right)dt = \int 0\, dt$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = k, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$x^2 + y^2 = K \Rightarrow \boxed{\sqrt{x^2+y^2} = K}$$

Logo, a recíproca também é verdadeira, pois se $\gamma(t)$ e $\gamma'(t)$ são ortogonais, $\|\gamma(t)\| = k = \sqrt{x^2+y^2}$.
Geometricamente, significa que os vetores $\gamma(t)$ e $\gamma'(t)$ formam um ângulo de 90° no plano XY.

06 - $\begin{cases} x(\theta) = ? \\ y(\theta) = ? \end{cases}$ $\quad x(0) = r \quad y(0) = 0 \quad 0 \le \theta \le 2\pi \quad P_0 = (r, 0)$

Posição do ponto P em relação ao centro O:

$P(\theta) = \vec{OT} + \vec{TP} \Rightarrow \boxed{P(\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) + \vec{TP}}$

$\vec{TP}$ é o vetor tangente à circunferência de raio r, com módulo $r\theta$. (Vetor direção:

$\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta) \Rightarrow \gamma'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$

$TP = -r\theta(-\sin\theta, \cos\theta) \Rightarrow (r\theta)^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = \|TP\|^2$

contrário ao $\gamma'(\theta)$, pois está no sentido horário.

$P(\theta) = r(\cos\theta, \sin\theta) - r\theta(-\sin\theta, \cos\theta)$

$P(\theta) = r(\cos\theta + \theta\sin\theta, \sin\theta - \theta\cos\theta)$

08/08/11

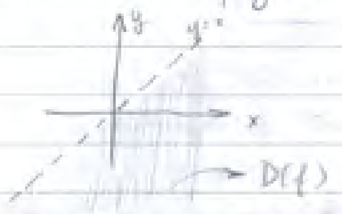
Portanto,

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta) \\ y(\theta) = r(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta) \end{cases}$$

08-

a) $x - y > 0$ $\quad D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \geq y\}$

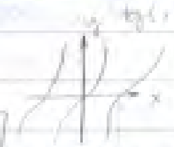
$x \geq y$ Isso significa que a reta $x = y$ é o limite para o domínio da função, pois todos os pontos abaixo dela satisfazem $x > y$.



b) $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = z$

$x \neq 0$

$\boxed{D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0\}}$

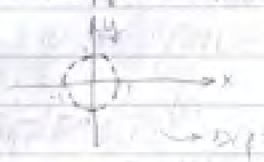


arctg abrange todos os reais − {0}

(todos os pares ordenados, menos o eixo das ordenadas)

c) $x^2 + y^2 - 1 > 0$ $\quad D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > 1\}$

$\boxed{x^2 + y^2 > 1}$ circunferência de raio maior que 1 formam o domínio

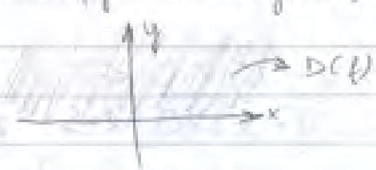


(d) $y^x \neq 0$ $\quad D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0\}$

$y \neq 0, \forall x$

$y > 0$ (exponencial)

"log → 0"

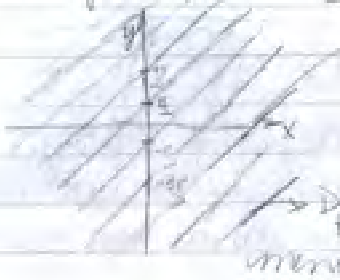


09/08/11

e) $x - y \neq \frac{\pi}{2} \neq \frac{3\pi}{2} \ldots$

$x - y \neq n\frac{\pi}{2}$ / n é ímpar $\quad \underset{\text{ímpar}}{n = 2k+1} \Rightarrow x \neq y + \frac{2k+1}{2}\pi$

$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq \frac{2k+1}{2}\pi + y$, onde $k \in \mathbb{Z}\}$

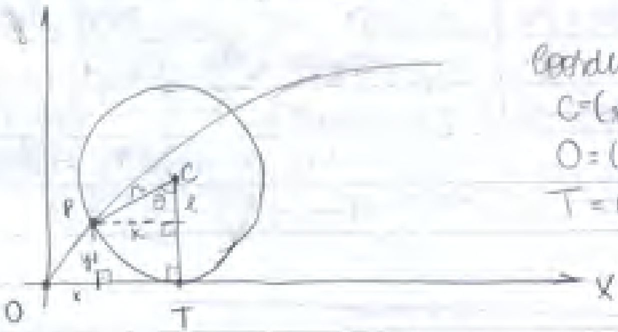


$x + \frac{2k+1}{2}\pi = y$

$k=0) \quad x + \frac{\pi}{2} = y$

$\to D_f$ (toda a parte pintada, menos as retas do tipo $y = x + \left(\frac{2k+1}{2}\right)\pi$

07- A cicloide percorre um comprimento $2\pi r$ para o ponto P sair de $y=0$ e chegar até lá novamente



Coordenadas

$C = (r\theta, r)$

$O = (0,0)$

$T = (r\theta, 0)$

$P = ?$

$\begin{cases} x(\theta) = ? \Rightarrow x(\theta) = |OT| - k \\ y(\theta) = ? \Rightarrow y(\theta) = |CT| - \ell \end{cases}$

$k = r\,\text{sen}\,\theta$

$\ell = r\cos\theta$

$P(\theta) \begin{cases} x(\theta) = r\theta - r\,\text{sen}\,\theta = r(\theta - \text{sen}\,\theta) \\ y(\theta) = r - r\cos\theta = r(1 - \cos\theta) \end{cases}, \theta \in \mathbb{R}$

08-

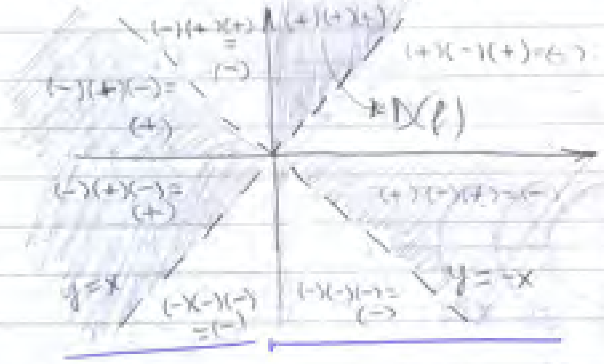
(f) $xy^2 - x^3 > 0 \Leftrightarrow$

$x(y^2 - x^2) > 0 \Leftrightarrow x(y-x)(y+x) > 0$

$x > 0$ e $y > x$ e $y > -x$

10/08/11

$D_f \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x(y-x)(y+x) \geq 0\}$

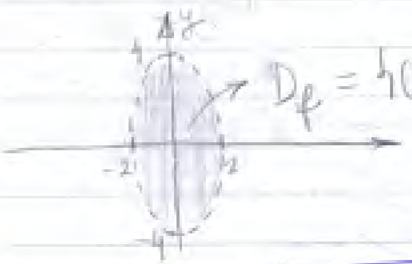


$\begin{cases} x > 0 \\ y > x \\ y > -x \end{cases}$

g) $16 - 4x^2 - y^2 > 0$

$4x^2 + y^2 < 16 \quad \div 4$

$x^2 + \frac{y^2}{4} < 4$ Elipse com centro em $(0,0)$



$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + \frac{y^2}{4} < 4\}$

09-

(a) curvas de nível.

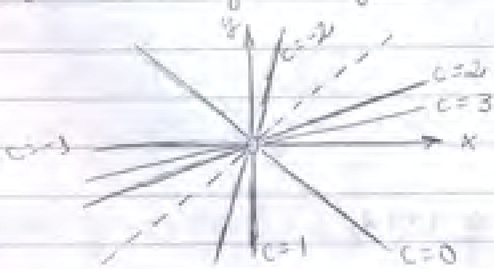
$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq y\}$

$c=0 \quad 0 = x + y \Leftrightarrow \boxed{x = -y}$

$c=1 \quad x - y = x + y \Leftrightarrow \boxed{y = 0}$

$c=2 \quad 2x - 2y = x + y \Leftrightarrow \boxed{\frac{x}{3} = y}$

$c=3 \quad 3x - 3y = x + y \Leftrightarrow \boxed{\frac{x}{2} = y}$



$c = -1) \; -x + y = x + y$

$\boxed{x = 0}$

$c = -2) \; -2x + 2y = x + y$

$y = 3x$

10/08/11

(b) $1-y^2 \geq 0$ $D(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\leq y\leq 1\}$

$y^2 \leq 1$

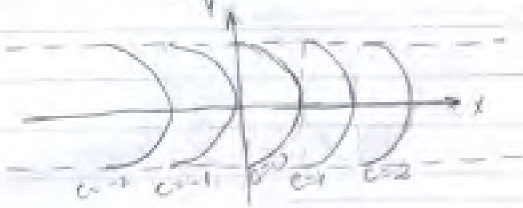
c=0) $\sqrt{1-y^2}=x$

$1-y^2=x^2 \Leftrightarrow \boxed{x^2+y^2=1}$

c=1) $\sqrt{1-y^2}=x-1$

$1-y^2=(x-1)^2$

$1=(x-1)^2+(y-0)^2$



$c=-\sqrt{1-y^2}+x$

$\sqrt{1-y^2}=x-c \rightarrow \boxed{x-c \geq 0}$

$1-y^2=(x-c)^2$

$1=(x-c)^2+y^2$

(c) $x^2 \neq y^2$ $D(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2\neq y^2\}$

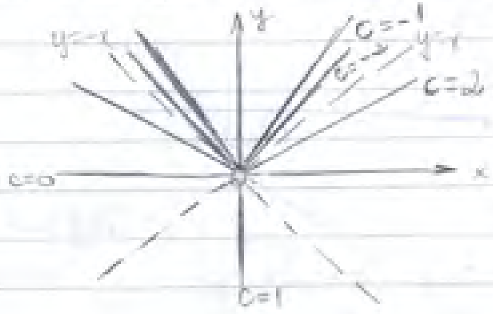
c=0) $x^2=0$

c=1) $x^2-y^2=x^2 \Leftrightarrow y^2=0$

c=2) $2x^2-2y^2=x^2 \Leftrightarrow x^2=2y^2$

c=-1) $-x^2+y^2=x^2 \Leftrightarrow 2x^2=y^2$

c=-2) $-2x^2+2y^2=x^2 \Leftrightarrow 3x^2=2y^2 \Leftrightarrow y^2=\frac{3}{2}x^2$



(d) x^2+y^4 nunca será zero, a não ser que $x=y=0$, logo

$D(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2-(0,0)\}$

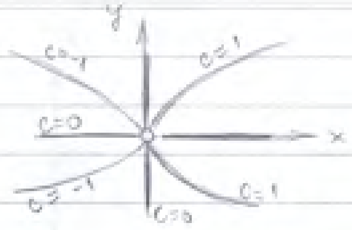
c=0) $x=0$ ou $y=0$

c=1) $x^2-2xy^2+y^4=0 \Leftrightarrow (x-y^2)^2=0$

$x=y^2$ (parábola)

c=-1) $x^2+2xy^2+y^4=0 \Leftrightarrow (x+y^2)^2=0 \Leftrightarrow x=-y^2$ (parábola)

10/08/11



10 -

(a) $D(f) = \mathbb{R}^2$

$Im(f) = \mathbb{R}$

curvas de nível

$c = 1 - x - y$

$\boxed{y = -x + 1 + c}$

retas de mesmo coeficiente angular, mas coeficiente linear diferente

gráfico: plano "de rampa"

(b) $D_f = \mathbb{R}^2$

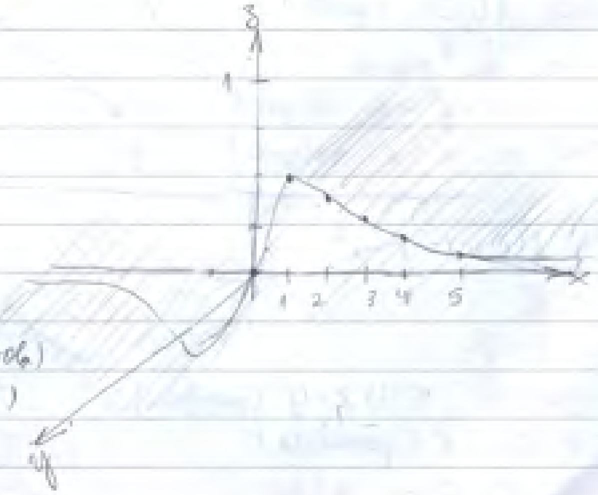
$Im(f) = \mathbb{R}$

Interseções:

$z = 0 \Rightarrow x = 0$

$x = 0 \Rightarrow z = 0$

y é uma variável livre



curvas de nível

$z = 1)\ x^2 - x + 1 = 0$ (parábola)

$z = 2)\ 2x^2 - x + 2 = 0$ (")

16/08/11

(c) $z^2 = x^2 + 9y^2$

$x^2+9y^2 \geq 0$ ✓

$D_f = \mathbb{R}^2$

$Im(f) = \mathbb{R}_+$

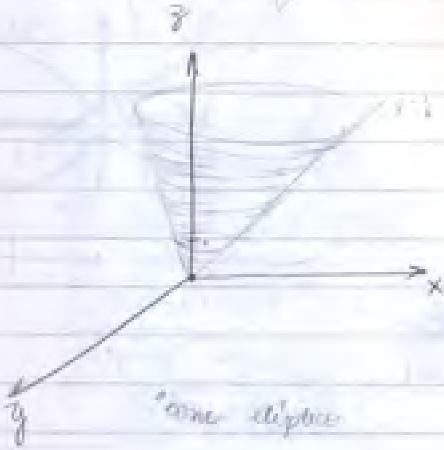
Interseções

$x=0)$ $z=3y$ (reta)

$y=0)$ $z=x$ (reta)

$z=0)$ $x^2+9y^2=0$

$x=y=0$



"cone elíptico"

Curvas de nível:

$c=1)$ $x^2+9y^2=1$

$x^2 + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1$ (elipse)

$c=2)$ $x^2+9y^2 = (\sqrt{2})^2$

d) $f(x,y) = 4x^2+y^2$

$D_f = \mathbb{R}^2$

$Im(f) = \mathbb{R}_+$

Interseções

$x=0)$ $z=y^2$ (parábola)

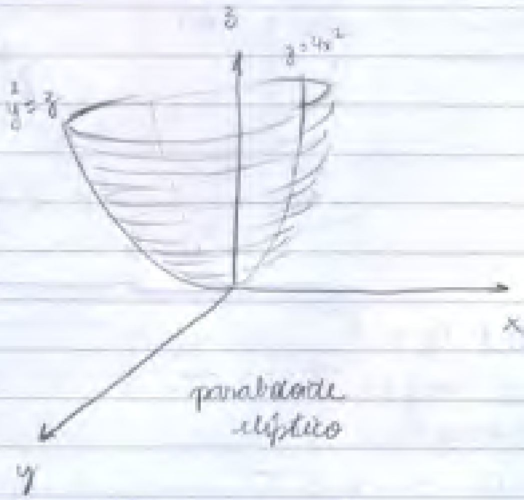
$y=0)$ $z=4x^2$ (parábola)

$z=0)$ $(0,0)$ (ponto)

Curvas de nível:

$c=1)$ $4x^2+y^2=1$ (elipse)

$c=2)$ $4x^2+y^2=2$ (elipse)



parabolóide elíptico

e) $f(x,y) = y^2 - x^2$

$D_f = \mathbb{R}^2$

$Im(f) = \mathbb{R}$

Interseções: $x=0)$ $z=y^2$ (parábola)

$y=0)$ $z=-x^2$ (parábola)

$z=0)$ $x^2=y^2 \Leftrightarrow y=|x|$

"sela"

16/08/11

curvas de nível) $c = y^2 - x^2$ (hipérboles)

(f) $f(x,y) = y^2 + 1$ (x livre)

$D = \mathbb{R}^2$

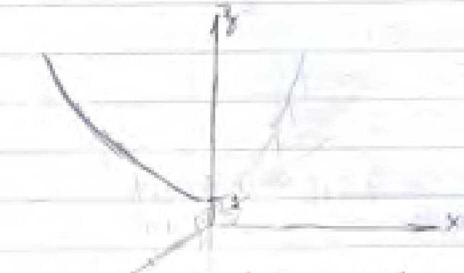
$Im(f) = \mathbb{R}_+$

Interseções) $x=0$) $z = \mathbb{R}$

$y=0$) $z = 1$

$z=0$) $y^2 = -1$ (não intercepta)

$z = y^2 + 1$ (parábola)



Parábola no plano Oyz.

(g) $f(x,y) = y^2 + x$

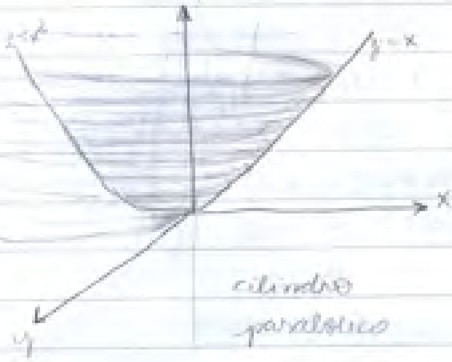
$D = \mathbb{R}^2$ $Im(f) = \mathbb{R}$

Interseções) $x=0$) $z = y^2$ (parábola)

$y=0$) $z = x$ (reta)

$z=0$) $x = -y^2$ (parábola)

curvas de nível) $c = y^2 + x \Leftrightarrow x = -y^2 + c$ (parábolas)



cilindro parabólico

(h) $f(x,y) = xy$

$D = \mathbb{R}^2$ $Im(f) = \mathbb{R}$

Interseção com alguns planos)

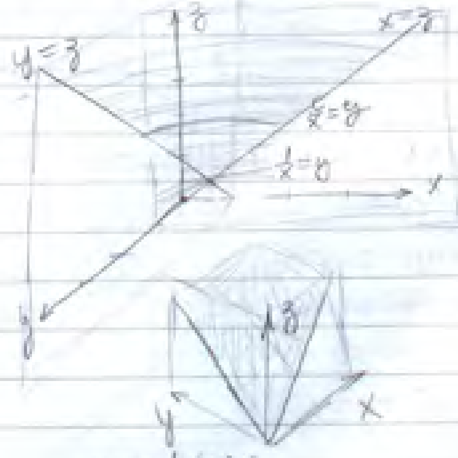
$x=1$) $y = z$ (reta)

$y=1$) $x = z$ (reta)

$z=1$) $y = \frac{1}{x}$

curvas de nível)

$\boxed{\frac{c}{x} = y}$



superfície

data 16/08/11

(i) $f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \geq 0\}$

Intersecções)

$x=0)$ $z = e^y$

$y=0)$ $z = e^x$

$z=0)$ $\exists\, x,y$ que satisfaz

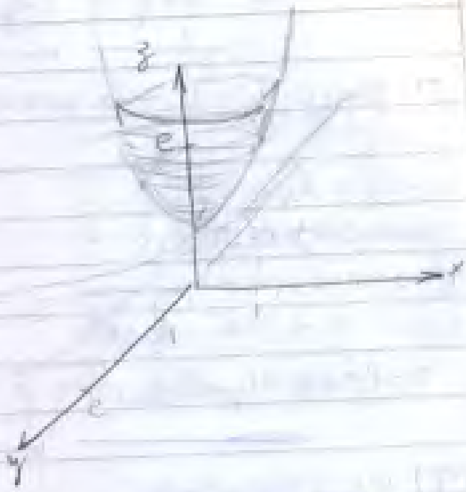
curvas de nível)

$c = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\ln c = \sqrt{x^2+y^2}\, \ln e$

$\ln c = \sqrt{x^2+y^2}$

circunferências de raio $(\ln c)$.



(j) $f(x,y) = \frac{1}{4x^2+9y^2}$ $\qquad Im(f) = \mathbb{R}_+^*$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 4x^2+9y^2 \neq 0\}$

Intersecções: $x=0)$ $y^2 = \frac{1}{9z}$

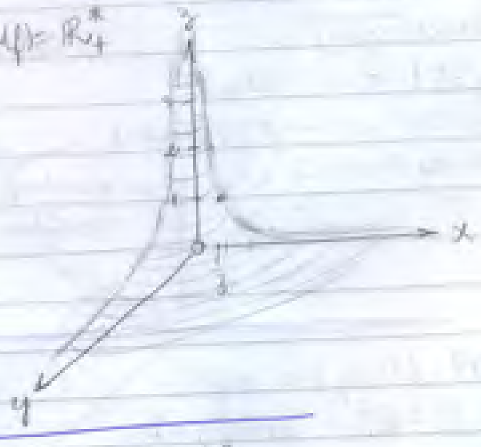
$y=0)$ $x^2 = \frac{1}{4z}$

$z=0)$ $\nexists\, x,y$ que satisfaçam

curvas de nível:

$c = \frac{1}{4x^2+9y^2}$

(elipses)



(k) $f(x,y) = (x-y)^2$

$D_f = \mathbb{R}^2$ $\quad Im(f) = \mathbb{R}_+$

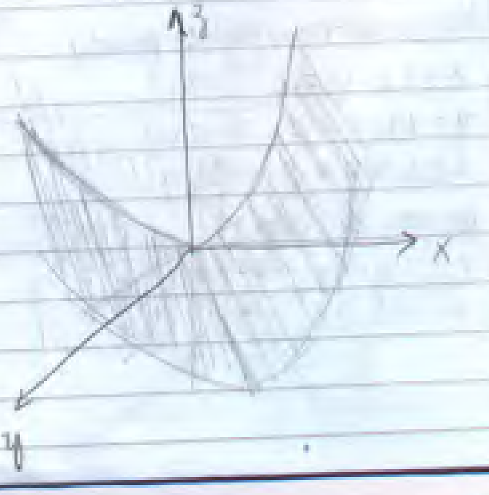
Intersecções: $x=0)$ $z = y^2$

$y=0)$ $z = x^2$

$z=0)$ $y = x$

curvas de nível

$c^2 + y = x$



16/08/2011

(l) $f(x,y) = (y+1)^2 + x^2 + 2$

$D_f = \mathbb{R}^2$

Interseções: $x=0)$ $z = y^2 + 2y + 3$

$y=0)$ $z = x^2 + 3$

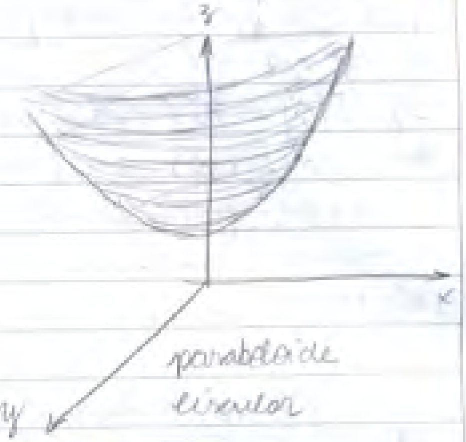
$z=0)$ $-2 = (x-0)^2 + (y+1)^2$

∄ interseção em $z=0$

curvas de nível)

$c-2 = (x-0)^2 + (y+1)^2$

circunferências de raio $\sqrt{c-2}$



(m) $f(x,y) = \frac{1}{(x^2+2y^2)^2}$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+2y^2 \neq 0\}$

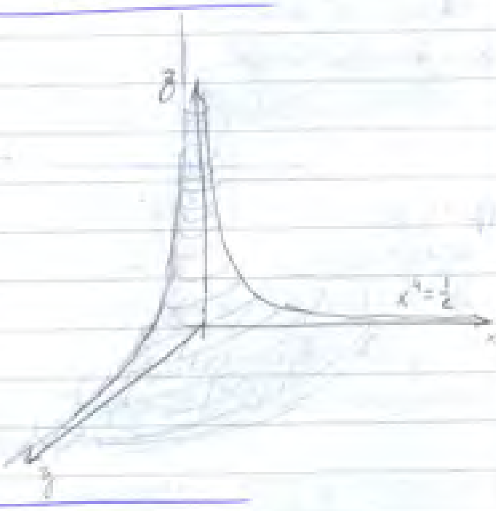
$Im(f) = \mathbb{R}_+^*$

Interseções: $x=0)$ $y^4 = \frac{1}{4z}$

$y=0)$ $x^4 = \frac{1}{z}$ $\quad z=0)$ ∄ x, y $\forall z=0$

curvas de nível)

$\sqrt{c} = \frac{1}{\underbrace{x^2+2y^2}_{\text{elipses de raio } \sqrt{c}}}$



(n) $f(x,y) = \ln(9x^2 + y^2)$

$Df = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 9x^2 + y^2 > 0\}$

$Im(f) = \mathbb{R}$

Interseção) $x=0)$ $z = 2\ln y$

$y=0)$ $z = 2\ln 3x$

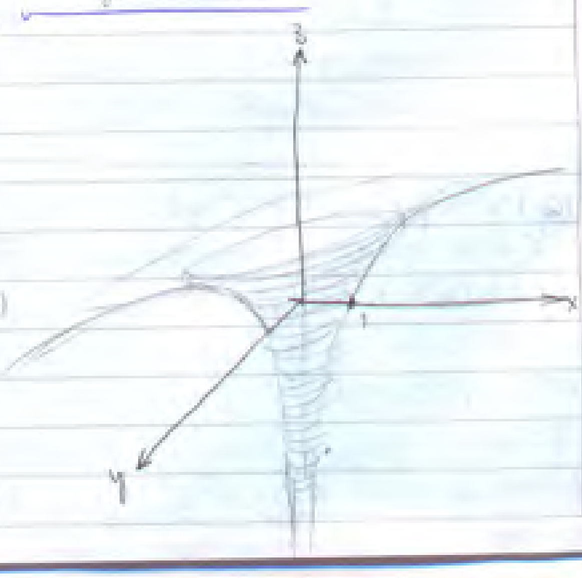
$z=0)$ $9x^2 + y^2 = 1$ (elipse)

curvas de nível)

$c = \ln(9x^2 + y^2)$

$e^c = 9x^2 + y^2$

$1 = 9\frac{x^2}{e^c} + \frac{y^2}{e^c}$ (elipses)



17/08/11

(o) $f(x,y) = 2 - \sqrt[4]{x^2+4y^2}$

$x^2+4y^2 \geqslant 0$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+4y^2 \geqslant 0\}$

Intersecções: $x=0)$ $(z-2)^4 = -2y$

$\frac{z^2-4z+4}{-2} = y$ (parábola)

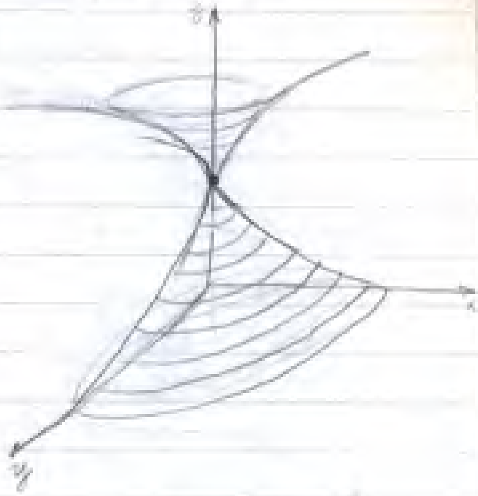
$y=0)$ $\frac{z^2-4z+4}{-1} = x$ (parábola)

$z=0)$ $(x^2+4y^2) = 16$ (elipse)

Curvas de nível)

$c = 2 - \sqrt[4]{x^2+4y^2}$

$x^2+4y^2 = (2-c)^4$ (elipses)



(p) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-9}$

$x^2+y^2 \geqslant 9$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \geqslant 9\}$

$Im(f) = \mathbb{R}_+$

Intersecções: $x=0)$ $z^2 = y^2 - 9$

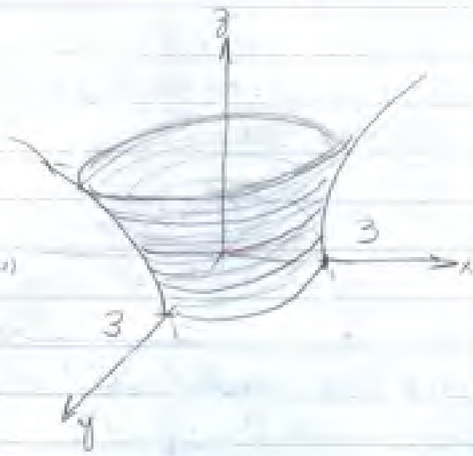
$9 = y^2 - z^2$ (hipérbole)

$y=0)$ $z^2 - x^2 = -9$ (hipérbole)

$x^2 - z^2 = 9$

$z=0)$ $x^2+y^2 = 9$ } circunferências (curvas de nível)

$z=c)$ $c^2+9 = x^2+y^2$



(q) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+1}$

$x^2+y^2 \geqslant -1$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \geqslant -1\}$

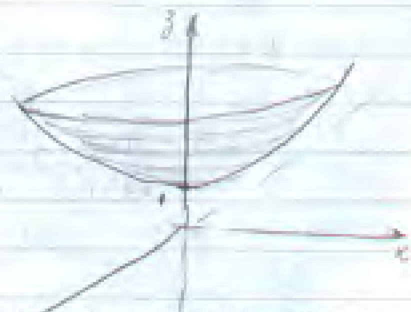
$Im(f) = \mathbb{R}_+$

Intersecções) $x=0)$ $z^2 - y^2 = 1$ hipérbole

$y=0)$ $z^2 - x^2 = 1$ hipérbole

Curvas de nível) $c^2 - 1 = x^2+y^2$

circunferências !



Hiperbolóide de duas folhas só no eixo positivo z.

18/08/11

11- (I) - (f) Os níveis são [illegible] (as [illegible]) de modo que a superfície fique arredondada;

(II) - (e) - várias subidas e descidas nas curvas de nível

(III) - (d)

(IV) - (a)

(V) - (c)

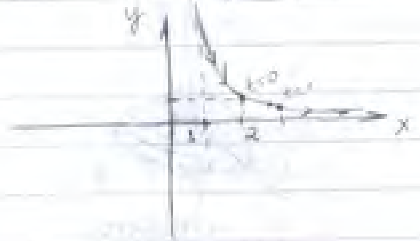
(VI) - (b)

12- $\gamma(t) = (\underbrace{e^t+1}_{>1}, \underbrace{e^{-t}}_{>0})$ (função exponencial)

a) $\frac{1}{e^t} = y \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{y} = e^t}$ $x = \frac{1}{y} + 1$

$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq 0\}$

$Im(f) = \mathbb{R} - \{1\}$



b) $z = x^2y^2 - y^2 - 2y + 4$

$z = y^2(x^2-1) - 2y + 4$

curvas de nível) $c = y^2(x^2-1) - 2y + 4$

$y = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(x^2-1)(4-c)}}{2(x^2-1)} \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{2 \pm \sqrt{4(1 - 4x^2 + x^2c + 4 - c)}}{2(x^2-1)}}$ (I)

Para que a curva γ pertença a curva de nível,

$x = \frac{1}{y} + 1 \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{1}{x-1}}$ tem de ser o mesmo y de (I), logo:

$\frac{1}{\cancel{(x-1)}} = \frac{\cancel{2} \pm \cancel{2}\sqrt{x^2(-4+c) + 5 - c}}{\cancel{2}(x+1)\cancel{(x-1)}}$

$x + 1 = 1 \pm \sqrt{x^2(-4+c) + 5 - c}$

$x = \sqrt{x^2(-4+c) + 5 - c}$

$-x = \sqrt{x^2(-4+c) + 5 - c}$

18/08/2011

$x^2 = x^2(-4+c)+5-c$

$x^2(-5+c)+5-c=0$

$x^2(-5+c)=(-5+c)$

$c=5$ ou $x=\pm 1$

$\therefore$ Sim, no nível 5.

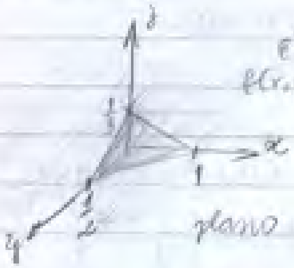
13-

(a) Interseções com os eixos.

$x=0$) reta $y=\frac{1-3z}{2}$

$y=0$) reta $x=1-3z$

$z=0$ reta $x=-2y+1$

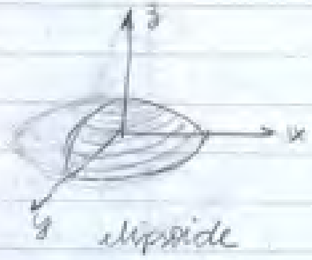


(b) Interseções) $x=0$) $2y^2+3z^2=1$ (elipse)

$y=0$) $x^2+3z^2=1$ (elipse)

$z=0$) $x^2+2y^2=1$ (elipse)

curvas de nível) $x^2+2y^2=1-3c^2$



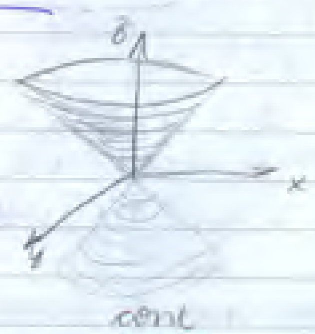
(c) $x^2+y^2-z^2=0$

Interseções) $x=0$) $y^2=z^2 \Leftrightarrow |y|=|z|$ (retas)

$y=0$) $|x|=|z|$ (retas)

$z=0$) $x^2+y^2=0 \Rightarrow (x=y=0)$

curvas de nível) circunferências $x^2+y^2=c^2$



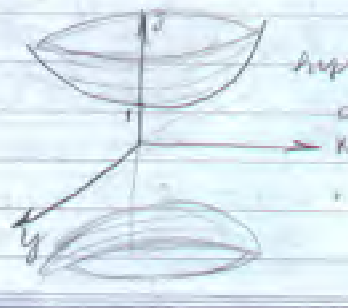
(d) $x^2+y^2-z^2=-1$

Interseções) $x=0$: $z^2-y^2=1$ (hipérbole)

$y=0$) $z^2-x^2=1$

$z=0$) $x^2+y^2=-1$ (não interseção)

$z=c$ $x^2+y^2=c^2-1$ (circ.)



18/08/11

(e) Intersecções)

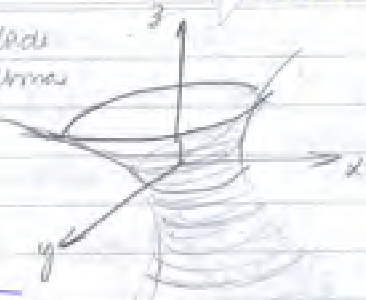
$x=0$) $y^2-z^2=1$ (hipérbole)

$y=0$) $x^2-z^2=1$ (hipérbole)

$z=0$) $x^2+y^2=1$ (circunferência)

Curvas de nível) $\boxed{x^2+y^2=c^2+1}$

hiperbolóide de uma folha



(f) $x^2-y^2=1$

(hipérbole com z livre)

cilindro hiperbólico

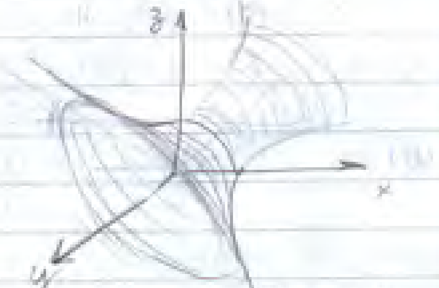
(g) $x^2-y^2+z^2=1$

Intersecções) $x=0$) $z^2-y^2=1$ (hipérbole)

$y=0$) $x^2+z^2=1$ (circunferência)

$z=0$) $x^2-y^2=1$ (hipérbole)

$x^2+z^2=c^2+1$ (circunferências ao longo do eixo y)



hiperbolóide de uma folha no eixo y.

14- $\gamma(t)=(\cos t, \cos t, \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t)$ $t\in[0,\pi[$

$x=y=\cos t$

$z^2=2\,\mathrm{sen}^2 t=(1-\cos^2 t)2=(1-y^2)2$

$z^2=2-2y^2$

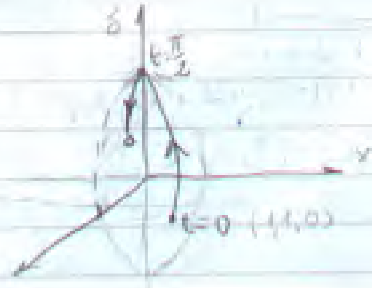
$z^2=2-2x^2$

$z^2+2y^2=2$ (elipse)

$z^2+2x^2=2$ (elipse)

$t=\frac{\pi}{2}$ $\gamma(\frac{\pi}{2})=(0,0,\sqrt{2})$

$\gamma(\pi)=(-1,-1,0)$



18/08/11

A equação de uma esfera de raio $\sqrt{2}$ com centro na origem é: $x^2+y^2+z^2=2$

Para que a curva esteja dentro da esfera, a soma dos quadrados de suas coordenadas tem de ser menor ou igual a 2

$$\begin{cases} z^2 = 2-2y^2 \\ z^2 = 2-2x^2 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 = \frac{-z^2+2}{2} \quad y^2 = \frac{-z^2+2}{2}$$

$x^2+y^2+z^2 = -z^2+2+z^2 = 2$ // Logo, a curva está contida na esfera de raio $\sqrt{2}$.

23-

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

$\gamma_1(t)=(t,0)$ $f(\gamma_1(t)) = \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t} \Rightarrow \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t} = \nexists$ (pois os limites laterais são $+\infty$ e $-\infty$)

$\gamma_2(t)=(t,t)$ $f(\gamma_2(t)) = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$ $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\Big\rangle$ $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ | $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ é limitada pois $0 \le x^2 \le x^2+y^2$
$0 \le \frac{x^2}{x^2+y^2} \le 1$

além disso, $0 \le |\cos(x^2+y^2)| \le 1$. Seja $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}\cos(x^2+y^2)$ e $g(x,y)=y$. Pelo teorema do confronto, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{f(x,y)}_{\text{limitada}} \cdot \underbrace{g(x,y)}_{\to 0} = 0$ //

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\text{limitado}} + \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{y}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\text{limitado}} = 0+0$

$= 0$ //

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{2x^4+x^2y+y^2} =$

$\gamma_1(t) = (t,t^2)$
$\lim\limits_{t\to 0} \frac{t^4}{2t^4+t^4+t^4} = \frac{1}{4}$ //

$\gamma_2(t) = (t,0)$ | $\lim\limits_{t\to 0} \frac{0}{2t^4} = 0$ // $\nexists$ limite dessa função com $(x,y)\to(0,0)$

22/08/11

21 -

a) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \underbrace{x^2+y^2+z^2=1}_{\text{esfera}} \text{ e } \underbrace{z=x+1}_{\text{plano}}\}$ Circunferência

$C \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=x+1 \end{cases}$ substituindo z: $x^2+y^2+x^2+2x+1=1$

$2\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+y^2=\frac{1}{2} \iff \underbrace{4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}_{\cos^2 t}+\underbrace{2y^2}_{\operatorname{sen}^2 t}=1$

$P\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$

$t=\frac{\pi}{2}$

$2x+1=\cos t$

$\boxed{x=\frac{\cos t-1}{2}}$ $\boxed{y=\frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}}}$ $\boxed{z=\frac{\cos t+1}{2}}$

$\gamma(t)=\left(\frac{\cos t-1}{2},\frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}},\frac{\cos t+1}{2}\right)$

$\gamma'(t)=\left(-\frac{\operatorname{sen} t}{2},\frac{\cos t}{\sqrt{2}},-\frac{\operatorname{sen} t}{2}\right)$ $\rightarrow$ reta: $X=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)+\lambda(-1,0,-1)$

15 - $\gamma(t)=\left(\sqrt{t^2+1}\cos t, \sqrt{t^2+1}\operatorname{sen} t, t\right) \in \mathbb{R}$

superfície: $x^2+y^2-z^2=1$ (hiperbolóide de uma folha)

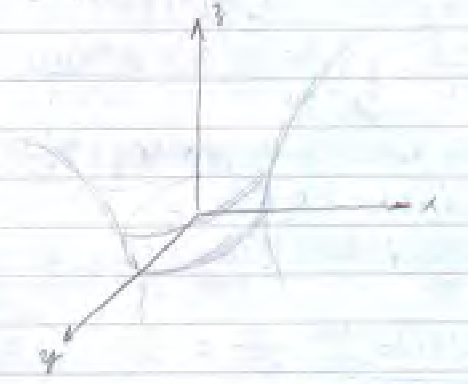
$(t^2+1)\cos^2 t+(t^2+1)\operatorname{sen}^2 t-t^2=1$

$(t^2+1)(\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t)-t^2=1$

$t^2+1-t^2=1$

$1=1$, logo a curva está contida na superfície dada.

$x^2+y^2=\frac{1}{t^2+1}$ (circunferência)



17 -

(a) $z=\sqrt{x^2+y^2+4}$

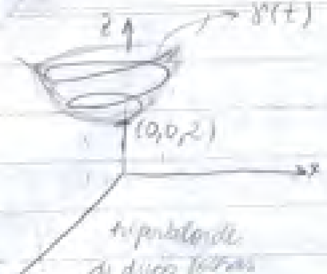
$\gamma(t)=(t\cos t, t\operatorname{sen} t, \sqrt{t^2+4})$ $t \geq 0$

$\sqrt{t^2+4}=\sqrt{t^2(\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t)+4}$

$\sqrt{t^2+4}=\sqrt{t^2+4}$, como $t \geq 0$

$t^2+4=t^2+4 \iff 0=0$, ou seja, γ está contida em f.

22/08/11



hiperbolóide de duas folhas com $z \in \mathbb{R}_+$

$Im\,\gamma \subset$ gráfico de f

$f(t\cos t, t\sin t) \stackrel{?}{=}$
$= \sqrt{t^2(\cos^2 t + \sin^2 t) + 4} = \sqrt{t^2+4} = \gamma(t)$

Portanto, $Im\,\gamma \subset G_f$:
$z = \sqrt{x^2+y^2+4} \Leftrightarrow z^2 = x^2+y^2+4,\ z \geq 0 \mid z^2 - x^2 - y^2 = 4$

20-

(a) $\gamma \begin{cases} z = y^2 - x^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

$\gamma \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \sin^2 t - \cos^2 t = -\cos 2t \end{cases}$

(b) $\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 \\ y = 2z + 1 \end{cases}$

23- (e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$

$\gamma_1(t) = (0,t)$
$\gamma_2(t) = (t,0)$

$\lim\limits_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{0+0+4t^2}{0+5t^2} = \dfrac{4}{5}$ | $\lim\limits_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \dfrac{2t^2+0+0}{3t^2+0} = \dfrac{2}{3}$

Como $L_1 = \frac{4}{5} \neq L_2 = \frac{2}{3}$, não existe limite para $(x,y)\to(0,0)$.

(f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}$ $\qquad \gamma_1(t) = (t, t^2)$

$\lim\limits_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^4}{2t^4} = \dfrac{1}{2}$

$\gamma_2(t) = (t, 0)$ $\qquad \lim\limits_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{0}{t^4} = 0$

$\nexists$ limite no ponto $(x,y) = (0,0)$

(g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^3-y}$ Tentativa: encontrar uma parametrização a partir de uma curva de nível, pois elas nunca passam pelo mesmo ponto e podemos provar que o limite não existe: $c = 1$

$\dfrac{xy}{x^3-y} = 1 = f(x,y) \Rightarrow xy + y = x^3 \Rightarrow y = \dfrac{x^3}{1+x}$

$y = t$, $x = \dfrac{t^3}{1+t}$ $\Rightarrow \gamma_1(t, \frac{t^3}{1+t})$

23/08/11

$\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = 1$

$\lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{-t^4}{2t^4} = 0$

$\gamma_2(t) = (t, -t^3)$

$\nexists$ limite em $(x,y)\to(0,0)$

(h) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x^4}{x^4+y^2}}_{\text{limitada}} \operatorname{sen}(x^2+y^2) \to 0$, pois $\operatorname{sen} 0 = 0$

$0 \leq x^4 \leq x^4+y^2$

$0 \leq \frac{x^4}{x^4+y^2} \leq 1$

Pelo T. do Confronto.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4+y^2}\cdot \operatorname{sen}(x^2+y^2) = 0$$

24-

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2}\cdot \operatorname{sen}(x^2+y^2)$

seja $t = x^2+y^2$ $\quad g(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t}$

$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\operatorname{sen}(t) \underset{\text{fundamental}}{\overset{\text{limite}}{=}} 1$

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) =$ $\left\{ \begin{array}{l} z = x^2+y^2 \geq 0 \\ g(z) = z\ln z \end{array} \right.$

$\lim_{z\to 0^+} g(z) = \lim_{z\to 0^+} z\ln z = \lim_{z\to 0^+} \frac{\ln z}{\left(\frac{1}{z}\right)} \underset{LH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\Longrightarrow}} \lim_{z\to 0^+} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)}{\left(-\frac{1}{z^2}\right)}$

$\Rightarrow \lim_{z\to 0^+} -z = 0$

23-

(g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\text{limitado}} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \to 0$

e Pelo T. do Confronto;

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

$\Rightarrow$ ...

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{sen}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0$

24/08/2011

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0$$

l) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{y^4+\operatorname{sen}(x^2+y^2)}$$ aparece (x^2+y^2) em cima e embaixo.

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^3}{x^2+y^2}+\frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}{\frac{y^4}{x^2+y^2}+\frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\underbrace{x\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\text{limitado}}+\frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}{\underbrace{y^2\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\text{limitado}}+\frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{0+1}{0+1} = 1$$

k) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y+y^4+x^4}{x^3y-xy^3}$$

$f(x,y)$: $$\lim_{t\to0} f(2t,t) = \lim_{t\to0}\frac{8t^4+t^4+t^4}{8t^4-2t^4} = \frac{10t^4}{6t^4} = \frac{5}{3}$$

$$\lim_{t\to0} f(t,2t) = \lim_{t\to0}\frac{2t^4+16t^4+t^4}{2t^4-8t^4} = -\frac{19}{6}$$

$\nexists$ lim.

i) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{x^2+y^2}$$ como a soma dos lim é o lim da soma (propriedade).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{x\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\to 0\ \text{limitado}} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{3y\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\to 0\ \text{limitado}} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{3x\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\to 0\ \text{limitado}} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{y\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\to 0\ \text{limitado}} =$$

Pelo T. do Confronto: $0+0+0+0 = 0$

22-

a) $$f(x,y) = \frac{2x^2+4y^2}{x^2+y^2+1} \quad (D_f = \mathbb{R}^2)$$

$c=1$, $c=2$, $c=3$

$2x^2+4y^2 = x^2+y^2+1$

$x^2+3y^2=1$

(elipse)

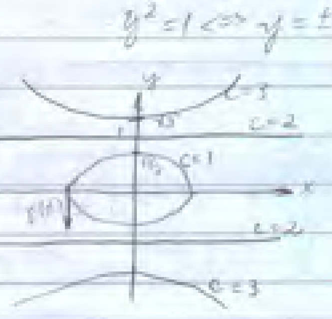
$2x^2+4y^2 = 2x^2+2y^2+2$

$y^2=1 \iff y=\pm1$

$3x^2+3y^2+3 = 2x^2+4y^2$

$x^2-y^2=-3$

$\frac{y^2}{3}-\frac{x^2}{3}=1$ (hipérbole)



24/06/11

b) Γ parametrização para
$x^2+3y^2=1$
$x=\cos t$ $\qquad \gamma(t)=\left(\cos t, \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen} t\right), t\in\mathbb{R}$ ou $[0;2\pi]$ por exemplo
$\sqrt{3}\,y=\operatorname{sen} t$

c) $\gamma'(t)=\left(-\operatorname{sen} t, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t\right)$

$(-1,0)=\gamma(\pi)$. Queremos $\gamma'(\pi)$:
$\gamma'(\pi)=\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Reta tangente
$\boxed{(x,y)=(-1,0)+\lambda\left(0,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

d) Im $\Gamma\subset$ Gráfico de f
$z(t)=f(\operatorname{sen} t,\cos t)$

$z(t)=\dfrac{2\operatorname{sen}^2 t+2\cos^2 t+2\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t+1}=\dfrac{2+2\cos^2 t}{2}=\cos^2 t+1$

$\Gamma(t)=(\operatorname{sen} t,\cos t,\cos^2 t+1)$
$\Gamma'(t)=(\cos t,-\operatorname{sen} t,-2\operatorname{sen} t\cos t)$
vetor: $\Gamma'(\pi/3)=\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},-2\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
ponto: $\Gamma(\pi/3)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)$

---

2) $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / z>0 \text{ e } x>-1\}$

(a) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad$ cone $\quad \boxed{z>0}$
$z=x+1$ $\quad$ plano $\quad x+1>0$ $\quad \boxed{x>-1}$

$x+1=\sqrt{x^2+y^2}$
$\overset{x>-1}{\Rightarrow} x^2+2x+1=x^2+y^2$
$\boxed{x=\dfrac{y^2-1}{2}}$ parábola

$\boxed{\begin{array}{l} y=t\\ x=\frac{t^2-1}{2}\end{array}}$ $\boxed{z=\frac{t^2+1}{2}}$ $\qquad \gamma(t)=\left(\frac{t^2-1}{2},t,\frac{t^2+1}{2}\right), t\in\mathbb{R}$

25/08/11

$\gamma'(t) = (t, 1, t)$ $\qquad P = (0,1,1)$

$\gamma'(1) = (1,1,1)$ $\qquad y = t = 1$

Reta tangente:

$X = (0,1,1) + \lambda(1,1,1) \quad , \lambda \in \mathbb{R}$

ou $(x,y,z) = (0,1,1) + \lambda(1,1,1) \quad , \lambda \in \mathbb{R}$

c) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \end{cases}$ esferas

$x^2 - 2x + 1 + y^2 + z^2 - 2z + 1 = 1$ $\qquad P = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$1 \quad -2x + 1 - 2z + 1 = 1$

$2 = 2x + 2z$

$\boxed{x + z = 1} \Leftrightarrow \boxed{z = 1 - x}$

$x^2 + y^2 + 1 - 2x + x^2 = 1$

$2x^2 - 2x + y^2 = 0$

$2\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + y^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + 2y^2 = 1$ (elipse)

$\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \cos t \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\cos t + 1}{2}}$ $\qquad y\sqrt{2} = \operatorname{sen} t$ $\quad \boxed{y = \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}}}$

$z = \frac{2}{2} - \frac{\cos t - 1}{2} \Leftrightarrow \boxed{z = \frac{1 - \cos t}{2}}$

$\gamma(t) = \left(\frac{\cos t + 1}{2}, \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}}, \frac{1 - \cos t}{2}\right)$

$\gamma'(t) = \left(-\frac{\operatorname{sen} t}{2}, \frac{\cos t}{\sqrt{2}}, \frac{\operatorname{sen} t}{2}\right)$ $\qquad \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} t = 1$ $\quad \boxed{t = \frac{\pi}{2}}$

$\gamma'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

Reta tangente:

$\boxed{X = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) + \lambda\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) \quad , \lambda \in \mathbb{R}}$

25/08/11

18-

a) Circunferência em xz, cresce em y ao longo de todo o eixo

b) Função crescente.

c) Parábola no plano xz ponto (0, 1, 0)

d) Função periódica, cresce em z ao longo de todo o eixo

e) Circunferência no plano xy. Cresce de acordo com a função logarítmica.

f) Curva fechada

19-

a) $-2 = x + 2y - 3$

$x = -2y + 1$ (reta)

$\gamma_1(t) = (-2t+1, t)$, $t \in \mathbb{R}$

b) $5 = x - \sqrt{1-2y^2}$

$\sqrt{1-2y^2} = x - 5$ $\quad x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$

$\overset{x \geq 5}{\Rightarrow}$ $1 - 2y^2 = (x-5)^2$

$(x-5)^2 + (\sqrt{2}y)^2 = 1$ (elipse)

$x - 5 = \cos t$ $\quad \sqrt{2}y = \operatorname{sen} t$

$\boxed{x = \cos t + 5}$ $\quad \boxed{y = \frac{\sqrt{2}\operatorname{sen} t}{2}}$ $\quad \gamma_2(t) = \left(\cos t + 5, \frac{\sqrt{2}\operatorname{sen} t}{2}\right)$

c) $x^2 - y^2 = 1$ (hipérbole)

$tg^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ $\quad \boxed{x = \sec t}$ $\boxed{y = tg\, t}$ $\quad \gamma_3(t) = (\sec(t), tg(t))$

Retas tangentes.

a) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ $\quad y = t = \frac{1}{4}$

$\gamma_1'(t) = (-2, 1) = \gamma_1'\left(\frac{1}{4}\right)$

$\boxed{X = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) + \lambda(-2, 1), \lambda \in \mathbb{R}}$

b) $(6, 0)$ $\quad \cos t + 5 = 6 \Leftrightarrow \cos t = 1$ $\quad \boxed{t = 0}$

$\gamma_2'(t) = \left(-\operatorname{sen} t, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\right)$ $\quad \gamma_2'(0) = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\boxed{X = (6, 0) + \lambda\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \lambda \in \mathbb{R}}$

spiral

25/08/11

c) $\gamma_3'(t) = (\operatorname{tg} t \sec t,\ \sec^2 t)$ $\quad]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (1º ramo)

$1 = \operatorname{tg} t$

$t = \frac{\pi}{4}$ $\quad \gamma_3'(\frac{\pi}{4}) = (\sqrt{2}, 2)$

$]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ outro ramo

$$\boxed{X = (\sqrt{2}, 1) + \lambda(\sqrt{2}, 2),\ \lambda \in \mathbb{R}}$$

em $t = \frac{\pi}{2}$, $\nexists$ curva

15 - $\operatorname{Im}\gamma \subset$ Superfície $\Leftrightarrow z(t) = f(x(t), y(t))$

$z^2 = x^2 + y^2 - 1$ (hiperbolóide de uma folha)

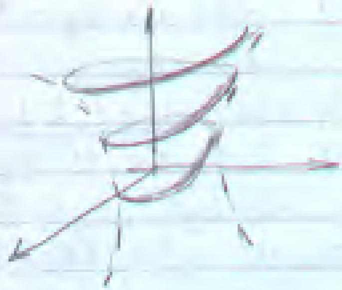
$z^2 = (t^2+1)\cos^2 t + (t^2+1)\sin^2 t - 1$

$z^2 = (t^2+1)(\cos^2 t + \sin^2 t) - 1$

$z^2 = (t^2+1)(1) - 1$

$z^2 = t^2$

$\overset{t>0}{\Rightarrow} z = t = z(t)$



20 -

(b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 1 \\ y = 2z + 1 \end{cases}$ plano

$x^2 + 4z^2 + 4z + 1 - 2z^2 = 1$

$x^2 + 2z^2 + 4z + \cancel{1} = \cancel{1}$

$(x-0)^2 + (\sqrt{2}z + \sqrt{2})^2 = 2$

$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left[\frac{(z+1)\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}}\right]^2 = 1$ elipse

$2 \cdot \sqrt{2} z \cdot b = 4z$

$b = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\boxed{x = \sqrt{2}\cos t}$ $\quad z + 1 = \sin t$ $\quad \boxed{z = \sin t - 1}$ $\quad \boxed{y = 2\sin t - 1}$

$\gamma(t) = (\cos t\sqrt{2},\ 2\sin t - 1,\ \sin t - 1)$

c) $\gamma(t): \begin{cases} x = z \\ x^2 + y^2 = z \end{cases}$

$x^2 - x + y^2 = 0$

$\left(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) + y^2 = \frac{1}{4}$

25/08/11

$2(x-\frac{1}{2})^2+4y^2=1$ $\quad 2x-1=\cos t$ $\quad 2y=\operatorname{sen} t$

$\boxed{x=\frac{\cos t+1}{2}=z}$ $\quad \boxed{y=\frac{\operatorname{sen} t}{2}}$

$\gamma(t)=\left(\frac{\cos t+1}{2}, \frac{\operatorname{sen} t}{2}, \frac{\cos t+1}{2}\right)$, $t\in\mathbb{R}$

d) $\gamma(t)=\begin{cases} z=\sqrt{4x^2+y^2} \\ z=2x+1 \end{cases}$ $\quad z>0$

$\sqrt{4x^2+y^2}=2x+1 \overset{z>0}{\Rightarrow} \cancel{4x^2}+y^2=\cancel{4x^2}+4x+1$

$\boxed{x=\frac{y^2-1}{4}}$ $\quad \boxed{y=t}$ $\quad \boxed{x=\frac{t^2-1}{4}}$ $\quad \boxed{z=\frac{t^2+1}{2}}$

$\boxed{\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,\ \gamma(t)=\left(\frac{t^2-1}{4}, t, \frac{t^2+1}{2}\right)}$

25- Fora do (0,0) e (1,1), a função é sempre contínua, pois é soma, multiplicação, subtração e quociente de outras contínuas. Devemos calcular

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ $\quad \gamma_1(t)=(t,0)$

$\lim_{t\to0} f(\gamma_1(t))=\lim_{t\to0}\frac{t^2(t-1)^2}{t^2(t-1)^2}=1$

$\gamma_2(t)=(0,t)$

$\lim_{t\to0} f(\gamma_2(t))=\lim_{t\to0}\frac{-t^2}{t^2(t-1)^2}=\lim_{t\to0}-\frac{1}{(t-1)^2}=-1$

Como os dois limites no mesmo ponto são distintos, a função não é contínua em (0,0), pois $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

b) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(1,1)} \underbrace{\frac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2+(y-1)^2}}_{\text{limitada}}$ pelo T. do confronto $=0$

$0\leq(x-1)^2\leq(x-1)^2+(y-1)^2$

$0\leq\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2+(y-1)^2}\leq1$

Portanto $f(x,y)$ é contínua em $\mathbb{R}^2-(0,0)$ somente.