Prova de Recuperação
MAT-2454 - Cálculo Diferencial e Integral II para Engenharia
POLI - USP - 12/02/07

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
5	
TOTAL	

Nome: ______________________ Turma: ____

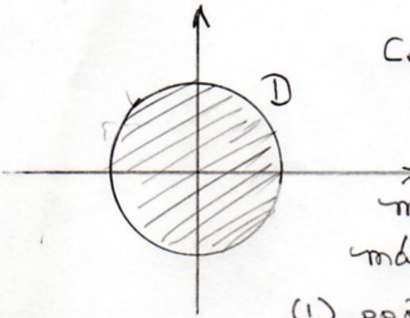
Assinatura: ______________________

Professor: ______________________

JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS AFIRMAÇÕES

(2,0) 1) Determine o máximo e o mínimo da função $f(x,y) = 2x^3 + y^4$ no conjunto

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x^2 + y^2 \leq 1\}.$$



Como o conjunto D é compacto (fechado e limitado) e a função f é contínua, pelo Teorema de Weierstrass, f tem máximo e mínimo em D. Os candidatos a pontos de máximo e de mínimo de f são:

(1) pontos críticos de f no interior de D.

(2) pontos de máximo e de mínimo de f na fronteira de D.

(1) Interior de $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2$ $\qquad 6x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3$ $\qquad 4y^3 = 0 \Rightarrow y = 0$

(0,0) é o único ponto crítico de f no interior de D

(2) fronteira de $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$

Podemos aplicar o método dos multiplicadores de Lagrange

$$(2x, 2y) \neq \vec{0} \quad \forall (x,y) \in \text{fronteira de } D$$

Os pontos de máximo e de mínimo de f na fronteira de D (existem, pois a fronteira de D é um compacto) estão entre os ptos (x,y) tais que $\nabla f(x,y) = \lambda(2x, 2y)$ e $x^2+y^2 = 1$, ou seja

$$(6x^2, 4y^3) = \lambda(2x, 2y) \text{ e } x^2+y^2 = 1$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 = \lambda x \\ 2y^3 = \lambda y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

$x = 0 \Rightarrow y \neq 0$
$\therefore y = \pm 1$

$y = 0 \Rightarrow x \neq 0$
$x = \pm 1$

$x \neq 0$ e $y \neq 0$

$x = \lambda/3$

$y^2 = \lambda/2$

$\frac{\lambda^2}{9} + \frac{\lambda}{2} = 1$

$\Rightarrow \lambda = 3/2$ ou $\lambda = -6$

$\Rightarrow x = 1/2$ ou $\cancel{x = -2}$ NÃO SERVE

$y = \pm\sqrt{3}/2$

Candidato (x,y)	f(x,y)
(0,0)	0
(0,±1)	1
(±1,0)	±2 → MÁXIMO / MÍNIMO
(1/2,±√3/2)	13/16

(2,0) 2. A função diferenciável $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tem, no ponto $(1,1,1)$, derivadas direcionais: igual a 1 na direção de $\vec{u} = 4\vec{j} + 3\vec{k}$, igual a 2 na direção de $\vec{v} = -4\vec{\imath} + 3\vec{j}$ e igual a 0 na direção de $\vec{w} = \vec{j}$. Ache em que direção ocorre o valor máximo da derivada direcional de f no ponto $(1,1,1)$. Determine esse valor.

f diferenciável $\quad P = (1,1,1)$

$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = 1, \quad \vec{u} = 4\vec{j} + 3\vec{k}$

$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P) = 2, \quad \vec{v} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$

$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{w}}(P) = 0, \quad \vec{w} = \vec{j}$

A direção em que ocorre o valor máximo da derivada direcional de f é a direção do vetor $\nabla f(P)$ e $\|\nabla f(P)\|$ é o valor máximo. Temos então que

$$\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P), \frac{\partial f}{\partial z}(P)\right) = (a,b,c)$$

Como f é <u>diferenciável em P</u>, temos:

$$1 = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = \left\langle (a,b,c), \frac{u}{\|u\|} \right\rangle = \frac{1}{5}\langle (a,b,c),(0,4,3)\rangle = \frac{4}{5}b + \frac{3}{5}c$$

$$2 = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P) = \left\langle (a,b,c), \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\rangle = \frac{1}{5}\langle (a,b,c),(-4,3,0)\rangle = -\frac{4}{5}a + \frac{3}{5}b$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(P) = b$$

Logo: $\boxed{b = 0}$ $\quad \boxed{c = 5/3}$ $\quad$ e $\quad \boxed{a = -5/2}$

$$\nabla f(P) = \left(-5/2, 0, 5/3\right)$$

$$\|\nabla f(P)\| = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{9}} = \frac{5}{6}\sqrt{13}$$

O valor máximo é então $\boxed{\dfrac{5\sqrt{13}}{6}}$.

Assuma que $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável

(2,0) 3) A imagem da curva $\gamma(t) = (2t, t^2, z(t))$ está contida no gráfico de $z = f(x, y)$. Sabe-se que $f(2,1) = 3$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 1$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 1$. Determine a equação da reta tangente à imagem de γ no ponto $\gamma(1)$.

$$G_f = \{ (x, y, f(x,y)) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$$

Como $\gamma(t) = (2t, t^2, z(t))$, está contida no gráfico de f, temos que

$$z(t) = f(2t, t^2)$$

$$\gamma(1) = (2, 1, z(1)) = (2, 1, f(2,1)) = (2, 1, 3)$$

Como f é diferenciável, a função $z(t) = f(2t, t^2)$ é derivável.

$$\vec{\gamma}'(t) = (2, 2t, z'(t))$$

$$\gamma'(1) = (2, 2, z'(1))$$

Equação da reta tangente em $\gamma(1)$ é:

$$X = (2,1,3) + \lambda \vec{\gamma}'(1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Vamos então calcular $z'(1)$.

Pela Regra da Cadeia:

$$z'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(2t, t^2) \cdot 2 + \frac{\partial f}{\partial y}(2t, t^2) \cdot 2t$$

Logo
$$z'(1) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)}_{1} \cdot 2 + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)}_{1} 2$$

pela hipótese

Assim $z'(1) = 4$ e a equação da reta é:

$$\boxed{X = (2,1,3) + \lambda (2,2,4), \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

(2,0) 4) Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2} & \text{, se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Mostre que f é contínua em $(0,0)$.

b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

c) É f diferenciável em $(0,0)$?

(a) $0 = f(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{y}_{\to 0} \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\text{limitada}} = 0$$

(b) $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} 0 = \boxed{0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{y^3/y^2}{y} = \boxed{1}$$

(c) $$E(x,y) = f(x,y) - \left(f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0) \right)$$

$$= \frac{y^3}{x^2+y^2} - y = \frac{y^3 - x^2y - y^3}{x^2+y^2} = \frac{-x^2y}{x^2+y^2}$$

f é diferenciável se e somente se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{E(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0$$

Mas $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-x^2y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$ NÃO existe pois se

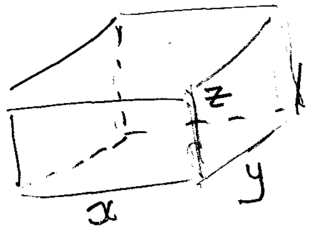
$\gamma(t) = (t,t)$, então

$\gamma(0) = (0,0)$, γ é contínua em $t=0$

e $$\lim_{t\to 0} \frac{-t^3}{(2t^2)\sqrt{2t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{-t}{2\sqrt{2}\,|t|}$$ NÃO EXISTE.

Logo, f NÃO é diferenciável em $(0,0)$.

(2,0) 5) Dê a dimensão da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída com $27cm^2$ de papelão. (Admita que o problema tem solução).



$V(x,y,z) = xyz$ = volume da caixa

$xy + 2xz + 2yz = 27$

Queremos achar o máximo de $V(x,y,z) = xyz$ com a condição que

$$\underbrace{xy + 2xz + 2yz}_{g(x,y,z)} = 27.$$

ADMITINDO que o problema tem solução, pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange, a solução está entre os pontos (x,y,z) tais que: $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ com

$$(*)\begin{cases} \nabla V(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ xy + 2xz + 2yz = 27 \end{cases}$$

(Observe que $\nabla g(x,y,z) = (y+2z,\ x+2z\ \ 2x+2y) \neq \vec{0}$ se $x>0, y>0$ e $z>0$)

De (*) temos:

$$\begin{cases} yz = \lambda(y+2z) & (1) \\ xz = \lambda(x+2z) & (2) \\ xy = \lambda(2x+2y) & (3) \\ xy + 2xz + 2yz = 27 & (4) \end{cases}$$

De (1) e (2) temos:

$yz - xz = \lambda(y-x)$

$(y-x)z = \lambda(y-x)$

$(y-x)[z-\lambda] = 0$

$\Rightarrow \underline{y-x=0}$ ou $\underline{z-\lambda=0}$

Se $z=\lambda$, a equação (1) $yz = \lambda(y+2z)$ fica $yz = z(y+2z)$. Como $z \neq 0$, $y = y+2z$, o que implica $z=0$, uma contradição.

Como $z=\lambda$ é impossível, temos que ter $\boxed{y=x}$

Temos $x^2 = 4\lambda x$, da equação (3). Logo, com $x \neq 0$, $x = 4\lambda$.

Substituindo na eq. (2), temos $xz = \frac{x}{4}(x+2z)$. Logo

$xz = x^2/4 + \frac{xz}{2}$

$\frac{xz}{2} = \frac{x^2}{4} \xRightarrow{x\neq 0} \frac{z}{2} = \frac{x}{4} \Rightarrow \boxed{x = 2z.}$

Substituindo em (4) temos $x^2 + x^2 + x^2 = 27 \Rightarrow$ $x = 3 = y$ e $z = 3/2$.