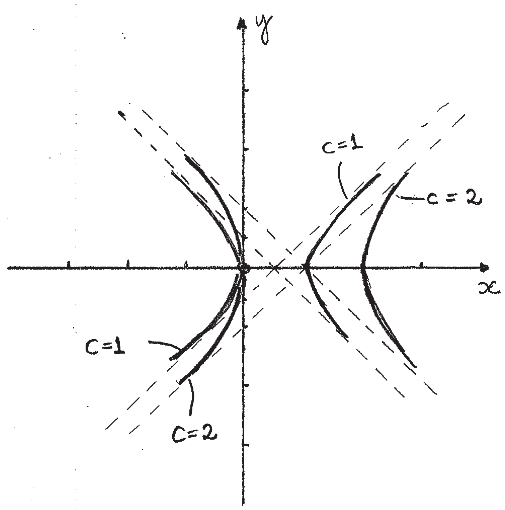
Questão 1. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

a) (1,0) Esboce, no sistema de coordenadas abaixo, as curvas de nível 1 e 2 de f.

b) (1,0) A função f é contínua em $(0,0)$? Justifique.

c) (1,0) Determine, caso exista, $\nabla f(0,0)$.



(a) $f(x,y) = 1 \iff x^2 - y^2 = x \quad , x \neq 0$

$\iff \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - y^2 = \frac{1}{4} \quad , x \neq 0$

$\iff \underbrace{4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - 4y^2 = 1}_{\text{equação de hipérbole (1)}} \quad , x \neq 0$

$f(x,y) = 2 \iff x^2 - y^2 = 2x \quad , x \neq 0$

$\iff (x^2 - 2x + 1) - y^2 = 1 \quad , x \neq 0$

$\iff \underbrace{(x-1)^2 - y^2 = 1}_{\text{hipérbole (2)}} \quad , x \neq 0$

(b) Notamos que os ramos das hipérboles (1) e (2) encontradas em (a) que têm $x \leq 0$ contêm o ponto $(0,0)$.

Se considerarmos parametrizações γ_1 e γ_2 respectivamente para os ramos da hipérbole (1) com $x \leq 0$ e da hipérbole (2) com $x \leq 0$, veremos que $f(\gamma_1(t)) = 1, \forall t$ e $f(\gamma_2(t)) = 2, \forall t$.

Consequentemente, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe e <u>f não é contínua em $(0,0)$.</u>

<u>obs</u> $\begin{cases} \gamma_1(t) = \left(\dfrac{1+\sec t}{2}, \dfrac{\operatorname{tg} t}{2}\right), \quad t \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\; ; \quad (\gamma_1(\pi) = (0,0)) \\ \gamma_2(t) = (1+\sec t, \operatorname{tg} t), \quad t \in \left]\pi/2, \frac{3\pi}{2}\right[\; ; \quad (\gamma_2(\pi) = (0,0)) \end{cases}$

são possíveis parametrizações para os referidos ramos.

(c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h}{h} = 1$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{0-0}{k} = 0$

Portanto, $\nabla f(0,0) = (1,0)$ ou $\nabla f(0,0) = \vec{i}$

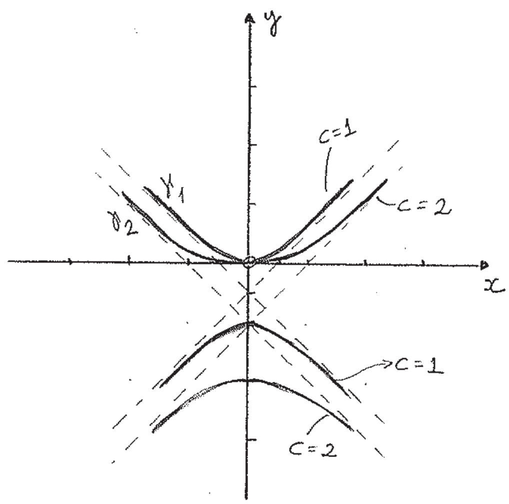
Questão 1. Seja

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{y}, & \text{se } y\neq 0,\\ 0, & \text{se } y=0.\end{cases}$$

a) (1,0) Esboce, no sistema de coordenadas abaixo, as curvas de nível 1 e 2 de f.

b) (1,0) A função f é contínua em $(0,0)$? Justifique.

c) (1,0) Determine, caso exista, $\nabla f(0,0)$.



(a) $f(x,y)=1 \iff x^2-y^2=y \quad (y\neq 0)$

$\iff x^2-(y^2+y+\frac{1}{4})=-\frac{1}{4} \quad (y\neq 0)$

$\iff \underbrace{-4x^2+4(y+\frac{1}{2})^2=1}_{\text{equação de hipérbole}}, \quad (y\neq 0)$

$f(x,y)=2 \iff x^2-y^2=2y, \quad y\neq 0$

$\iff x^2-(y^2+2y+1)=-1 \quad (y\neq 0)$

$\iff \underbrace{-x^2+(y+1)^2=1}_{\text{hipérbole}}, \quad (y\neq 0)$

(b) Notamos que os ramos de cada hipérbole encontrada em (a) que têm $y\geq 0$ contêm o ponto $(0,0)$.

Se considerarmos parametrizações γ_1 e γ_2 para os ramos das hipérboles $-4x^2+4(y+\frac{1}{2})=1$, $y\geq 0$ e $-x^2+(y+1)^2=1$, $y\geq 0$ respectivamente, veremos que $f(\gamma_1(t))=1, \forall t$ e $f(\gamma_2(t))=2, \forall t$. Consequentemente, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe e f não é contínua em $(0,0)$.

obs. $\begin{cases}\gamma_1(t)=\left(\frac{\operatorname{tg} t}{2}, \frac{-1+\sec t}{2}\right), \; t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\quad ; \;(\gamma_1(0)=(0,0))\\ \gamma_2(t)=(\operatorname{tg} t, -1+\sec t), \; t\in\left]-\pi/2,\pi/2\right[\quad , \;(\gamma_2(0)=(0,0))\end{cases}$

são possíveis parametrizações para os referidos ramos.

(c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0-0}{h}=0$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{-k}{k}=-1$

Portanto, $\nabla f(0,0)=(0,-1)$ ou $\nabla f(0,0)=-\vec{j}$

Questão 2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável que satisfaz

(i) a imagem da curva $\gamma(t) = (t, t^3 + 1, t^2 - t)$ está contida no gráfico de f;

(ii) $f(s - 1, s^2) = 2$, $\forall s \in \mathbb{R}$.

Considere o ponto $P = (-1, 0, f(-1, 0))$.

a) (1,0) Determine $f(-1, 0)$ e dê uma equação para a reta tangente à curva γ em P.

b) (1,5) Calcule $\nabla f(-1, 0)$ e dê a equação do plano tangente ao gráfico de f em P.

c) (1,5) A superfície $2xz - 2y + z^2 = 0$ intercepta o gráfico de f em uma curva C que contém P. Determine uma equação para a reta tangente à curva C no ponto P.

Solução.

a) Fazendo $s = 0$ em (ii), obtemos imediatamente $f(-1, 0) = 2$. Como $\gamma(-1) = (-1, 0, 2) = P$ e $\gamma'(t) = (1, 3t^2, 2t - 1)$, temos $\gamma'(-1) = (1, 3, -3)$. Portanto, a reta tangente a γ em P é

$$T : (x, y, z) = (-1, 0, 2) + \lambda(1, 3, -3), \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) (i) é equivalente a $f(t, t^3 + 1) = t^2 - t$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Como f é diferenciável, podemos usar a Regra da Cadeia e obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, t^3 + 1) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(t, t^3 + 1) \cdot 3t^2 = 2t - 1,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Fazendo $t = -1$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 0) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 0) = -3.$$

Analogamente, derivando (ii) com relação a s, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(s - 1, s^2) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(s - 1, s^2) \cdot 2s = 0,$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Fazendo $s = 0$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 0) = 0.$$

Logo, $\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 0) = -1$ e $\nabla f(-1, 0) = -\vec{j}$. Portanto, a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto P é $z - 2 = 0(x + 1) + (-1)(y - 0)$, isto é, $y + z = 2$.

c) Se $\vec{v}_C$ é um vetor diretor da reta tangente T_C à curva C no ponto P, então sua equação é $T_C : X = P + \mu\vec{v}_C$, com $\mu \in \mathbb{R}$. Para determinar $\vec{v}_C$, usamos o fato de que $\vec{v}_C$ é paralelo ao vetor $\nabla G(-1, 0, 2) \wedge \nabla H(-1, 0, 2)$, onde $G(x, y, z) = f(x, y) - z$ e $H(x, y, z) = 2xz - 2y + z^2$ são funções cujas superfícies de nível zero são o gráfico de f e a superfície dada, respectivamente. Como

$$\nabla G(-1, 0, 2) \wedge \nabla H(-1, 0, 2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (-4, -4, 4) = (-4)(1, 1, -1),$$

podemos tomar $\vec{v}_C = (1, 1, -1)$ e escrever a equação paramétrica da reta tangente à curva C no ponto P como

$$(x, y, z) = (-1, 0, 2) + \mu(1, 1, -1), \text{ com } \mu \in \mathbb{R}.$$

Questão 2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável que satisfaz

(i) a imagem da curva $\gamma(t) = (t^3 + 1, t, t^2 - t)$ está contida no gráfico de f;

(ii) $f(s^2, s - 1) = 2$, $\forall s \in \mathbb{R}$.

Considere o ponto $P = (0, -1, f(-1, 0))$.

a) (1,0) Determine $f(0, -1)$ e dê uma equação para a reta tangente à curva γ em P.

b) (1,5) Calcule $\nabla f(0, -1)$ e dê a equação do plano tangente ao gráfico de f em P.

c) (1,5) A superfície $2yz - 2x + z^2 = 0$ intercepta o gráfico de f em uma curva C que contém P. Determine uma equação para a reta tangente à curva C no ponto P.

Solução.

a) Fazendo $s = 0$ em (ii), obtemos imediatamente $f(0, -1) = 2$. Como $\gamma(-1) = (0, -1, 2) = P$ e $\gamma'(t) = (3t^2, 1, 2t - 1)$, temos $\gamma'(-1) = (3, 1, -3)$. Portanto, a reta tangente a γ em P é

$$T : (x, y, z) = (0, -1, 2) + \lambda(3, 1, -3), \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) (i) é equivalente a $f(t^3 + 1, t) = t^2 - t$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Como f é diferenciável, podemos usar a Regra da Cadeia e obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t^3 + 1, t) \cdot 3t^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(t^3 + 1, t) \cdot 1 = 2t - 1,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Fazendo $t = -1$, temos

$$3\frac{\partial f}{\partial x}(0, -1) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, -1) = -3.$$

Analogamente, derivando (ii) com relação a s, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(s^2, s - 1) \cdot 2s + \frac{\partial f}{\partial y}(s^2, s - 1) \cdot 1 = 0,$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Fazendo $s = 0$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, -1) = 0.$$

Logo, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, -1) = -1$ e $\nabla f(0, -1) = -\vec{i}$. Portanto, a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto P é $z - 2 = (-1)(x - 0) + 0(y + 1)$, isto é, $x + z = 2$.

c) Se $\vec{v}_C$ é um vetor diretor da reta tangente T_C à curva C no ponto P, então sua equação é $T_C : X = P + \mu\vec{v}_C$, com $\mu \in \mathbb{R}$. Para determinar $\vec{v}_C$, usamos o fato de que $\vec{v}_C$ é paralelo ao vetor $\nabla G(0, -1, 2) \wedge \nabla H(0, -1, 2)$, onde $G(x, y, z) = f(x, y) - z$ e $H(x, y, z) = 2yz - 2x + z^2$ são funções cujas superfícies de nível zero são o gráfico de f e a superfície dada, respectivamente. Como

$$\nabla G(0, -1, 2) \wedge \nabla H(0, -1, 2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (4, 4, -4) = 4(1, 1, -1),$$

podemos tomar $\vec{v}_C = (1, 1, -1)$ e escrever a equação paramétrica da reta tangente à curva C no ponto P como

$$(x, y, z) = (0, -1, 2) + \mu(1, 1, -1), \text{ com } \mu \in \mathbb{R}.$$

Questão 3. (3,0) Seja C a elipse determinada pela intersecção das superfícies $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ e $x + 2z = 4$. Determine o(s) ponto(s) de C mais próximo(s) do ponto $P = (-3, 0, 2)$. Explicite a função utilizada e justifique todas as passagens.

Solução. Seja

$$f(x, y, z) = \text{dist}((x, y, z), (-3, 0, 2))^2 = (x + 3)^2 + y^2 + (z - 2)^2$$

a função que calcula o *quadrado da distancia* de um ponto arbitrário $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ao ponto fixado $P = (-3, 0, 2)$. Queremos determinar o(s) ponto(s) de C onde a restrição de f a C assume seu valor mínimo.

Sejam $g(x, y, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ e $h(x, y, z) = x + 2z - 4$. Como a elipse C é a intersecção do *cone* $g(x, y, z) = 0$ com o *plano* $h(x, y, z) = 0$, segue-se que C é um conjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}^3$. Como f é contínua, pelo Teorema de Weierstrass, a restrição de f a C assume seus valores máximo e mínimo em pontos de C.

Para determinarmos esses pontos, observamos que esse problema é equivalente a determinarmos os extremantes de f com as duas restrições $g(x, y, z) = 0$ e $h(x, y, z) = 0$. Como f, g e h são funções de classe C^∞, podemos usar Multiplicadores de Lagrange: se $(x, y, z) \in C$ é um extremante, então existem números reais λ e μ tais que $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z)$, ou, equivalentemente, $\{\nabla f(x, y, z), \nabla g(x, y, z), \nabla h(x, y, z)\}$ é *linearmente dependente.*

Agora, $\{\nabla f(x, y, z), \nabla g(x, y, z), \nabla h(x, y, z)\}$ é *linearmente dependente* se e somente se

$$\begin{vmatrix} 2(x+3) & 2y & 2(z-2) \\ 2x & 2y & -2z \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Usando propriedades de determinantes (subtraindo a 2a. linha da primeira e expandindo o determinante pela 2a. coluna), obtemos

$$\begin{vmatrix} 2(x+3) & 2y & 2(z-2) \\ 2x & 2y & -2z \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 4z-4 \\ 2x & 2y & -2z \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2y(12 - 4z + 4) = 8y(4 - z).$$

Assim, $(x, y, z) \in C$ é extremante se e somente se (x, y, z) é solução do sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ x + 2z = 4 \\ y(z - 4) = 0 \end{cases}$$

A 3a. equação implica $y = 0$ ou $z = 4$. Se $y = 0$, então $z = \pm x$ (1a. eq.) e $x + 2z = 4$ (2a. eq.), o que implica que $x = \frac{4}{3}$, $y = 0$, $z = \frac{4}{3}$ ou $x = -4$, $y = 0$, $z = 4$, obtendo assim os pontos $P_1 = (\frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3})$ e $P_2 = (-4, 0, 4)$. Se $z = 4$, então $x = -4$ e $y = 0$ e voltamos a obter o ponto P_2.

Assim, $P_1 = (\frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3})$ e $P_2 = (-4, 0, 4)$ são as únicas soluções do sistema acima. Como

$$f(P_1) = f(\frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3}) = (\frac{4}{3} + 3)^2 + 0^2 + (\frac{4}{3} - 2)^2 = \frac{173}{9} = 19,222...$$

e

$$f(P_2) = f(-4, 0, 4) = (-4 + 3)^2 + 0^2 + (4 - 2)^2 = 5,$$

segue-se que P_1 é o ponto mais distante de P e $P_2 = (-4, 0, 4)$ é o *mais próximo* de P.

Observação: se f é uma função não-negativa, então os valores máximos (ou mínimos) de f e de f^2 são assumidos nos mesmos pontos.

Questão 3. (3,0) Seja C a elipse determinada pela intersecção das superfícies $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ e $y + 2z = 4$. Determine o(s) ponto(s) de C mais próximo(s) do ponto $P = (0, -3, 2)$. Explicite a função utilizada e justifique todas as passagens.

Solução. Seja

$$f(x, y, z) = \text{dist}((x, y, z), (0, -3, 2))^2 = x^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2$$

a função que calcula o *quadrado da distancia* de um ponto arbitrário $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ao ponto fixado $P = (0, -3, 2)$. Queremos determinar o(s) ponto(s) de C onde a restrição de f a C assume seu valor mínimo.

Sejam $g(x, y, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ e $h(x, y, z) = y + 2z - 4$. Como a elipse C é a intersecção do *cone* $g(x, y, z) = 0$ com o *plano* $h(x, y, z) = 0$, segue-se que C é um conjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}^3$. Como f é contínua, pelo Teorema de Weierstrass, a restrição de f a C assume seus valores máximo e mínimo em pontos de C.

Para determinarmos esses pontos, observamos que esse problema é equivalente a determinarmos os extremantes de f com as duas restrições $g(x, y, z) = 0$ e $h(x, y, z) = 0$. Como f, g e h são funções de classe C^∞, podemos usar Multiplicadores de Lagrange: se $(x, y, z) \in C$ é um extremante, então existem números reais λ e μ tais que $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z)$, ou, equivalentemente, $\{\nabla f(x, y, z), \nabla g(x, y, z), \nabla h(x, y, z)\}$ é *linearmente dependente.*

Agora, $\{\nabla f(x, y, z), \nabla g(x, y, z), \nabla h(x, y, z)\}$ é *linearmente dependente* se e somente se

$$\begin{vmatrix} 2x & 2(y+3) & 2(z-2) \\ 2x & 2y & -2z \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Usando propriedades de determinantes (subtraindo a 2a. linha da primeira e expandindo o determinante pela 1a. coluna), obtemos

$$\begin{vmatrix} 2x & 2(y+3) & 2(z-2) \\ 2x & 2y & -2z \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 4z-4 \\ 2x & 2y & -2z \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-2x)(12 - 4z + 4) = 8x(z - 4).$$

Assim, $(x, y, z) \in C$ é extremante se e somente se (x, y, z) é solução do sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ y + 2z = 4 \\ x(z - 4) = 0 \end{cases}$$

A 3a. equação implica $x = 0$ ou $z = 4$. Se $x = 0$, então $z = \pm y$ (1a. eq.) e $y + 2z = 4$ (2a. eq.), o que implica que $x = 0$, $y = \frac{4}{3}$, $z = \frac{4}{3}$ ou $x = 0$, $y = -4$, $z = 4$, obtendo assim os pontos $P_1 = (0, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ e $P_2 = (0, -4, 4)$. Se $z = 4$, então $y = -4$ e $x = 0$ e voltamos a obter o ponto P_2.

Assim, $P_1 = (0, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ e $P_2 = (0, -4, 4)$ são as únicas soluções do sistema acima. Como

$$f(P_1) = f(0, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}) = 0^2 + (\frac{4}{3} + 3)^2 + (\frac{4}{3} - 2)^2 = \frac{173}{9} = 19,222...$$

e

$$f(P_2) = f(0, -4, 4) = 0^2 + (-4 + 3)^2 + (4 - 2)^2 = 5,$$

segue-se que P_1 é o ponto mais distante de P e $P_2 = (0, -4, 4)$ é o *mais próximo* de P.

Observação: se f é uma função não-negativa, então os valores máximos (ou mínimos) de f e de f^2 são assumidos nos mesmos pontos.