1. (3 pontos) Seja a função $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + xy^2}$

(a) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$ para todo vetor unitário $\vec{u} = (a,b)$.

(b) É f diferenciável em $(0,0)$? **JUSTIFIQUE!**

(c) Seja $q \neq 0$. Existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,q)$?

(d) Em que pontos de $\mathbb{R}^2$ é f diferenciável? **JUSTIFIQUE!**

(a) Por definição $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(0+at, 0+bt) - f(0,0)}{t}$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt[3]{a^3t^3 + ab^2t^3}}{t} = \sqrt[3]{a\underbrace{(a^2+b^2)}_{1}} = \sqrt[3]{a}$$

(b) Por (a) temos que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ $(\vec{u} = (1,0))$

e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. $(\vec{u} = (0,1))$.

Se f fosse diferenciável em $(0,0)$, teríamos que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \langle \nabla f(0,0), \vec{u} \rangle = \langle (1,0), (a,b) \rangle = a$.

Ou seja teríamos que ter $\sqrt[3]{a} = a$ $\forall a$ com $|a| \leq 1$. É claro que isso não é verdade. (Só é verdade para $a = 0$ ou $a = \pm 1$).

(c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,q) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x,q) - f(0,q)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x^3 + xq^2}}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \sqrt[3]{1 + \dfrac{q^2}{x}}$ e esse limite não existe,

$\left(\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt[3]{1 + q^2/x} = +\infty \right.$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} \sqrt[3]{1 + \dfrac{q^2}{x}} = -\infty$.

$(q \neq 0 \Rightarrow q^2 > 0)$

(d) Se $x \neq 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{3}(x^3 + xy^2)^{-2/3} \cdot (3x^2 + y^2)$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{3}(x^3 + xy^2)^{-2/3} \cdot 2xy$

e essas derivadas são contínuas.

Em $(0,0)$ f não é diferenciável por (b) e em $(0,q)$, $q \neq 0$, f não é diferenciável por (c).

Logo f é diferenciável nos pontos (x,y) com $x \neq 0$.

2. (2,5 pontos) Seja $f(x,y) = (x^2 - 2xy)e^{-y}$

(a) Determine os pontos críticos de f e classifique-os.

(b) Determine o máximo e o mínimo de f no quadrado (com interior e bordas) cujos vértices são $(0,0), (3,0), (3,3)$ e $(0,3)$.

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2x - 2y)e^{-y}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (-2x - x^2 + 2xy)e^{-y}$

$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \Rightarrow x = y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \Rightarrow -2x - 2x^2 + 2xy = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$.

Assim, os pontos críticos são $(0,0)$ e $(2,2)$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2e^{-y}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (-2 - 2x + 2y)e^{-y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (2x + x^2 - 2xy + 2x)e^{-y}$

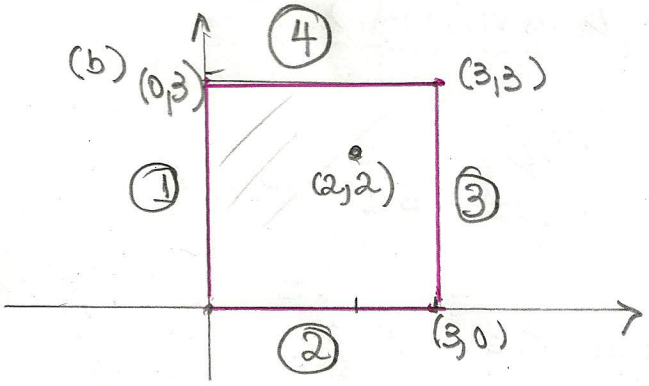
Assim, $H(0,0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0.$

Logo $(0,0)$ é ponto de sela.

$H(2,2) = \begin{vmatrix} 2e^{-2} & -2e^{-2} \\ -2e^{-2} & 4e^{-2} \end{vmatrix} = 4e^{-4} > 0$ e

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,2) = 2e^{-2} > 0 \Rightarrow$ $(2,0)$ é ponto de mínimo local

(b)



Os candidatos a pontos de máximo e mínimo de f no quadrado são:

(1) pontos críticos de f no interior do quadrado.
$(2,2)$

(2) pontos de máximo e de mínimo de f na fronteira do quadrado.

(1) $x = 0$ e $0 \leq y \leq 3$

$f(0,y) = 0 \qquad (0,y),\ y \in [0,3]$.

(4) $y = 3$ e $0 \leq x \leq 3$

$f_1(x) = f(x,3) = e^{-3}(x^2 - 6x)$

candidatos $x = 0$ e $x = 3$ (extremos de $[0,3]$)

$\Rightarrow (0,3)$ e $(3,3)$

e ptos críticos de f_1 em $]0,3[$.

Mas $f_1'(x) = (2x-6)e^{-3}$ e f_1 não tem ptos críticos em $]0,3[$.

(3) $x = 3$ e $0 \leq y \leq 3$

$f_2(y) = f(3,y) = (9-6y)e^{-y}$

candidatos: $y = 0$ e $y = 3$ (extremos de $[0,3]$).

pontos críticos de f em $]0,3[$.

$f_2'(y) = -6e^{-y} - 9e^{-y} + 6ye^{-y} = 0$

$= e^{-y}(-15 + 6y) \Rightarrow y = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} \in]0,3[$

Temos então o ponto $(3, 5/2)$.

(2) $y = 0$ e $0 \leq x \leq 3$

$f_3(x) = x^2$. Candidatos $x = 0$ e $x = 3$.

$(0,0)$ e $(3,0)$

(x_0, y_0)	$f(x_0, y_0)$
$(2,2)$	$-4e^{-2}$ MÍNIMO
$(0,y)$, $y \in [0,3]$	0
$(3,0)$	$9e^{-3} \longrightarrow$ <u>MÁXIMO</u>
$(3,3)$	$-9e^{-3}$
$(3, 5/2)$	$(9 - \cancel{2}\cdot 3 \cdot \frac{5}{\cancel{2}})e^{-5/2} = -6e^{-5/2}$

Se $h(t) = t^2 e^{-t} \Rightarrow h'(t) = 2te^{-t} - t^2 e^{-t}$

$= t(2-t)e^{-t}$

$- \; - \quad + + + + \quad - \; -$ $\quad h'$

$0 \qquad 2$

$\searrow \quad \nearrow \quad \searrow \quad h$

$\Rightarrow h(2) > h(3)$

$\Rightarrow 4e^{-2} > 9e^{-3}$

$\Rightarrow \underline{\underline{-4e^{-2}}} < -9e^{-3}$

Também, $4e^{-2} > \frac{25}{4} e^{-5/2} > 6e^{-5/2}$

Logo $-4e^{-2} < -6e^{-5/2}$

3. (1,5 ponto) Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Seja $\gamma(t) = (2t, t^2, z(t))$ uma curva diferenciável tal que sua imagem está contida no gráfico de f. A equação da reta tangente a γ em $\gamma(1)$ é $(x, y, z) = (2, 1, -2) + \lambda(1, 1, 4)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$. Determine A e B para que o plano de equação $z = Ax + By - 3$ seja plano tangente ao gráfico de f em $(2, 1, f(2, 1))$.

$\gamma(1) = (2, 1, z(1))$

Como $\operatorname{Im} \gamma \subset G_f$, $\boxed{z(1) = f(2,1)}$

Por outro lado como $(x, y, z) = (2, 1, -2) + \lambda(1, 1, 4)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

é tangente à γ em $\gamma(1)$, ela contém o ponto $\gamma(1)$. Logo $(2, 1, \gamma(1)) = (2, 1, -2) + \lambda_0(1, 1, 4)$ para algum $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Logo $\lambda_0 = 0$ e

$$\gamma(1) = -2 = f(2,1)$$

O vetor normal a G_f em $(2, 1, f(2,1))$ é $(A, B, -1)$. Como $\operatorname{Im} \gamma \subset G_f$,

$(A, B, -1) \perp (1, 1, 4)$

Assim: $\boxed{A + B - 4 = 0}$

Como o plano $z = Ax + By - 3$ é tangente ao G_f em $(2, 1, -2)$, esse ponto pertence ao plano.

Logo $\boxed{2A + B - 3 = -2}$.

Resolvendo o sistema temos:

$\boxed{A = -3}$ e $\boxed{B = 7}$

4. (3 pontos) Seja $f(x,y,z) = x^2 - 4y^2 + 2z^2$. Obtenha os valores máximo e mínimo de f no compacto $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 4 \text{ e } z = x + y - 2\}$

Como K é compacto e f é contínua o problema tem solução.

(1) Procurar os candidatos a pontos de máximo e mínimo de f em

$$\begin{cases} \underbrace{x^2+y^2+2z^2}_{g(x,y,z)} = 4 \\ \underbrace{x+y-z}_{h(x,y,z)} = 2 \end{cases}$$

$\nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, 4z)$

$\nabla h(x,y,z) = (1, 1, -1)$

Se $\nabla g(x,y,z) \parallel \nabla h(x,y,z) \Rightarrow (2x, 2y, 4z) = \lambda(1,1,-1)$.

Assim: $x = y = -2z$. Portanto: $z = -2z - 2z - 2$

$\Rightarrow 5z = -2 \Rightarrow z = -2/5. \Rightarrow x = y = 4/5$

Mas $x^2+y^2+2z^2 = \frac{4}{25} + \frac{4}{25} + \frac{32}{25} = \frac{40}{25} \neq 4$.

Portanto $\nabla g(x,y,z) \wedge \nabla h(x,y,z) \neq \vec{0}$ $\forall (x,y,z)$ com $x^2+y^2+2z^2 = 4$ e $z = x+y-2$.

Por Lagrange temos que os candidatos a pontos de máximo e mínimo de f estão entre os pontos que satisfazem:

$$(*)\begin{cases} \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ com } \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) + \mu \nabla h(x,y,z) \\ \text{e } x^2 + y^2 + 2z^2 = 4 \\ z = x + y - 2 \end{cases}$$

Então:
$$\begin{vmatrix} x & -4y & 2z \\ x & y & 2z \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$-8yz - 2yz - 1(xy + 4xy) = 0$$

$$-5xy + 10yz = 0 \implies 5y(x + 2z) = 0$$

$$\implies y = 0 \text{ ou } x = -2z$$

$\boxed{y=0}$
$$\begin{cases} x^2 + 2z^2 = 4 \\ z = x - 2 \end{cases} \implies x^2 + 2x^2 - 8x + 8 = 4$$

$$\implies 3x^2 - 8x + 4 = 0 \implies x = \frac{8 \pm 4}{6} = \begin{cases} 2 \\ 2/3 \end{cases}$$

$x = 2 \Rightarrow z = 0$

O ponto é $(2,0,0)$

$x = \frac{2}{3} \Rightarrow z = \frac{2}{3} - 2 = -4/3$

e o ponto é $(2/3, 0, -4/3)$.

Se $\boxed{x = -2z}$

$z = -2z + y - 2 \Rightarrow \boxed{y = 3z + 2}$

$x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$

$\Rightarrow 4z^2 + 9z^2 + 12z + \cancel{4} + 2z^2 = \cancel{4}$

$15z^2 + 12z = 0 \Rightarrow z = 0$

ou $z = -12/15 = -\frac{4}{3}$

$z = 0 \Rightarrow x = 0$ e $y = 2$

$(0, 2, 0)$

$z = -4/3 \Rightarrow x = -8/3$; $y = -2$

$(-8/3, -2, -4/3)$

(x_0, y_0, z_0)	$f(x_0, y_0, z_0)$
$(2,0,0)$	4
$(2/3, 0, -4/3)$	$\frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{16}{9} = 4$ } MÁXIMO
$(0, 2, 0)$	-16 ⟶ MÍNIMO
$(-8/3, -2, -4/3)$	$\frac{64}{9} - 16 + 2 \cdot \frac{16}{9} = -16/3$

(2) Agora vamos achar os candidatos que satisfazem $x^2+y^2+2z^2 < 4$

$$z = x+y-2 \iff \underbrace{x+y-z}_{h(x,y,z)} = 2$$

$\nabla h(x,y,z) = (1,1,-1)$

Os candidatos estão entre os pontos que satisfazem $\nabla f(x,y,z) = \lambda(1,1,-1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

e $x+y-z=2$

$x^2+y^2+2z^2 = 4$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ x & -4y & 2z \end{vmatrix} = \vec{0} \Rightarrow 2z-4y=0, \quad 2z+x=0,$$

$\Rightarrow x = -2z$ e $y = \frac{z}{2}$

$-2z + \frac{z}{2} - z = 2$

$-5/2\, z = 2$

$\boxed{z = -4/5}$

$x = 8/5$ e $y = -2/5$

Mas $\frac{64}{25} + \frac{4}{25} + 2 \cdot \frac{16}{25} = \frac{100}{25} = 4$ // Logo esse ponto não satisfaz $x^2+y^2+2z^2 < 4$. Assim os pontos são os obtidos em (1).