[illegible] Cálculo II   Marcella Gomes   1

Tiago

$$\frac{df}{du} = \nabla f \cdot \vec{u}$$

<u>Quádricas</u>: é um conjunto de pontos que formam uma equação do tipo:

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7x + a_8y + a_9z + a_{10} = 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ e } a_n \in \mathbb{R}, n = 1,2,\dots 10,$$

e $a_1, a_2, \dots, a_6$ não todos nulos.

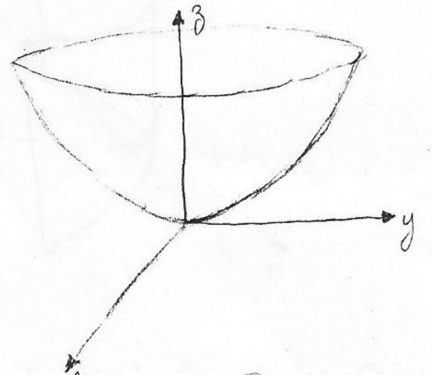
Em geral, trabalharemos com as quádricas na sua forma reduzida (sem os termos mistos) ou no máximo uma reduzida deslocada. Essas equações darão superfícies no espaço, e é de extrema importância que se saiba, dada a equação de uma quádrica, saber qual o "desenho" correspondente (tanto para Cálculo II quanto para Cálculo III!), ou então, saber como gerar o desenho pela equação.

$$\frac{z}{c} = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

Tipos de quádricas com equações reduzidas:

1) Parabolóide elíptico: $\boxed{\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$, supondo $c>0$.

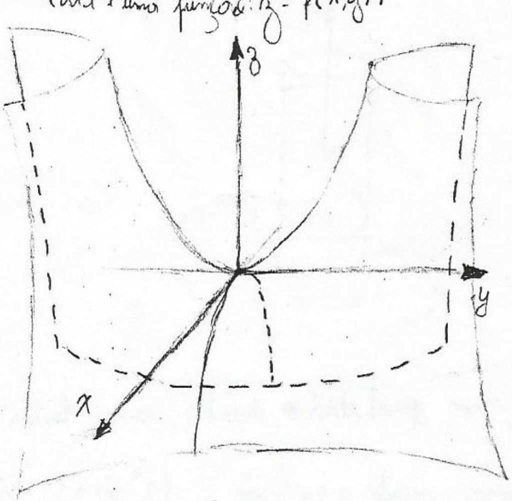
(Este é uma função: $z = f(x,y)$)



X +

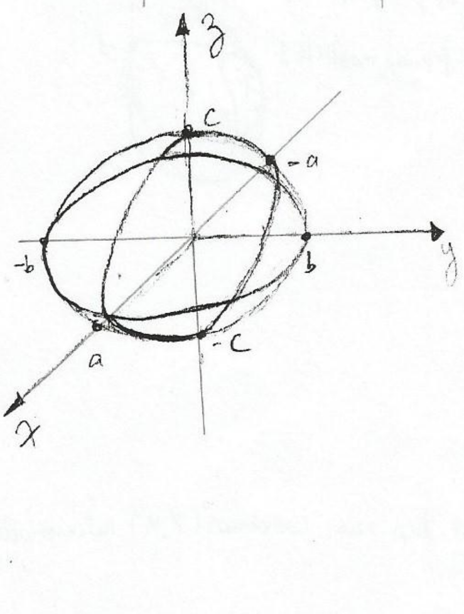
2) Parabolóide hiperbólico: $\boxed{\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$, supondo $c<0$

(Este é uma função: $z = f(x,y)$)

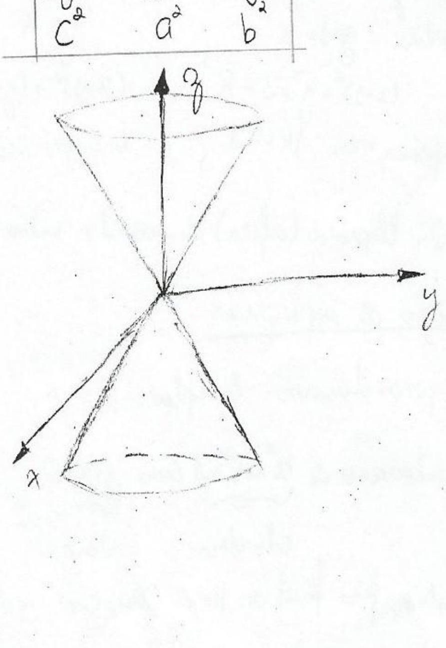


X −

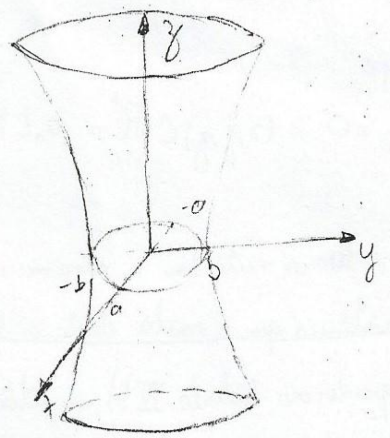
3) Elipsóide: $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}$



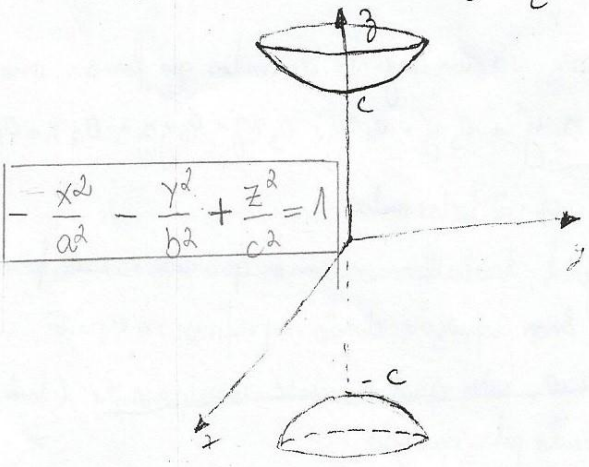
4) Cone: $\boxed{\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$



5) Hiperbolóide de 1 folha: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

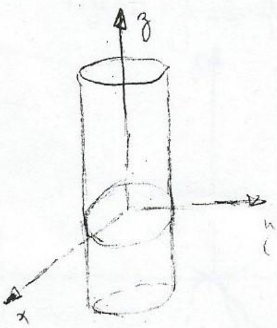


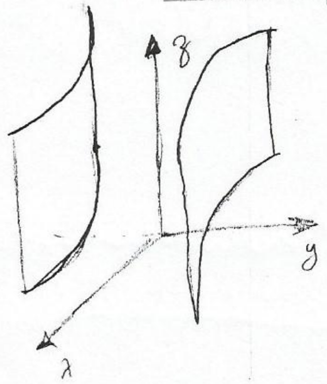
6) Hiperbolóide de 2 folhas: $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

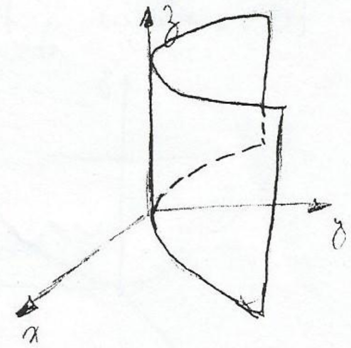


$$\boxed{-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

7) Cilindros: − base elíptica: $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ − base hiperbólica: $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$ − base parabólica: $\boxed{y = ax^2}$







Caso esqueçamos qual será o desenho, vamos tentar deduzi-lo então para a quádrica $Q: x^2 - 2x + y^2 + z^2 + 2z + 1 = 0$

Então, vamos manipular a expressão: $(x^2 - 2x + 1) + y^2 + (z^2 + 2z + 1) = 1 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 1$

Nesse caso, o "centro" da figura foi alterado para o ponto $x = 1, y = 0, z = -1$ (e é o que acontece quando adicionamos esses termos de primeiro grau na equação).

Vamos imaginar, então: $z + 1 = K$

$(x-1)^2 + y^2 = 1 - K^2$

circunferência, mas $|K| \leq 1$

$y = K$

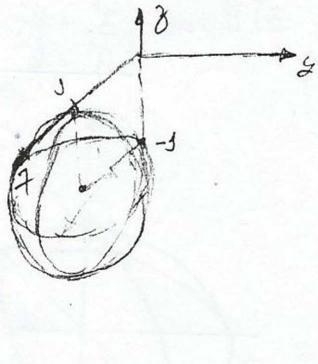
$(x-1)^2 + (z+1)^2 = 1 - K^2$

circunferência, mas $|K| \leq 1$

$x - 1 = K$

$y^2 + (z+1)^2 = 1 - K^2$

circunferência, mas $|K| \leq 1$



Q: Elipsóide (esfera) de raio 1 e centro $(1, 0, -1)$!

Curvas na interseção de superfícies

Vamos tratar da parametrização. Exemplos:

1) Parametrizar a interseção de $\underbrace{x^2 + y^2 = 1}_{\text{cilindro}}$ com $\underbrace{y + z = 2}_{\text{plano}}$.

Para o caso do cilindro, fica fácil a parametrização, pois qualquer curva contida nele terá suas coordenadas (x, y) relacionadas por: $x^2 + y^2 = 1$, e posso fazer $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Como $y + z = 2 \Rightarrow z = 2 - y$, e $z(t) = 2 - \operatorname{sen} t$, e então posso parametrizar: $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 2 - \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$

2) Parametrizar a interseção de $\underbrace{x=z}_{\text{plano}}$ e [illegible] z paraboloide

Do plano, temos a restrição que $x=z$, então: $x^2+y^2=2z \Rightarrow x^2+y^2=2x \Rightarrow x^2-2x+1+y^2=1$

$$(x-1)^2+y^2=1$$

Podemos então parametrizar: $x-1=\cos t$ $\quad y=\operatorname{sen} t \quad \therefore z=x=\cos t+1$, $t\in[0,2\pi]$

$x=\cos t+1$

$\therefore \gamma(t)=(\cos t+1, \operatorname{sen} t, \cos t+1)$, $t\in[0,2\pi]$

<u>Funções de 3 variáveis</u> $F(x,y,z)$, $(x,y,z)\in I\subset\mathbb{R}^3$.

Nesse caso, não trabalharemos com gráficos, uma vez que esses estão no $\mathbb{R}^4$!

Para essas funções, as ideias de limites, derivada direcional, diferenciabilidade, ... são as mesmas (e não serão muito trabalhadas!)

O que vamos usar: $\nabla F(x,y,z)=\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z); \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z); \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)\right)$

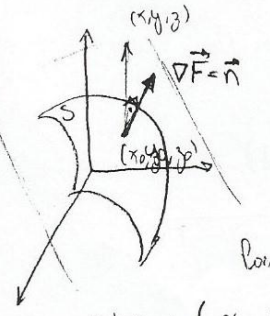
$\boxed{\frac{\partial F}{\partial \vec{u}}(x_0,y_0,z_0)=\nabla F(x_0,y_0,z_0)\cdot\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}}$, se F for diferenciável no ponto, e essa derivada direcional é máxima na direção do gradiente.

Se fizermos $F(x,y,z)=C$, $C\in\mathbb{R}$, então temos uma <u>superfície de nível</u> da F (em analogia com as curvas de nível de $f(x,y)$), e $\boxed{\nabla F \text{ é normal a essa superfície}}$ (como o $\nabla f(x,y)$ era normal à curva de nível). Em geral, essas superfícies serão ou quádricas ou planos (coisas conhecidas!).

Vamos usar isso para achar o plano tangente e a reta normal a uma superfície:

<u>Exemplo</u>: $xyz+x^3+y^3+z^3=3z$, ache a reta normal e o plano tangente no ponto $(1,-1,2)=(x_0,y_0,z_0)$

Podemos fazer $F(x,y,z)=xyz+x^3+y^3+z^3-3z$, e a nossa superfície será superfície de nível 0 dessa função.



Então, $\nabla F(x,y,z)$ é o vetor normal à superfície, e $\nabla F(x,y,z)=(yz+3x^2;\ xz+3y^2,\ xy+3z^2-3)$

$\nabla F(1,-1,2)=(1,5,8)=\vec{n}$

Reta normal: $X=(1,-1,2)+\lambda\cdot(1,5,8)$, $\lambda\in\mathbb{R}$

Para achar o plano tangente, sabemos que, $\forall(x,y,z)\in$ plano tg, o vetor $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ será normal a $\vec{n}$

Então: $(x-1, y+1, z-2)\cdot(1,5,8)=0 \Rightarrow x+5y+8z=12$ $\quad \frac{df}{dx}(x-x_0)+\frac{df}{dy}(y-y_0)+\frac{df}{dz}(z-z_0)=0$

Vamos considerar agora uma curva dada pela interseção de superfícies. Então, a reta tangente a essa curva estará contida nos planos tangentes às duas superfícies (análogo a uma curva contida no gráfico de uma função). Logo, o vetor tangente (vetor diretor da reta) será normal aos dois vetores normais $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$, logo, terá a direção de: $\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2$.

<u>Exemplo</u>: Um γ está contido na interseção de $x^2+2y^2+z=4$ e $x^2+y+z=3$, e $\gamma(t_0)=(1,1,1)$, $\gamma'(t_0)\neq\vec{0}$. Ache a reta tangente à γ em t_0.

Podemos fazer $F(x,y,z)=x^2+2y^2+z$, e a primeira superfície é a sup. de nível 4 da F. Logo, $\vec{n}_1=\nabla F(1,1,1)=(2,4,1)$

$G(x,y,z)=x^2+y+z$, e a segunda superfície é a sup. de nível 3 da G. Logo, $\vec{n}_2=\nabla G(1,1,1)=(3,0,-6)$.

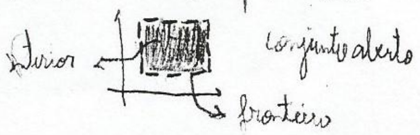
vetor diretor da reta: $\vec{v}=\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2=(3,0,-6)$, e a reta tg será: $X=(1,1,1)+\lambda\cdot(3,0,-6)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

$\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2=\nabla f_1\wedge\nabla f_2$

Máximos e Mínimos

O estudo de máximos e mínimos em funções de mais variáveis pode ser bem complicado. Vamos nos restringir a alguns casos particulares.

Primeiramente, vamos estudar os pontos críticos das funções (análogo ao cálculo I), e para isso, estudaremos conjuntos abertos (sem suas fronteiras).



Pontos críticos: Se (x_0,y_0,z_0) é ponto crítico de $f(x,y,z)$, então $\boxed{\nabla f(x_0,y_0,z_0)=\vec{0}}$ (o mesmo para $f(x,y)$ e (x_0,y_0), e isso vem dos pontos de derivada nula de funções de uma variável). Obs.: f deve ser diferenciável!

Esses pontos são certamente candidatos a extremo da função, uma vez que podem ser máximos ou mínimos locais, mas podem também não sê-los, e nesse caso, são chamados de $\boxed{\text{pontos de sela}}$. Classificar os pontos críticos é bem difícil, mas para funções de duas variáveis, temos um teorema que nos ajuda em alguns casos. Vamos definir primeiro uma matriz chamada de Hessiano:

$\boxed{\text{Se } f(x,y) \text{ de classe } C^2}$. Defino:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix}$$

o hessiano de f.

Teorema: Se (x_0,y_0) é ponto no interior do D_f, e $\boxed{\nabla f(x_0,y_0)=\vec{0} \text{ e } H(x_0,y_0)\neq 0}$, então:

a) Se $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)>0}$ e $\boxed{H(x_0,y_0)>0}$, então (x_0,y_0) é $\boxed{\text{mínimo local}}$.

b) Se $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)<0}$ e $\boxed{H(x_0,y_0)>0}$, então (x_0,y_0) é $\boxed{\text{máximo local}}$.

c) Se $\boxed{H(x_0,y_0)<0}$, então (x_0,y_0) é $\boxed{\text{ponto de sela}}$.

Se $H(x_0,y_0)=0$, então não concluo nada!

Exemplo: $f(x,y) = x^3+y^3-3x-3y+4$

$\nabla f(x,y) = (3x^2-3; 3y^2-3) \Rightarrow$ pontos críticos: $\begin{cases} 3x^2-3=0 \Rightarrow x=\pm 1 \\ 3y^2-3=0 \Rightarrow y=\pm 1 \end{cases}$ $(1,1); (1,-1); (-1,1); (-1,-1)$

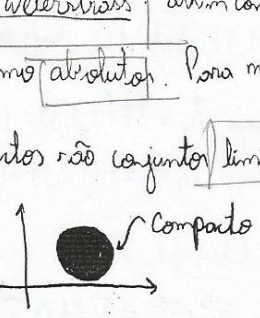
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y \Rightarrow H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 36xy$

$(1,1) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6 > 0$ e $H(1,1) = 36 > 0$; $(-1,-1) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6 < 0$ e $H(-1,-1) = 36 > 0$; $H(1,-1) = H(-1,1) = -36 < 0$

mínimo local — máximo local — pontos de sela

$\boxed{\text{Teorema de Weierstrass}}$: assim como tínhamos para o cálculo I o Weierstrass para intervalo fechado que garantia máximo e mínimo $\boxed{\text{absolutos}}$. Para mais variáveis, temos os análogos ao $\boxed{\text{intervalo fechado}}$: conjuntos compactos.

Conjuntos compactos são conjuntos $\boxed{\text{limitados}}$ (não infinitos) e $\boxed{\text{fechados}}$ (que contém toda a sua fronteira).



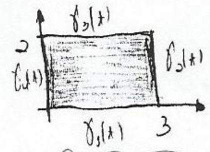
Então, pelo teorema de Weierstrass, uma função num conjunto compacto possui máximo e mínimo absolutos.

Então, esses máximos e mínimos podem estar no interior ou na fronteira do conjunto. No interior do conjunto, os candidatos são os pontos críticos. Na fronteira, existem outras técnicas. Uma delas é "parametrizar" a fronteira e fazer a análise.

Exemplo: determine máx e mín absolutos de $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3 ; 0 \leq y \leq 2\}$

Sabemos que f é C^1 em D, e logo contínua e diferenciável. D é compacto (um retângulo), e por Weierstrass, f tem máx. e mín. absoluto em D.

uma função num intervalo compacto de C^2 tem máx/mín absolutos



Fronteira: $\gamma_1(t) \cup \gamma_2(t) \cup \gamma_3(t) \cup \gamma_4(t)$

$\gamma_1(t) = (t, 0)$, $t \in [0;3]$; $\gamma_2(t) = (3, t)$, $t \in [0;2]$; $\gamma_3(t) = (t, 2)$, $t \in [0,3]$, $\gamma_4(t) = (0, t)$, $t \in [C$

- Análise do interior: No interior, os candidatos a extremo são os pontos críticos:

$\boxed{\nabla f(x,y) = \vec{0}} \Rightarrow (2x - 2y ; -2y + 2) = (0,0)$, logo, $(1,1)$ é o único ponto crítico, e está no interior de D!

- Análise da fronteira:

$f(t,0) = t^2$

$-\gamma_1(t) = (t,0)$, $t \in [0,3]$ e seja $g(t) = f(\gamma_1(t)) = t^2$, $t \in [0,3]$. Se (x_0,y_0) é extremo da f, então t_0 é extremo da g, tq $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$. Extremos da g: $g'(t) = 0 \Rightarrow 2t = 0$, $t = 0$. Como g está definida no fechado $[0,3]$, pois Weierstrass ela possui extremos absolutos. Os candidatos são: $t = 0$, $t = 3$ e os pontos críticos ($t = 0$). Então, daqui, tiramos os candidatos $(0,0)$ e $(3,0$

Fazendo uma análise semelhante para $\gamma_2(t)$; $\gamma_3(t)$; $\gamma_4(t)$, obtemos também os candidatos $(0,2)$; $(2,2)$; $(3,2)$.

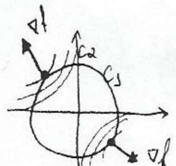
Candidatos: $(1,1)$; $(0,0)$; $(3,0)$; $(0,2)$; $(2,2)$; $(3,2)$

$f(1,1) = 1$; $f(0,0) = 0$; $f(3,0) = 9$; $f(0,2) = 4$; $f(2,2) = 0$; $f(3,2) = 1$

mínimo: $f(0,0) = 0$, $f(2,2) = 0$

máximo: $f(3,0) = 9$

Multiplicadores de Lagrange



Seja C_2 curvas de nível de uma f, e C_1 a curva "fronteira" que estou analisando.

Sabemos que ∇f aponta na direção de maior crescimento da f. Então, os extremos da f em C_1 estão onde os gradientes da f e "da C_1" (imaginando C_1 como curva de nível de uma g) são paralelos.

- Teorema (Multiplicadores de Lagrange)

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável, A aberto

$B\{(x,y) \in A : g(x,y) = C\}$, g de classe C^1 em A e $\nabla g(x,y) \neq (0,0)$ em B. Uma condição necessária para que $(x_0,y_0) \in B$ seja extremo local de f em B é que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $\nabla f(x_0,y_0) = \lambda . \nabla g(x_0,y_0)$

Exemplo: $f(x,y) = xy$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Vamos determinar máximos e mínimos (D é compacto!)

Nesse caso, $g(x,y) = x^2 + y^2$, e f, g são de classe C^1 em B. Então, se (x_0,y_0) é extremo de f em g, então:

$(\nabla f(x,y) = (y, x) \neq \vec{0}$
$\nabla g(x,y) = (2x, 2y) \neq \vec{0})$

$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 1 \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ isso diz que os dois vetores são paralelos. Então, o produto vetorial deles é nulo. Podemos escrever:

$\begin{vmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x^2 = 2y^2$, $x = \pm y$

Se $x = y$: $x^2 + y^2 = 1$, $x = \pm 1/\sqrt{2}$

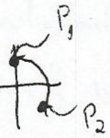
Se $x = -y$: $x^2 + y^2 = 1$, $x = \pm 1/\sqrt{2}$

4 pontos: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}};\right.$

$f(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2} \Rightarrow$ máximo

$f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ mínimo

Mas atenção!!! Se pegamos uma curva "limitada" Exemplo.



Lagrange "não vê" P_1 e P_2, é preciso adicionar esses pontos como candidatos.

Lagrange para funções de 3 variáveis

Funciona da mesma forma que para funções de duas variáveis, mas para determinar superfícies limítrofes.

Teorema: $f: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dif, A aberto e $B = \{(x,y,z) \in A : g(x,y,z) = C\}$, g de classe C^1 em A, $\nabla g(x,y,z) \neq \vec{0}$ em B. Se (x_0,y_0,z_0) é extremo local de f em B, então $\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \lambda . \nabla g(x_0,y_0,z_0)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemplo: Tente achar máximos e mínimos de $f(x,y,z) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z$ em $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 56\}$

Tente resolver isso, mas perceba que $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \Rightarrow (2x-2; 2y-4; 2z-6) = \lambda.(2x, 2y, 2z) \Rightarrow \begin{cases} 2x-2 = 2\lambda x \\ 2y-4 = 2\lambda y \\ 2z-6 = 2\lambda z \end{cases}$

$g(x,y,z) = 56$

Obs.: Dada a superfície $x^2+y^2+z^2 = 1$ e $x+z \geq 0 \Rightarrow$

→ Lagrange "não vê"! Esse é o plano $z = -x$

Então, vou analisar isso como $f(x,y,-x) = g(x,y)$, restrito à condição $x^2+y^2+(-x)^2 \leq 1$

ponto de crescimento máximo: P
direção $\nabla G(P)$
taxa de variação $|\nabla G(P)|$

Lagrange com duas condições

E como analisamos funções de 3 variáveis em curvas?

Nesse caso, as curvas ficarão restritas a interseção de superfícies. Então, formos $g(x,y,z) = C$ a superfície 1, e $h(x,y,z) = d$ a superfície 2, e impomos: $\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \lambda . \nabla g(x_0,y_0,z_0) + \mu . \nabla h(x_0,y_0,z_0)$, algum $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Para isso, $f: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciável, A aberto, e $B = \{(x,y,z) \in A : g(x,y,z) = C \text{ e } h(x,y,z) = d\}$, g e h de classe C^1 em A e $\nabla g \wedge \nabla h \neq \vec{0}$.

Exemplo: Determine extremos de $f(x,y,z) = x+2y+3z$ na curva dada pela interseção de $x-y+z=1$ com $x^2+y^2=1$.

Nesse caso, $g(x,y,z) = x-y+z$; $h(x,y,z) = x^2+y^2$, e f, g, h são de classe C^1.

$\nabla g(x,y,z) = (1,-1,1) \neq \vec{0}$, $\nabla h(x,y,z) = (2x, 2y, 0)$ e $\nabla g \wedge \nabla h = (-2y, 2x, 2x+2y) \neq \vec{0}$ se $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ (ou seja, $\neq \vec{0}$ em B)

Então, podemos aplicar o teorema dos multiplicadores de Lagrange: $(\nabla f(x,y,z) = (1,2,3))$

$$\begin{cases} (1,2,3) = \lambda.(1,-1,1) + \mu.(2x,2y,0) \Rightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu x = 1 \\ -\lambda + 2\mu y = 2 \\ \lambda = 3 \end{cases} \\ g(x,y,z) = 1 \\ h(x,y,z) = 1 \end{cases}$$

$\lambda + 2\mu x = 1 \rightarrow 2\mu x = -2 \overset{\mu \neq 0}{\Rightarrow} x = -1/\mu$

$-\lambda + 2\mu y = 2 \rightarrow 2\mu y = 5 \overset{\mu \neq 0}{\Rightarrow} y = \frac{5}{2}\mu$

De $h(x,y,z) = 1 \Rightarrow x^2+y^2 = 1 \Rightarrow (-\frac{1}{\mu})^2 + (\frac{5}{2}\mu)^2 = 1 \Rightarrow \mu = \pm\frac{\sqrt{29}}{2}$ $\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{29}}, \ y = -\frac{5}{\sqrt{29}} \\ x = -\frac{2}{\sqrt{29}}, \ y = \frac{5}{\sqrt{29}} \end{cases}$

Como $g(x,y,z) = 1 \Rightarrow x-y+z = 1$ $\begin{cases} z = 1+\frac{7}{\sqrt{29}}, \ x = -\frac{2}{\sqrt{29}}, \ y = \frac{5}{\sqrt{29}} \Rightarrow f(x,y,z) = 3+\sqrt{29} \text{ Máximo} \\ z = 1-\frac{7}{\sqrt{29}}; \ x = \frac{2}{\sqrt{29}}, \ y = -\frac{5}{\sqrt{29}} \Rightarrow f(x,y,z) = 3-\sqrt{29} \text{ Mínimo} \end{cases}$