

Gabarito - TURMA A

Questão 1.(3 pontos) Seja a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x^5} \operatorname{sen} \left(\sqrt[3]{x^4 + y^4} \right)}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua em $(0, 0)$.

(b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

(c) A função f é diferenciável em $(0, 0)$? Justifique sua resposta.

Solução.

(a) A função f é contínua em $(0, 0)$ se $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$. Vamos calcular esse limite.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{x^5} \operatorname{sen} \left(\sqrt[3]{x^4 + y^4} \right)}{x^2 + y^2} &= \frac{\operatorname{sen} \left(\sqrt[3]{x^4 + y^4} \right)}{\sqrt[3]{x^4 + y^4}} \frac{\sqrt[3]{x^5} \sqrt[3]{x^4 + y^4}}{x^2 + y^2} = \frac{\operatorname{sen} \left(\sqrt[3]{x^4 + y^4} \right)}{\sqrt[3]{x^4 + y^4}} \sqrt[3]{\frac{x^5(x^4 + y^4)}{(x^2 + y^2)^3}} \\ &= \frac{\operatorname{sen} \left(\sqrt[3]{x^4 + y^4} \right)}{\sqrt[3]{x^4 + y^4}} x \sqrt[3]{\left(\frac{x^2}{(x^2 + y^2)} \right) \cdot \frac{x^4 + y^4}{(x^2 + y^2)^2}} \end{aligned}$$

Vamos analisar separadamente cada expressão e calcular o limite.

Usando o limite fundamental temos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen} \left(\sqrt[3]{x^4 + y^4} \right)}{\sqrt[3]{x^4 + y^4}} = 1$

Temos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \sqrt[3]{\frac{x^2}{(x^2 + y^2)} \cdot \frac{x^4 + y^4}{(x^2 + y^2)^2}} = 0$. De fato, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^3 = 0$, $\frac{x^2}{(x^2 + y^2)}$ é limitada, pois $0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2$ e $\frac{x^4 + y^4}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 + y^4}{x^4 + y^4 + 2x^2y^2}$ também é limitada, pois $0 < x^4 + y^4 \leq x^4 + y^4 + 2x^2y^2$.

Portanto,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt[3]{x^5} \operatorname{sen} \left(\sqrt[3]{x^4 + y^4} \right)}{x^2 + y^2} = 1.0 = 0 = f(0,0)$$

OBS: Veja outra forma de calcular o limite na Turma B.

(b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h^5} \operatorname{sen} \left(\sqrt[3]{h^4} \right)}{h \cdot h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h^5} \operatorname{sen} \left(\sqrt[3]{h^4} \right)}{h \cdot h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \left(\sqrt[3]{h^4} \right)}{\sqrt[3]{h^4}} \cdot \frac{\sqrt[3]{h^9}}{h^3} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \left(\sqrt[3]{h^4} \right)}{\sqrt[3]{h^4}} = 1. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 \cdot \operatorname{sen} \left(\sqrt[3]{k^4} \right)}{k \cdot k^2} = 0.$$

(c) Para saber se f é diferenciável vamos estudar o seguinte limite

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\|(h,k)\|}. \quad (1)$$

Se o limite for 0 a função é diferenciável. Calculando

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{\sqrt[3]{h^5} \operatorname{sen}(\sqrt[3]{h^4+k^4})}{h^2+k^2} - 0 - 1 \cdot h - 0 \cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Porém sobre a curva $\gamma(t) = (t, t)$ temos

$$\frac{\sqrt[3]{t^5} \operatorname{sen} \left(\sqrt[3]{2t^4} \right) - t(2t^2)}{2t^2 \sqrt{2t^2}} = \frac{\sqrt[3]{t^5} \sqrt[3]{2t^4} \operatorname{sen} \left(\sqrt[3]{2t^4} \right)}{2\sqrt{2} t^2 |t| \sqrt[3]{2t^4}} - \frac{t}{\sqrt{2}|t|}$$

Para $t > 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{2} t^3 \operatorname{sen} \left(\sqrt[3]{2t^4} \right)}{\sqrt[3]{2t^4} 2\sqrt{2} t^3} - \frac{t}{t \sqrt{2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{2}}{2\sqrt{2}} \frac{\operatorname{sen} \left(\sqrt[3]{2t^4} \right)}{\sqrt[3]{2t^4}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[3]{2} - 2}{2\sqrt{2}}$$

Como o limite é diferente de 0, o que já permite afirmar que f não é diferenciável. Observe que NÃO EXISTE o limite quanto t tende a 0, pois os limites laterais são diferentes (faça para $t < 0$).

Portanto, f não é diferenciável em $(0, 0)$

Questão 2.(2 pontos) Seja $f = f(x, y)$ uma função diferenciável tal que $z = 3x + y - 2$ é equação do plano tangente a f em $(1, 1, f(1, 1))$.

(a) Obtenha $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)$.

(b) Seja $g(u, v) = f(u^2 + 3v, v^2)$. Obtenha as expressões de $\frac{\partial g}{\partial u}(u, v)$ e $\frac{\partial g}{\partial v}(u, v)$ em função das derivadas parciais de f .

(c) Seja γ uma curva diferenciável tal que a sua imagem está contida na intersecção do gráfico de g com a superfície $S = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 - 4u + 2v + 1 = 0\}$. Dê a equação da reta tangente a γ no ponto $(2, -1, g(2, -1))$.

Solução.

(a) O plano tangente de f em $(1, 1, f(1, 1))$ tem equação

$$z = f(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1).$$

É dado que $z = 3x - y - 2$ é equação do tal plano. Portanto, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 3$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 1$.

Note que já podemos obter $f(1, 1)$, pois

$$-2 = f(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) \cdot (-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) \cdot (-1) = f(1, 1) - 3 - 1.$$

Portanto, $f(1, 1) = 2$

(b) Como $g(u, v) = f(u^2 + 3v, v^2)$, segue da regra da cadeia que

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = 2u \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(u^2 + 3v, v^2) + 0 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(u^2 + 3v, v^2) = 2u \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(u^2 + 3v, v^2)$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = 3 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(u^2 + 3v, v^2) + 2v \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(u^2 + 3v, v^2)$$

(c) O conjunto S pode ser visto como a superfície de nível 0 da função $h(u, v, w) = u^2 + v^2 + w^2 - 4u + 2v + 1$. Como a imagem de γ está contida em S e no gráfico de g então o vetor tangente $\gamma'(t_0)$ é paralelo ao plano tangente de S e ao plano tangente de g no ponto $\gamma(t_0) = (2, -1, g(2, -1))$.

Temos que $g(2, -1) = f(1, 1) = 2$.

O vetor $(\frac{\partial g}{\partial u}(2, -1), \frac{\partial g}{\partial v}(2, -1), -1)$ é ortogonal ao plano tangente de g e o vetor $(\frac{\partial h}{\partial u}(2, -1, 2), \frac{\partial h}{\partial v}(2, -1, 2), \frac{\partial h}{\partial w}(2, -1, 2)) = (0, 0, 4)$ é ortogonal a S , no ponto em questão.

$$((\frac{\partial h}{\partial u}, \frac{\partial h}{\partial v}, \frac{\partial h}{\partial w}) = (2u - 4, 2v + 2, 2w))$$

Então o vetor $\gamma'(t_0)$ é paralelo ao produto vetorial

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial g}{\partial u}(2, -1) & \frac{\partial g}{\partial v}(2, -1) & -1 \\ \frac{\partial h}{\partial u}(2, -1, 2) & \frac{\partial h}{\partial v}(2, -1, 2) & \frac{\partial h}{\partial w}(2, -1, 2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 12 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (28, -48, 0)$$

Portanto, a reta tangente procurada tem equação

$$(u, v, w) = (2, -1, 2) + \lambda(7, -12, 0) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Questão 3.(3 pontos) Seja $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - 2z$. Encontre os pontos de máximo e mínimo de f no conjunto $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3 \text{ e } z \geq -1\}$.

Solução: O conjunto K é compacto e a função polinomial em três variáveis é contínua, portanto os extremantes existem.

Seja $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$ e $h(x, y, z) = z + 1$. Então $\nabla f(x, y, z) = (2x - y, 2y - x, 2z - 2)$, $\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ e $\nabla h(x, y, z) = (0, 0, 1)$.

Vamos procurar os candidatos a extremante.

a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 3 \text{ e } z > -1\}$ (interior do sólido).

Um candidato (x, y, z) neste aberto é tal que $\nabla f(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Logo, $2x - y = 0$, $2y - x = 0$ e $2z - 2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ e $z = 1$. Como $(0, 0, 1)$ pertence ao conjunto acima, ele é candidato a extremante.

b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 3 \text{ e } z > -1\}$ (parte da casca esférica).

Note que $\nabla g(x, y, z) \neq \vec{0}$ se $g(x, y, z) = 0$. De fato, se $\nabla g(x, y, z) = \vec{0}$ em tão $x = y = z = 0$, mas $g(0, 0, 0) = -3 \neq 0$. Podemos aplicar os multiplicadores de Lagrange, e um candidato (x, y, z) em $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 3\}$ é tal que $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$, $g(x, y, z) = 0$ e $z > -1$.

Logo $2x - y = \lambda 2x$, $2y - x = \lambda 2y$, $2z - 2 = \lambda 2z$, $g(x, y, z) = 0$ e $z > -1$

$\Leftrightarrow y = x(2 - 2\lambda)$, $x = y(2 - 2\lambda)$, $z(2 - 2\lambda) = 2$, $g(x, y, z) = 0$ e $z > -1$

$\Leftrightarrow (x = y = 0, z^2 = 3 \text{ e } z > -1)$ ou $(x^2 = y^2 \neq 0, x = y(2 - 2\lambda), z(2 - 2\lambda) = 2, g(x, y, z) = 0$ e $z > -1)$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, \sqrt{3})$ ou $(x = y \neq 0, 1 = (2 - 2\lambda), z(2 - 2\lambda) = 2, g(x, y, z) = 0 \text{ e } z > -1)$ ou $(x = -y \neq 0, -1 = (2 - 2\lambda), z(2 - 2\lambda) = 2, g(x, y, z) = 0 \text{ e } z > -1)$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, \sqrt{3})$ ou $(x = y \neq 0, \lambda = \frac{1}{2}), z = 2, 2x^2 < 0 \text{ e } z > -1$ (sem solução) ou $(x = -y \neq 0, \lambda = \frac{3}{2}, z = -2, 2x^2 = 3 - 4 \text{ e } z > -1$ (sem solução))

$\Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, \sqrt{3})$.

c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 3 \text{ e } z = -1\}$ (parte do plano)

Note que $\nabla h(x, y, z) = (0, 0, 1) \neq \vec{0}$ para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Aplicando os multiplicadores de Lagrange, um candidato (x, y, z) em $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -1\}$ é tal que $\nabla f(x, y, z) =$

$\lambda \nabla h(x, y, z)$, $x^2 + y^2 + z^2 < 3$ e $z = -1$. Logo $2x - y = 0$, $2y - x = 0$, $2z - 2 = \lambda$, $x^2 + y^2 + z^2 < 3$ e $z = -1$

$$\Leftrightarrow x = y = 0, z = -1 \text{ e } 1 < 3.$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, -1).$$

d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 3 \text{ e } z = -1\}$ (intersecção de duas superfícies)

Os vetores $\nabla g(x, y, z)$ e $\nabla h(x, y, z)$ são linearmente independentes para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $g(x, y, z) = 0 = h(x, y, z)$. De fato, se $(2x, 2y, 2z)$ e $(0, 0, 1)$ forem linearmente dependentes para algum (x, y, z) na intersecção das duas superfícies, então $x = y = 0$, $z = -1$ e $z^2 = 3$, o que é impossível.

Aplicando os multiplicadores de Lagrange, um candidato (x, y, z) nesta curva é tal que $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z)$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ e $z = -1$.

$$\text{Logo } 2x - y = \lambda 2x, 2y - x = \lambda 2y, z = -1, -2 - 2 = -\lambda 2 + \mu \text{ e } x^2 + y^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow y = x(2 - 2\lambda), x = y(2 - 2\lambda), z = -1 \text{ e } x^2 + y^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow (x = y = 0 \text{ e } 0 = 2 \text{ (não tem solução)}) \text{ ou } x^2 = y^2 \neq 0, z = -1 \text{ e } x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) \in \{(1, 1, -1), (-1, 1, -1), (1, -1, -1), (-1, -1, -1)\}.$$

Agora, vamos calcular o valor da função f em cada candidato encontrado acima.

$$f(0, 0, 1) = 0 + 0 + 1 - 0 - 2 = -1, f(0, 0, \sqrt{3}) = 0 + 0 + 3 - 0 - 2\sqrt{3}, f(0, 0, -1) = 0 + 0 + 1 - 0 + 2 = 3, f(1, 1, -1) = f(-1, -1, -1) = 1 + 1 + 1 - 1 + 2 = 4, f(1, -1, -1) = f(-1, 1, -1) = 1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 6.$$

Claramente 6 é o maior valor, logo os pontos de máximo são: $(1, -1, -1)$ e $(-1, 1, -1)$.

Agora, $-1 < 3 - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{3} < 4 \Leftrightarrow \sqrt{3} < 2 \Leftrightarrow 3 < 4$ e os outros valores são positivos. Portanto -1 é o valor mínimo e o ponto de mínimo é $(0, 0, 1)$.

Questão 4.(2 pontos) Sejam m número real, $m \neq 0$ e $f(x, y) = x^4 + my^2 - 2x^2$.

- (a) Classifique os pontos críticos de f em função de m .
 (b) Considere $m = 2$. Encontre os valores máximo e mínimo de f no conjunto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$$

Solução de a): Seja $m \neq 0$ fixado. Um ponto crítico de f satisfaz

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4x = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 2my = 0$. Como $m \neq 0$, segue que um ponto crítico de f satisfaz ($x = 0$ ou $x^2 = 1$) e $y = 0$. Logo os pontos críticos são $(0, 0)$, $(-1, 0)$ e $(1, 0)$.

Por ser polinomial, a função é de classe C^2 e podemos classificar os pontos usando o Hessiano.

As derivadas segundas de f são:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2m \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

$$H(0, 0) = -4.2m - 0 = -8m \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = -4 < 0.$$

Se $m > 0$ então $H(0, 0)$ é negativo, e portanto $(0, 0)$ é ponto de sela. Se $m < 0$ então $H(0, 0)$ é positivo e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) < 0$, e portanto $(0, 0)$ é ponto de máximo.

$$H(1, 0) = 8.2m - 0 = 16m \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) = 8 > 0.$$

Se $m < 0$ então $H(1, 0)$ é negativo, e portanto $(1, 0)$ é ponto de sela. Se $m > 0$ então $H(1, 0)$ é positivo e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) > 0$, e portanto $(1, 0)$ é ponto de mínimo.

$$H(-1, 0) = 8.2m - 0 = 16m \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 0) = 8 > 0.$$

Se $m < 0$ então $H(-1, 0)$ é negativo, e portanto $(-1, 0)$ é ponto de sela. Se $m > 0$ então $H(-1, 0)$ é positivo e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 0) > 0$, e portanto $(-1, 0)$ é ponto de mínimo.

Solução de b). Temos que considerar os candidatos no interior do conjunto C e na fronteira do conjunto C . Nenhum dos pontos críticos que encontramos em a) estão no interior de C , então os extremantes estão na fronteira.

A fronteira pode ser escrita como a reunião de duas curvas parametrizáveis.

1) Pontos da curva $\{(x, y) : y = x^2 \text{ e } -1 < x < 1\}$.

Seja $\gamma_1(t) = (t, t^2)$, $-1 < t < 1$ e $g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = t^4 + 2t^4 - 2t^2 = 3t^4 - 2t^2$.

Os candidatos a extremamente na curva satisfazem $g_1'(t) = 12t^3 - 4t = 0$. Logo $t = 0$ ou $t^2 = \frac{1}{3}$.

Logo, os candidatos a extremante na curva são $(0, 0)$, $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3})$ e $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3})$.

2) Pontos da curva $\{(x, 1) : -1 < x < 1\}$.

Seja $\gamma_2(t) = (t, 1)$, $-1 < t < 1$ e $g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = t^4 + 2 - 2t^2$.

Os candidatos a extremamente na curva satisfazem $g_2'(t) = 4t^3 - 4t = 0$. As raízes do polinômio são $t = 0$ ou $t^2 = 1$, mas apenas $t = 0$ corresponde a um ponto no interior do segmento. Logo o único candidato a extremante na curva é $(0, 1)$.

3) Extremidades das curvas.

Os candidatos por serem extremidades das curva são $(-1, 1)$ e $(1, 1)$.

Vamos calcular agora o valor da f em cada candidato:

$$f(0, 0) = 0, \quad f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{1}{9} - 2 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}, \quad f(0, 1) = 0 + 2 - 0 = 2, \\ f(-1, 1) = f(1, 1) = 1 + 2 - 2 = 1.$$

O valor mínimo é $-\frac{1}{3}$ e os pontos de mínimo são $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3})$ e $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3})$.

O valor máximo é 2, portanto o ponto de máximo é $(0, 1)$.

Gabarito - TURMA B

Questão 1.(3 pontos) Seja a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{y^5} \operatorname{sen} \left(\sqrt[3]{x^4 + y^4} \right)}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Mostre que f contínua em $(0, 0)$

(b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

(c) A função f é diferenciável em $(0, 0)$? Justifique sua resposta.

Solução.

(a) A função f é contínua em $(0, 0)$ se $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$. Vamos calcular esse limite.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{y^5} \operatorname{sen} \left(\sqrt[3]{x^4 + y^4} \right)}{x^2 + y^2} &= \frac{\operatorname{sen} \left(\sqrt[3]{x^4 + y^4} \right)}{\sqrt[3]{x^4 + y^4}} \frac{\sqrt[3]{y^5} \sqrt[3]{x^4 + y^4}}{x^2 + y^2} = \frac{\operatorname{sen} \left(\sqrt[3]{x^4 + y^4} \right)}{\sqrt[3]{x^4 + y^4}} \sqrt[3]{\frac{x^4 y^5 + y^9}{(x^2 + y^2)^3}} \\ &= \frac{\operatorname{sen} \left(\sqrt[3]{x^4 + y^4} \right)}{\sqrt[3]{x^4 + y^4}} \sqrt[3]{\left(\frac{x^4 y^5}{(x^2 + y^2)^3} + \frac{y^9}{(x^2 + y^2)^3} \right)} \end{aligned}$$

Vamos analisar separadamente cada expressão e calcular o limite.

Usando o limite fundamental temos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen} \left(\sqrt[3]{x^4 + y^4} \right)}{\sqrt[3]{x^4 + y^4}} = 1$

Temos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^9}{(x^2 + y^2)^3} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y^3 \frac{y^6}{(x^2 + y^2)^3} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y^3 \left(\frac{y^2}{(x^2 + y^2)} \right)^3 = 0$.

Pois $\frac{y^2}{(x^2 + y^2)}$ é limitada ($0 \leq y^2 \leq x^2 + y^2$) e $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y^3 = 0$.

E $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^5 x^4}{(x^2 + y^2)^3} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 x}{8} \frac{8 y^3 x^3}{(x^2 + y^2)^3} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 x}{8} \left(\frac{2xy}{(x^2 + y^2)} \right)^3 = 0$. De fato,

$\frac{2xy}{(x^2 + y^2)}$ é limitada ($0 \leq |2xy| \leq x^2 + y^2$, pois $x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \geq 0$) e $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y^2x = 0$.

Portanto, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt[3]{\left(\frac{y^9}{(x^2 + y^2)^3} + \frac{y^5x^4}{(x^2 + y^2)^3}\right)} = 0$ e então

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt[3]{y^5} \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^4 + y^4}\right)}{x^2 + y^2} = 1 \cdot 0 = 0 = f(0,0)$$

OBS: Veja outra forma de calcular o limite na Turma A.

(b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 \cdot \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{h^4}\right)}{h \cdot h^2} = 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{k^5} \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{k^4}\right)}{k \cdot k^2} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{k^5} \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{k^4}\right)}{k \cdot k^2} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{k^4}\right)}{\sqrt[3]{k^4}} \cdot \frac{\sqrt[3]{k^9}}{k^3} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{k^4}\right)}{\sqrt[3]{k^4}} = 1. \end{aligned}$$

(c) Para saber se f é diferenciável vamos estudar o seguinte limite

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\|(h,k)\|}. \quad (1)$$

Se o limite for 0 a função é diferenciável. Calculando

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{\sqrt[3]{h^5} \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{h^4+k^4}\right)}{h^2+k^2} - 0 - 0 \cdot h - 1 \cdot k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

Porém sobre a curva $\gamma(t) = (t, t)$ temos

$$\frac{\sqrt[3]{t^5} \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{2t^4}\right) - t(2t^2)}{2t^2\sqrt{2t^2}} = \frac{\sqrt[3]{t^5} \sqrt[3]{2t^4} \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{2t^4}\right)}{2\sqrt{2}t^2|t|\sqrt[3]{2t^4}} - \frac{t}{\sqrt{2}|t|}$$

Para $t > 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{2} t^3 \operatorname{sen}(\sqrt[3]{2t^4})}{\sqrt[3]{2t^4} 2\sqrt{2} t^3} - \frac{t}{t\sqrt{2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{2} \operatorname{sen}(\sqrt[3]{2t^4})}{2\sqrt{2} \sqrt[3]{2t^4}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[3]{2} - 2}{2\sqrt{2}}$$

Como o limite é diferente de 0, o que já permite afirmar que f não é diferenciável. Observe que NÃO EXISTE o limite quanto t tende a 0, pois os limites laterais são diferentes (faça para $t < 0$).

Portanto, f não é diferenciável em $(0, 0)$

Questão 2.(2 pontos) Seja $f = f(x, y)$ uma função diferenciável tal que $z = x + 3y - 2$ é equação do plano tangente a f em $(1, 1, f(1, 1))$,

(a) Obtenha $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)$.

(b) Seja $g(u, v) = f(u^2, v^2 + 3u)$. Obtenha as expressões de $\frac{\partial g}{\partial u}(u, v)$ e $\frac{\partial g}{\partial v}(u, v)$ em função das derivadas parciais de f .

(c) Seja γ uma curva diferenciável tal que a sua imagem está contida na intersecção do gráfico de g com a superfície $S = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 - 4v + 2u + 1 = 0\}$. Dê a equação da reta tangente a γ no ponto $(-1, 2, g(-1, 2))$.

Solução.

(a) O plano tangente de f em $(1, 1, f(1, 1))$ tem equação

$$z = f(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1).$$

É dado que $z = x - 3y - 2$ é equação do tal plano. Portanto, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 3$.

Note que já podemos obter $f(1, 1)$, pois

$$-2 = f(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) \cdot (-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) \cdot (-1) = f(1, 1) - 1 - 3.$$

Portanto, $f(1, 1) = 2$

(b) Como $g(u, v) = f(u^2, v^2 + 3u)$, segue da regra da cadeia que

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = 2u \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(u^2, v^2 + 3u) + 3 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(u^2, v^2 + 3u)$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = 0 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(u^2, v^2 + 3u) + 2v \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(u^2, v^2 + 3u)$$

(c) O conjunto S pode ser visto como a superfície de nível 0 da função $h(u, v, w) = u^2 + v^2 + w^2 - 4v + 2u + 1$. Como a imagem de γ está contida em S e no gráfico de g então o vetor tangente $\gamma'(t_0)$ é paralelo ao plano tangente de S e ao plano tangente de g no ponto $\gamma(t_0) = (-1, 2, g(-1, 2))$.

O vetor $(\frac{\partial g}{\partial u}(-1, 2), \frac{\partial g}{\partial v}(-1, 2), -1)$ é ortogonal ao plano tangente de g e o vetor $(\frac{\partial h}{\partial u}(-1, 2, 2), \frac{\partial h}{\partial v}(-1, 2, 2), \frac{\partial h}{\partial w}(-1, 2, 2)) = (0, 0, 4)$ é ortogonal a S , no ponto em questão.

$$((\frac{\partial h}{\partial u}, \frac{\partial h}{\partial v}, \frac{\partial h}{\partial w}) = (2u + 2, 2v - 4, 2w))$$

Então o vetor $\gamma'(t_0)$ é paralelo ao produto vetorial

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial g}{\partial u}(-1, 2) & \frac{\partial g}{\partial v}(-1, 2) & -1 \\ \frac{\partial h}{\partial u}((-1, 2, 2)) & \frac{\partial h}{\partial v}(-1, 2, 2) & \frac{\partial h}{\partial w}((-1, 2, 2)) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 7 & 12 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (48, -28, 0)$$

Portanto, a reta tangente procurada tem equação

$$(u, v, w) = (2, -1, 2) + \lambda(12, -7, 0) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Questão 3.(3 pontos) Seja $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - 2z$. Encontre os pontos de máximo e mínimo de f no conjunto $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3 \text{ e } z \geq -1\}$.

Solução: O conjunto K é compacto e a função polinomial em três variáveis é contínua, portanto os extremantes existem.

Seja $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$ e $h(x, y, z) = z + 1$. Então $\nabla f(x, y, z) = (2x - y, 2y - x, 2z - 2)$, $\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ e $\nabla h(x, y, z) = (0, 0, 1)$.

Vamos procurar os candidatos a extremante.

a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 3 \text{ e } z > -1\}$ (interior do sólido).

Um candidato (x, y, z) neste aberto é tal que $\nabla f(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Logo, $2x - y = 0$, $2y - x = 0$ e $2z - 2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ e $z = 1$. Como $(0, 0, 1)$ pertence ao conjunto acima, ele é candidato a extremante.

b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 3 \text{ e } z > -1\}$ (parte da casca esférica).

Note que $\nabla g(x, y, z) \neq \vec{0}$ se $g(x, y, z) = 0$. De fato, se $\nabla g(x, y, z) = \vec{0}$ em tão $x = y = z = 0$, mas $g(0, 0, 0) = -3 \neq 0$. Podemos aplicar os multiplicadores de Lagrange, e um candidato (x, y, z) em $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 3\}$ é tal que $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$, $g(x, y, z) = 0$ e $z > -1$.

Logo $2x - y = \lambda 2x$, $2y - x = \lambda 2y$, $2z - 2 = \lambda 2z$, $g(x, y, z) = 0$ e $z > -1$

$\Leftrightarrow y = x(2 - 2\lambda)$, $x = y(2 - 2\lambda)$, $z(2 - 2\lambda) = 2$, $g(x, y, z) = 0$ e $z > -1$

$\Leftrightarrow (x = y = 0, z^2 = 3 \text{ e } z > -1)$ ou $(x^2 = y^2 \neq 0, x = y(2 - 2\lambda), z(2 - 2\lambda) = 2, g(x, y, z) = 0$ e $z > -1)$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, \sqrt{3})$ ou $(x = y \neq 0, 1 = (2 - 2\lambda), z(2 - 2\lambda) = 2, g(x, y, z) = 0$ e $z > -1)$ ou $(x = -y \neq 0, -1 = (2 - 2\lambda), z(2 - 2\lambda) = 2, g(x, y, z) = 0$ e $z > -1)$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, \sqrt{3})$ ou $(x = y \neq 0, \lambda = \frac{1}{2}), z = 2, 2x^2 < 0$ e $z > -1$ (sem solução) ou $(x = -y \neq 0, \lambda = \frac{3}{2}, z = -2, 2x^2 = 3 - 4$ e $z > -1$ (sem solução))

$\Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, \sqrt{3})$.

c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 3 \text{ e } z = -1\}$ (parte do plano)

Note que $\nabla h(x, y, z) = (0, 0, 1) \neq \vec{0}$ para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Aplicando os multiplicadores de Lagrange, um candidato (x, y, z) em $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -1\}$ é tal que $\nabla f(x, y, z) =$

$\lambda \nabla h(x, y, z)$, $x^2 + y^2 + z^2 < 3$ e $z = -1$. Logo $2x - y = 0$, $2y - x = 0$, $2z - 2 = \lambda$, $x^2 + y^2 + z^2 < 3$ e $z = -1$

$$\Leftrightarrow x = y = 0, z = -1 \text{ e } 1 < 3.$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, -1).$$

d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 3 \text{ e } z = -1\}$ (intersecção de duas superfícies)

Os vetores $\nabla g(x, y, z)$ e $\nabla h(x, y, z)$ são linearmente independentes para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $g(x, y, z) = 0 = h(x, y, z)$. De fato, se $(2x, 2y, 2z)$ e $(0, 0, 1)$ forem linearmente dependentes para algum (x, y, z) na intersecção das duas superfícies, então $x = y = 0$, $z = -1$ e $z^2 = 3$, o que é impossível.

Aplicando os multiplicadores de Lagrange, um candidato (x, y, z) nesta curva é tal que $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z)$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ e $z = -1$.

$$\text{Logo } 2x - y = \lambda 2x, 2y - x = \lambda 2y, z = -1, -2 - 2 = -\lambda 2 + \mu \text{ e } x^2 + y^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow y = x(2 - 2\lambda), x = y(2 - 2\lambda), z = -1 \text{ e } x^2 + y^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow (x = y = 0 \text{ e } 0 = 2 \text{ (não tem solução)}) \text{ ou } x^2 = y^2 \neq 0, z = -1 \text{ e } x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) \in \{(1, 1, -1), (-1, 1, -1), (1, -1, -1), (-1, -1, -1)\}.$$

Agora, vamos calcular o valor da função f em cada candidato encontrado acima.

$$f(0, 0, 1) = 0 + 0 + 1 - 0 - 2 = -1, f(0, 0, \sqrt{3}) = 0 + 0 + 3 - 0 - 2\sqrt{3}, f(0, 0, -1) = 0 + 0 + 1 - 0 + 2 = 3, f(1, 1, -1) = f(-1, -1, -1) = 1 + 1 + 1 - 1 + 2 = 4, f(1, -1, -1) = f(-1, 1, -1) = 1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 6.$$

Claramente 6 é o maior valor, logo os pontos de máximo são: $(1, -1, -1)$ e $(-1, 1, -1)$.

Agora, $-1 < 3 - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{3} < 4 \Leftrightarrow \sqrt{3} < 2 \Leftrightarrow 3 < 4$ e os outros valores são positivos. Portanto -1 é o valor mínimo e o ponto de mínimo é $(0, 0, 1)$.

Questão 4.(2 pontos) Sejam m número real, $m \neq 0$ e $f(x, y) = y^4 + mx^2 - 2y^2$.

- (a) Classifique os pontos críticos de f em função de m .
 (b) Considere $m = 2$. Encontre os valores máximo e mínimo de f no conjunto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq 1\}$$

Solução de a): Seja $m \neq 0$ fixado. Um ponto crítico de f satisfaz

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2mx = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4y = 0$. Como $m \neq 0$, segue que um ponto crítico de f satisfaz $x = 0$ e ($y = 0$ ou $y^2 = 1$). Logo os pontos críticos são $(0, 0)$, $(0, -1)$ e $(0, 1)$.

Por ser polinomial, a função é de classe C^2 e podemos classificar os pontos usando o Hessiano.

As derivadas segundas de f são:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2m, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 4 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

$$H(0, 0) = 2m \cdot (-4) - 0 = -8m \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2m.$$

Se $m > 0$ então $H(0, 0)$ é negativo, e portanto $(0, 0)$ é ponto de sela. Se $m < 0$ então $H(0, 0)$ é positivo e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) < 0$, e portanto $(0, 0)$ é ponto de máximo.

$$H(0, 1) = 2m \cdot 8 - 0 = 16m \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 1) = 2m.$$

Se $m < 0$ então $H(0, 1)$ é negativo, e portanto $(0, 1)$ é ponto de sela. Se $m > 0$ então $H(0, 1)$ é positivo e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 1) > 0$, e portanto $(0, 1)$ é ponto de mínimo.

$$H(0, -1) = 2m \cdot 8 - 0 = 16m \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, -1) = 2m.$$

Se $m < 0$ então $H(0, -1)$ é negativo, e portanto $(0, -1)$ é ponto de sela. Se $m > 0$ então $H(0, -1)$ é positivo e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, -1) > 0$, e portanto $(0, -1)$ é ponto de mínimo.

Solução de b). Temos que considerar os candidatos no interior do conjunto C e na fronteira do conjunto C . Nenhum dos pontos críticos que encontramos em a) estão no interior de C , então os extremantes estão na fronteira.

A fronteira pode ser escrita como a reunião de duas curvas parametrizáveis.

1) Pontos da curva $\{(x, y) : x = y^2 \text{ e } -1 < y < 1\}$.

Seja $\gamma_1(t) = (t^2, t)$, $-1 < t < 1$ e $g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = t^4 + 2t^4 - 2t^2 = 3t^4 - 2t^2$.

Os candidatos a extremamente na curva satisfazem $g'_1(t) = 12t^3 - 4t = 0$. Logo $t = 0$ ou $t^2 = \frac{1}{3}$.

Logo, os candidatos a extremante na curva são $(0, 0)$, $(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ e $(\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$.

2) Pontos da curva $\{(1, y) : -1 < y < 1\}$.

Seja $\gamma_2(t) = (1, t)$, $-1 \leq t \leq 1$ e $g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = t^4 + 2 - 2t^2$.

Os candidatos a extremamente na curva satisfazem $g'_2(t) = 4t^3 - 4t = 0$. As raízes do polinômio são $t = 0$ ou $t^2 = 1$, mas apenas $t = 0$ corresponde a um ponto no interior do segmento. Logo o único candidato a extremante na curva é $(1, 0)$.

3) Extremidades das curvas.

Os candidatos por serem extremidades de curva são $(1, -1)$ e $(1, 1)$.

Vamos calcular agora o valor da f em cada candidato:

$f(0, 0) = 0$, $f(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}) = f(\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{1}{9} - 2 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$, $f(1, 0) = 0 + 2 - 0 = 2$, $f(1, -1) = f(1, 1) = 1 + 2 - 2 = 1$.

O valor mínimo é $-\frac{1}{3}$ e os pontos de mínimo são $(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ e $(\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$.

O valor máximo é 2, portanto o ponto de máximo é $(1, 0)$.