Gabarito da Prova Substitutiva
MAT-2454 - Tipo A

28 de Novembro de 2011

Questão 1. (2,0) Seja $f(x,y) = \cos \sqrt[5]{x^4+y^4}$.

A

(a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

(b) Determine os pontos (x,y) em que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é contínua.

(c) Determine os pontos em que a função f é diferenciável.

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\overbrace{\cos(h^4)^{1/5}}^{\to 0} - 1}{\underbrace{h}_{\to 0}} \overset{\text{L'Hôpital}}{=}$

$= \lim\limits_{h\to 0} -\dfrac{4}{5}\cdot h^{-1/5}\cdot \operatorname{sen}(h)^{4/5} = \lim\limits_{h\to 0} -\underbrace{\dfrac{\operatorname{sen}(h)^{4/5}}{h^{4/5}}}_{\to 1} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \underbrace{h^{3/5}}_{\to 0} = 0$

(usando o limite fundamental)

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} -\frac{4}{5}\frac{x^3 \operatorname{sen}(x^4+y^4)^{1/5}}{(x^4+y^4)^{4/5}} & , \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Para determinar se $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $(0,0)$, devemos verificar se $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. Nos pontos $(x,y)\neq(0,0)$ a função $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua pois é composta de funções contínuas em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{4}{5}x^3\frac{\operatorname{sen}(x^4+y^4)^{1/5}}{(x^4+y^4)^{4/5}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{4}{5}\underbrace{\left(\frac{x^5}{x^4+y^4}\right)^{3/5}}_{\to 0\ (*)} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(x^4+y^4)^{1/5}}{(x^4+y^4)^{1/5}}}_{\to 1 \text{ (limite fundamental)}} = 0$$

(*) Como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$ e $\left(\frac{x^4}{x^4+y^4}\right) \leq 1 \ \forall (x,y)\neq(0,0)$, temos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5}{x^4+y^4} = 0$ e, portanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^5}{x^4+y^4}\right)^{3/5} = 0.$$

Como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, concluímos que $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $(0,0)$. Logo, $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $\mathbb{R}^2$.

c) Por simetria, $\frac{\partial f}{\partial y}$ também é contínua em $\mathbb{R}^2$ e concluímos que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ (teorema visto em aula: se ambas as derivadas parciais são contínuas em (x_0,y_0) então a função é diferenciável em (x_0,y_0).

Questão 2. (2,5) Seja $g(s,t)$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$ e defina $f(x,y) = y \cdot g(-x, y^2+3)$. A

(a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ em termos da função g e de suas derivadas parciais.

(b) Determine dois pontos críticos de f, sabendo que $(1,4)$ é ponto crítico de g e que $g(1,4) = 0$.

(c) Classifique os pontos críticos de f encontrados em (b) sabendo que $(1,4)$ é ponto de mínimo local de g e que det $H_g = \frac{\partial^2 g}{\partial s^2} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial s \partial t}\right)^2 > 0$.

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y\frac{\partial g}{\partial s}(-x, y^2+3)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = g(-x, y^2+3) + 2y^2\frac{\partial g}{\partial t}(-x, y^2+3)$

b) $-x = 1 \Rightarrow x = -1$; $y^2+3 = 4 \Rightarrow y = \pm 1$

$(-1, \pm 1)$ são pontos críticos de f pois:

$\frac{\partial f}{\partial x}(-1, \pm 1) = -(\pm 1)\frac{\partial g}{\partial s}(1,4) = 0$ (já que $\frac{\partial g}{\partial s}(1,4) = 0$)

$\frac{\partial f}{\partial y}(-1, \pm 1) = g(1,4) + 2\frac{\partial g}{\partial t}(1,4) = 0$ (já que $\frac{\partial g}{\partial t}(1,4) = 0$ e $g(1,4) = 0$)

c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}(-x, y^2+3)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -\frac{\partial g}{\partial s}(-x, y^2+3) - 2y^2\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial s}(-x, y^2+3)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial t}(-x, y^2+3) \cdot 6y + 4y^3\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(-x, y^2+3)$

Logo, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 1) = \frac{\partial^2 g}{\partial s^2}(1,4)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = -\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}(1,4)$;

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-1, 1) = -2\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial s}(1,4)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-1,-1) = -2\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial s}(1,4)$;

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, 1) = 4\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(1,4)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,-1) = -4\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(1,4)$.

Como f é de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$, g também é e temos:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ e $\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial s} = \frac{\partial^2 g}{\partial s \partial t}$.

Estudando a matriz $H_f(-1,1)$ temos:

$$H_f(-1,1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial s^2}(1,4) & -2\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial s}(1,4) \\ -2\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial s}(1,4) & 4\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(1,4) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \det H_f(-1,1) = 4 \det H_g(1,4) > 0$

Além disso, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,1) = \frac{\partial^2 g}{\partial s^2}(1,4)$ que é maior que zero já que $(1,4)$ é mínimo local de g.

Logo, $\det H_f(-1,1) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,1) > 0$ implicam que $(-1,1)$ é mínimo local de f.

Para $H_f(-1,-1)$ temos: $H_f(-1,-1) = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}(1,4) & -2\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial s}(1,4) \\ -2\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial s}(1,4) & -4\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(1,4) \end{bmatrix}$

Logo, $\det H_f(-1,-1) = 4 H_g(1,4) > 0$

Além disso, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = -\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}(1,4) < 0$. Concluímos que $(-1,-1)$ é ponto de máximo local de f.

Questão 3.

(a) (1,5) A imagem da curva derivável γ está contida na intersecção do gráfico de $f(x,y) = y^2 - x^2$ com a superfície de equação $(z-2)^2 + x^2 = 1$. Existe um ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ da curva γ que está no primeiro octante e tal que a reta tangente nesse ponto é paralela à reta de equação

$$(x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(0, \sqrt{3}, 6), \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Determine as coordenadas do ponto P.

(b) (1,5) A curva parametrizada por $\sigma(t) = (\cos t \,\mathrm{sen} t, 2\,\mathrm{sen}^2 t - t)$, $t \in [0, 2\pi]$ é a curva de nível 2 da função diferenciável $g = g(x,y)$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de g no ponto $(0, -\pi, g(0,-\pi))$ sabendo que $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,-\pi) = 3$.

Solução de (a). O ponto P é, por hipó tese, $\gamma(t_0)$ para algum t_0. Sabemos que $\gamma'(t_0)$ é paralelo ao vetor $(0, \sqrt{3}, 6)$. Como a imagem de γ pertence ao gráfico de f, temos $\gamma'(t_0) \perp \vec{n}$, sendo $\vec{n} = (\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1)$. Portanto,

$$\vec{n} \cdot (0, \sqrt{3}, 6) = 0 \qquad (1)$$

Por outro lado, podemos interpretar a superfície $(z-2)^2 + x^2 = 1$ como superfície de nível 0 da função $g(x,y,z) = (z-2)^2 + x^2 - 1$. Sendo assim, temos que $\nabla g(P) \perp \gamma'(t_0)$ ou equivalentemente,

$$\nabla g(P) \cdot (0, \sqrt{3}, 6) = 0 \qquad (2)$$

Logo, o ponto P é solução do sistema

$$\begin{cases} (-2x, 2y, -1) \cdot (0, \sqrt{3}, 6) = 0 & \Leftrightarrow y = \sqrt{3} \\ (2x, 0, 2(z-2)) \cdot (0, \sqrt{3}, 6) = 0 & \Leftrightarrow z = 2 \\ (z-2)^2 + x^2 = 1 & \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

Como P pertence ao primeiro octante, concluímos que $P = (1, \sqrt{3}, 2)$.

Solução de (b). Sabemos que uma equação do plano tangente ao gráfico de g no ponto $(0, -\pi, g(0,-\pi))$ pode ser dada por

$$z - g(0,-\pi) = \frac{\partial g}{\partial x}(0,-\pi)(x-0) + \frac{\partial g}{\partial y}(0,-\pi)(y-(-\pi))$$

Sendo σ uma parametrização da curva de nível 2 de g, temos

$$g(\sigma(t)) = 2, \ \text{ para todo } \ t \in [0, 2\pi].$$

Em particular, observe que $\sigma(\pi) = (0, -\pi)$ e $g(0, -\pi) = 2$.

Como g é diferenciável, podemos usar a regra da cadeia para derivar a expressão acima em relação a t:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(\sigma(t)) \cdot (x'(t)) + \frac{\partial g}{\partial y}(\sigma(t)) \cdot (y'(t)) = 0, \forall t \ \ \in \ ]0, 2\pi[\ \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(\sigma(t)) \cdot (-\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t) + \frac{\partial g}{\partial y}(\sigma(t)) \cdot (4 \operatorname{sen} t \cos t - 1) = 0, \forall t$$

Para $t = \pi$, temos $\frac{\partial g}{\partial x}(0, -\pi) \cdot 1 + \frac{\partial g}{\partial y}(0, -\pi) \cdot (-1) = 0$. Portanto,

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0, -\pi) = \frac{\partial g}{\partial x}(0, -\pi) = 3$$

e a equação pedida é

$$z - 2 = 3x + 3(y + \pi)$$

Questão 4. (2,5) Sabemos que a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 y}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

não é diferenciável em $(0,0)$.

(a) Para cada vetor $\vec{u} = (a,b)$ com $||\,\vec{u}\,|| = 1$, determine $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$.

(b) Encontre o vetor unitário $\vec{u}$ que torna máximo o valor da derivada direcional de f no ponto $(0,0)$ e na direção de $\vec{u}$.

Solução.

(a) Como f não é diferenciável em $(0,0)$, não podemos usar a fórmula $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \vec{u}$ mas sim, a definição de derivada direcional:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \lim_{t \leftarrow 0} \frac{f(0+at, 0+bt) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \leftarrow 0} \frac{1}{t} \frac{(at)^4 bt}{(at)^2 + (bt)^2 - 0} = \lim_{t \leftarrow 0} \frac{a^4 b}{(a^2+b^2)^2} = a^4 b,$$

pois $\vec{u}$ é unitário. (Valor desta parte da questão: 1,0.)

(b) Precisamos encontrar o valor máximo da função $g(a,b) = a^4 b$, restrita à condição $a^2 + b^2 = 1$. Observe que o problema tem solução já que g é contínua e o conjunto $S = \{(a,b) \in R^2 : a^2+b^2-1 = 0\}$ é fechado e limitado.

Pelo *método dos multiplicadores de Lagrange*, se (a_0, b_0) for ponto de máximo de g em S então $\nabla g(a_0,b_0) \parallel \nabla h(a_0,b_0)$, ou seja, $det \begin{pmatrix} 4a^3 b & a^4 \\ 2a & 2b \end{pmatrix} = 0$

Assim sendo, o par (a,b) procurado deve ser solução do sistema $\begin{cases} 8a^3b^2 - 2a^5 = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$

cujas soluções são $(0,1)$, $(0,-1)$, $(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$, $(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$, $(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$, $(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$.

Calculando-se o valor de g nesses pontos, vemos que o máximo é atingido em $\vec{u_1} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ e em $\vec{u_2} = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$.