Prova de Recuperação de MAT2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II
POLI - USP - 11/02/2008

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
5	
TOTAL	

Nome: ______________________________ Turma: ____

Assinatura: ____________________________

JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS AFIRMAÇÕES

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^3 - xy + y^2$.
   a) (1,5) Encontre os pontos críticos de f e classifique-os.
   b) (1,0) Determine a equação da reta tangente à curva de nível 3 de f, no ponto $(1,-1)$.

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - y$ $\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x + 2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -1$

Como f é diferenciável, os pontos críticos são os pontos tais que

$$\begin{cases} 3x^2 - y = 0 & (1) \\ -x + 2y = 0 & (2) \end{cases}$$

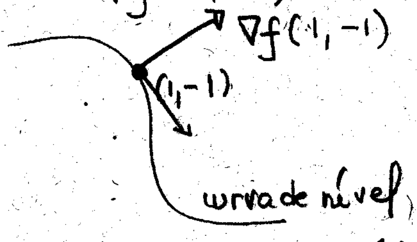
De (2) $2y = x$. Substituindo em (1), temos $3 \cdot 4y^2 - y = 0 \implies y(12y - 1) = 0$
$\implies y = 0$ ou $y = 1/12$

Se $y = 0$, então $x = 2 \cdot 0 = 0$ e $(0,0)$ é um ponto crítico.
Se $y = 1/12$ então $x = 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$ e $(1/6, 1/12)$ é o outro ponto crítico.

Agora, $H(x,y) = \det \begin{bmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 12x - 1$.

ponto (x_0,y_0) crítico	$H(x_0,y_0)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$	Conclusão
$(0,0)$	-1	irrelevante	ponto de sela
$(1/6, 1/12)$	1	$1 > 0$	ponto de mínimo local

(b) $\nabla f(x,y) = (3x^2 - y, -x + 2y)$
$\nabla f(1,-1) = (4,-3)$ Como o vetor $\nabla f(1,-1)$ é ortogonal em $(1,-1)$ à curva de nível, uma equação da reta tangente é:



$$\underline{X = (1,-1) + \lambda(3,4) \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$ Eq vetorial da reta

ou $\langle \nabla f(1,-1), (x-1, y+1) \rangle = 0$, que fornece
$\langle (4,-3), (x-1, y+1) \rangle = 0 \implies 4(x-1) - 3(y+1) = 0$
$\implies \boxed{4x - 3y - 7 = 0}$ eq geral da reta

2. Seja $f(x,y) = xy^2$.

a) (0,5) Dê a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, x_0y_0^2)$.

b) (1,5) Determine todos os planos que são tangentes ao gráfico de f e que passam pelos pontos $(1,1,1)$ e $(2,1,5)$.

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = y_0^2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 2x_0 y_0$

A equação do plano tangente em $(x_0, y_0, x_0y_0^2)$ é:

$$z = x_0 y_0^2 + y_0^2 (x - x_0) + 2x_0 y_0 (y - y_0)$$

$$\boxed{z = y_0^2 x + 2x_0 y_0 y - 2x_0 y_0^2}$$

(b) Queremos (x_0, y_0) tal que o plano acima contenha os pontos $(1,1,1)$ e $(2,1,5)$.

Então:

$$1 = y_0^2 + 2x_0 y_0 - 2x_0 y_0^2 \quad (1)$$

$$5 = 2y_0^2 + 2x_0 y_0 - 2x_0 y_0^2 \quad (2)$$

Fazendo (2) − (1), temos

$$4 = y_0^2 \implies y_0 = \pm 2$$

Se $\boxed{y_0 = 2}$

$$1 = 4 + 4x_0 - 8x_0 \implies -4x_0 = -3 \implies \boxed{x_0 = 3/4}$$

$(3/4, 2) = (x_0, y_0)$

A equação do plano é $z = 4x + 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2y - 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 4$

ou $\boxed{z = 4x + 3y - 6}$

Se $\boxed{y_0 = -2}$

$$1 = 4 - 4x_0 - 8x_0 \implies x_0 = 1/4 \text{ e } (x_0, y_0) = (1/4, -2$$

A equação do plano é

$$z = 4x - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2y - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 4$$

ou $\boxed{z = 4x - y - 2}$

Observação: É muito mais fácil resolver o problema sem usar multiplicadores de Lagrange! Ache o mínimo de $h(x,y) = x^2+y^2+1-x^2y^2$ em $\mathbb{R}^2$. (Por que?)

3. (2,0) Seja $f(x,y,z) = x^2y^2 + z^2$ e considere S à superfície de nível 1 de f. Determine o ponto de S que está mais próximo da origem.

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2y^2+z^2 = 1\}$

Queremos encontrar os pontos $(x,y,z) \in S$ tais que a distância até a origem é mínima.

$d((x,y,z),(0,0,0)) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Para achar o mínimo da distância, basta achar o mínimo de $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ com $(x,y,z) \in S$, isto é, com $x^2y^2+z^2 = 1$.

$\nabla f(x,y,z) = (2xy^2, 2x^2y, 2z) \neq \vec{0} \quad \forall (x,y,z) \in S$.

Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, os pontos $(x,y,z) \in S$ que são soluções do problema, estão entre os pontos (x,y,z) tais que

$\nabla g(x,y,z) = \lambda \nabla f(x,y,z)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Temos então o sistema:

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x y^2 & (1) \\ 2y = 2\lambda x^2 y & (2) \\ 2z = 2\lambda z & (3) \\ x^2y^2 + z^2 = 1 & (4) \end{cases}$$

Da equação (3) temos que
$z - \lambda z = 0$
$z(1-\lambda) = 0$, donde
$\boxed{z=0}$ ou $\boxed{\lambda = 1}$

Se $\boxed{z=0}$:

Em (4) temos $x^2y^2 = 1$

(1) $x = \lambda x y^2 \Rightarrow x^2 = \lambda x^2 y^2 \overset{(4)}{=} \lambda$

(2) $y = \lambda x^2 y \Rightarrow y^2 = \lambda x^2 y^2 \overset{(4)}{=} \lambda$

Logo $x^2 = y^2$ e usando novamente (4) temos $x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

Pontos candidatos
$(\pm 1, \pm 1, 0)$
$(\pm 1, \mp 1, 0)$

$g(\pm1,\pm1,0) = g(\pm1,\mp1,0) = 2$

Se $\boxed{\lambda = 1}$

(1) $x = xy^2 \Rightarrow x(1-y^2) = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$ ou $\boxed{y^2 = 1}$

Se $\boxed{x=0}$, em (2), temos $y=0$ e por (4) vem que $z = \pm 1$. Daí saem os pontos $(0,0,\pm1)$ e

$\boxed{g(0,0,\pm1) = 1}$

Se $\boxed{y^2 = 1}$ em (2) $y = x^2y \Rightarrow y^2 = x^2y^2 \Rightarrow \boxed{1 = x^2} \Rightarrow$

Este é o caso já analisado antes!

É claro então que a distância mínima ocorre nos pontos $(0,0,\pm1)$.

4. (1,5) Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^4}{x^2+y^8} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Verifique se f é contínua em $(0,0)$ e se f é diferenciável em $(0,0)$.

$f(0,0) = 0$

f é contínua em $(0,0)$ se $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$

Vamos então verificar a existência (ou não) do limite.

Se $\gamma_1(t) = (t,0)$, então $\gamma_1(0) = (0,0)$ e γ_1 é contínua em $t=0$.

$f(\gamma_1(t)) = \dfrac{0}{t^2+0} = 0$ se $t \neq 0$ .. Logo

$\lim\limits_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = 0 = L_1$

Agora, se $\gamma_2(t) = (t^4, t)$, γ_2 também é contínua em $t=0$ e $\gamma_2(0) = (0,0)$

$f(\gamma_2(t)) = \dfrac{t^4\, t^4}{2t^8} = \dfrac{1}{2} \quad \forall t \neq 0$. Logo

$\lim\limits_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \dfrac{1}{2} = L_2$

Como $L_1 \neq L_2$, o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^4}{x^2+y^8}$ NÃO EXISTE.

Assim f NÃO é contínua em $(0,0)$.

f NÃO é diferenciável em $(0,0)$ pois não é nem contínua em $(0,0)$!

5. (2,0) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferenciável em $\mathbb{R}^2$, com $\nabla f(1,-2) = (a,-3)$. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = f(2t^3 - t^2, -2t)\ .$$

Determine a de modo que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1 seja paralela à reta $y = -2x$.

Pela Regra da Cadeia temos que:

$$g'(t) = \langle \nabla f(2t^3 - t^2, -2t), (6t^2 - 2t, -2) \rangle .$$

Fazendo $t = 1$, temos:

$$g'(1) = \langle \nabla f(1,-2), (4,-2) \rangle$$

$$= \langle (a,-3), (4,-2) \rangle = 4a + 6$$

$g'(1)$ é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de g no abscissa 1. Para que essa reta seja paralela à reta $y = -2x$ temos que ter $g'(1) = -2$ ou $4a + 6 = -2$ ou

$$\boxed{a = -2}.$$