Questão 1.

a) (1,0) Seja S a superfície de equação $2xy - 2y^2 + z^2 + 6z = 1$. Encontre o plano tangente a S no ponto $(-4, -1, -1)$.

b) (1,5) Considere a curva $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 = 1,\ 2x + 4y = z^2 \text{ e } z < 0\}$. Determine os pontos de C nos quais a reta tangente é paralela ao plano encontrado no item (a).

c) (1,0) Encontre uma parametrização para a intersecção da superfície S do item (a) com o plano $x = 3y$.

a) S é superfície de nível de $F(x,y,z) = 2xy - 2y^2 + z^2 + 6z$

$\nabla F(x,y,z) = (2y, 2x - 4y, 2z + 6)$

$\nabla F(-4,-1,-1) = (-2, -4, 4) \parallel (1, 2, -2)$

Equação do plano: $(x+4) + 2(y+1) - 2(z+1) = 0$

b) $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x_0 & 8y_0 & 0 \\ 2 & 4 & -2z_0 \end{vmatrix} = -16y_0z_0\vec{i} + 4x_0z_0\vec{j} + (8x_0 - 16y_0)\vec{k}$

A reta tangente a C em (x_0, y_0, z_0) é paralela a $(-16y_0z_0, 4x_0z_0, 8x_0 - 16y_0)$. Para que essa reta seja paralela ao plano de a), devemos ter

$0 = \langle(-16y_0z_0, 4x_0z_0, 8x_0 - 16y_0), (1, 2, -2)\rangle =$

$= -16y_0z_0 + 8x_0z_0 - 2(8x_0 - 16y_0) = \underbrace{(z_0 - 2)}_{\neq 0}(8x_0 - 16y_0)$

Como (x_0, y_0, z_0) está em C, temos $z_0 < 0$. Logo

$$\begin{cases} x_0 = 2y_0 \\ x_0^2 + 4y_0^2 = 8y_0^2 = 1 \\ 2x_0 + 4y_0 = 8y_0 = z_0^2 \quad (\therefore y_0 \geq 0) \\ z_0 < 0 \end{cases}$$

$\therefore\ y_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}},\quad x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad z_0 = -\sqrt{\frac{8}{2\sqrt{2}}} = \frac{-2}{\sqrt[4]{2}}$

Resposta: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{-2}{\sqrt[4]{2}}\right)$

c) $\begin{cases} 2xy - 2y^2 + z^2 + 6z = 1 \\ x = 3y \end{cases} \iff$ A

$\begin{cases} 6y^2 - 2y^2 + z^2 + 6z = 1 \\ x = 3y \end{cases} \iff \begin{cases} 4y^2 + (z+3)^2 = 10 \\ x = 3y \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \left(\frac{2}{\sqrt{10}} y\right)^2 + \left(\frac{z+3}{\sqrt{10}}\right)^2 = 1 \\ x = 3y \end{cases} \therefore \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{10}} y = \cos t \\ \frac{z+3}{\sqrt{10}} = \operatorname{sen} t \end{cases} \quad x = 3y$

Uma parametrização é

$\Gamma(t) = \left(\frac{3}{2}\sqrt{10}\cos t,\ \frac{\sqrt{10}}{2}\cos t,\ \sqrt{10}\operatorname{sen} t - 3\right),\ t \in [0, 2\pi]$

Questão 1.

a) (1,0) Seja S a superfície de equação $2xy - 2x^2 + z^2 + 6z = 1$. Encontre o plano tangente a S no ponto $(-1, -4, -1)$.

b) (1,5) Considere a curva $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 = 1,\ 4x + 2y = z^2 \text{ e } z < 0\}$. Determine os pontos de C nos quais a reta tangente é paralela ao plano encontrado no item (a).

c) (1,0) Encontre uma parametrização para a intersecção da superfície S do item (a) com o plano $3x = y$.

a) S é superfície de nível de $F(x,y,z) = 2xy - 2x^2 + z^2 + 6z$

$\nabla F(x,y,z) = (2y - 4x,\ 2x,\ 2z + 6)$

$\nabla F(-1,-4,-1) = (-4, -2, 4) \parallel (2, 1, -2)$

Equação do plano: $2(x+1) + (y+4) - 2(z+1) = 0$

b) $$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8x_0 & 2y_0 & 0 \\ 4 & 2 & -2z_0 \end{vmatrix} = -4y_0 z_0 \vec{i} + 16 x_0 z_0 \vec{j} + (16x_0 - 8y_0)\vec{k}$$

A reta tangente a C em (x_0, y_0, z_0) é paralela a $(-4y_0z_0, 16x_0z_0, 16x_0 - 8y_0)$. Para que essa reta seja paralela ao plano de a), devemos ter

$$0 = \langle (-4y_0z_0, 16x_0z_0, 16x_0 - 8y_0), (2, 1, -2) \rangle =$$
$$= -8y_0z_0 + 16x_0z_0 - 2(16x_0 - 8y_0) = \underbrace{(z_0 - 2)}_{\neq 0}(16x_0 - 8y_0).$$

Como (x_0, y_0, z_0) está em C, temos $z_0 < 2$. Logo

$$\begin{cases} y_0 = 2x_0 \\ 4x_0^2 + y_0^2 = 8x_0^2 = 1 \\ 4x_0 + 2y_0 = 8x_0 = z_0^2 \quad (\therefore x_0 \geq 0) \\ z_0 < 0 \end{cases}$$

$\therefore x_0 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$y_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad z_0 = -\sqrt{\dfrac{8}{2\sqrt{2}}} = \dfrac{-2}{\sqrt[4]{2}}$

Resposta: $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{2}{\sqrt[4]{2}} \right)$

c) $\begin{cases} 2xy - 2x^2 + z^2 + 6z = 1 \\ y = 3x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 2x^2 + z^2 + 6z = 1 \\ y = 3x \end{cases}$

B

$\Longleftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + (z+3)^2 = 10 \\ x = 3y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{\sqrt{10}}x\right)^2 + \left(\frac{z+3}{\sqrt{10}}\right)^2 = 1 \\ x = 3y \end{cases}$

$\therefore \quad \frac{2}{\sqrt{10}}x = \cos t \qquad \frac{z+3}{\sqrt{10}} = \text{sen}\, t \quad , \quad y = 3x$

Uma parametrização é:

$\Gamma(t) = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\cos t, \ \frac{3}{2}\sqrt{10}\cos t, \ \sqrt{10}\,\text{sen}\, t - 3 \right), t \in [0, 2\pi]$

Questão 2. (3,5) Determine, caso existam, os valores máximo e mínimo de $f(x,y,z) = y^2 - xz + 6y$, sobre os seguintes conjuntos (**justifique**):

a) $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 + z^2 = 36\right\}$;

Considere a função $g(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + z^2 - 36$ de classe $\mathcal{C}^1$. Como $\nabla f(x,y,z) = (-z, 2y+6, -x)$ e $\nabla g(x,y,z) = (2x, 8y, 2z)$, então, usando o Multiplicadores de Lagrange com uma condição, temos $\nabla f(x,y,z) // \nabla g(x,y,z) \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -z & 2y+6 & -x \\ 2x & 8y & 2z \end{vmatrix} = (4yz + 12z + 8xy, -2x^2 + 2z^2, -8yz - 4xy - 12x) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} yz + 3z + 2xy = 0 \\ x^2 = z^2 \\ 2yz + xy + 3x = 0 \\ x^2 + 4y^2 + z^2 - 36 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \text{as soluções do sistema } (0,3,0), (0,-3,0), (4,-1,4) \text{ e } (-4,-1,-4)$$

são os candidatos a máximos e mínimos de f sobre S.

Como $f(0,3,0) = 27$, $f(0,-3,0) = -9$ e $f(\pm 4, -1, \pm 4) = -21$, temos que o valor máximo de f sobre S é 27 e o valor mínimo é -21.

b) $R = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 + z^2 = 36 \text{ e } y \leq 2\right\}$.

b_1) Para determinar os máximos e mínimos de f para $x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$ e $y = 2$, utilizaremos os Multiplicadores de Lagrange com duas condições. Considere a função $h(x,y,z) = y - 2$ de classe $\mathcal{C}^1$. Temos que $\nabla F(x,y,z) = (0,1,0)$.

$$\{\nabla f(x,y,z), \nabla g(x,y,z), \nabla h(x,y,z)\} \text{ é l.d.} \Rightarrow \begin{vmatrix} -z & 2y+6 & -x \\ 2x & 8y & 2z \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2z^2 - 2x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = z^2 \\ x^2 + 4y^2 + z^2 - 36 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow$$ as soluções do sistema $(\pm\sqrt{10}, 2, \pm\sqrt{10})$ e $(\pm\sqrt{10}, 2, \mp\sqrt{10})$ são os candidatos a máximos e mínimos de f para $x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$ e $y = 2$.

b_2) Para $y < 2$ consideraremos apenas os pontos $(0, -3, 0)$, $(4, -1, 4)$ e $(-4, -1, -4)$ do item (a).

De (b_1) e (b_2), como $f(0, -3, 0) = -9$, $f(\pm 4, -1, \pm 4) = -21$, $f(\pm\sqrt{10}, 2, \pm\sqrt{10}) = 6$ e $f(\pm\sqrt{10}, 2, \mp\sqrt{10}) = 26$, temos que o valor máximo de f sobre R é 26 e o valor mínimo é -21.

Questão 2. (3,5) Determine, caso existam, os valores máximo e mínimo de $f(x,y,z) = x^2 - yz + 6x$, sobre os seguintes conjuntos (**justifique**):

a) $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 + z^2 = 36\right\}$;

Considere a função $g(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + z^2 - 36$ de classe $\mathcal{C}^1$. Como $\nabla f(x,y,z) = (2x+6, -z, -y)$ e $\nabla g(x,y,z) = (8x, 2y, 2z)$, então, usando o Multiplicadores de Lagrange com uma condição, temos $\nabla f(x,y,z) // \nabla g(x,y,z) \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x+6 & -z & -y \\ 8x & 2y & 2z \end{vmatrix} = (-2z^2 + 2y^2, -8xy - 4xz - 12z, 4xy + 12y + 8xz) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2 = z^2 \\ 2xy + xz + 3z = 0 \\ xy + 3y + 2xz = 0 \\ 4x^2 + y^2 + z^2 - 36 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{as soluções do sistema } (3,0,0), (-3,0,0), (-1,4,4) \text{ e } (-1,-4,-4)$$

são os candidatos a máximos e mínimos de f sobre S.

Como $f(3,0,0) = 27$, $\quad f(-3,0,0) = -9 \quad$ e $\quad f(-1,\pm 4,\pm 4) = -21$, temos que o valor máximo de f sobre S é 27 e o valor mínimo é -21.

b) $R = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 + z^2 = 36 \text{ e } x \leq 2\right\}$.

b_1) Para determinar os máximos e mínimos de f para $4x^2 + y^2 + z^2 = 36$ e $x = 2$, utilizaremos os Multiplicadores de Lagrange com duas condições. Considere a função $h(x,y,z) = x - 2$ de classe $\mathcal{C}^1$. Temos que $\nabla F(x,y,z) = (1,0,0)$.

$$\{\nabla f(x,y,z), \nabla g(x,y,z), \nabla h(x,y,z)\} \text{ é l.d.} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2x+6 & -z & -y \\ 8x & 2y & 2z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2y^2 - 2z^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2 = z^2 \\ 4x^2 + y^2 + z^2 - 36 = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{as soluções do sistema } (2, \pm\sqrt{10}, \pm\sqrt{10}) \text{ e } (2, \pm\sqrt{10}, \mp\sqrt{10}) \text{ são}$$

os candidatos a máximos e mínimos de f para $4x^2 + y^2 + z^2 = 36$ e $x = 2$.

b_2) Para $x < 2$ consideraremos apenas os pontos $(-3, 0, 0)$, $(-1, 4, 4)$ e $(-1, -4, -4)$ do item (a).

De (b_1) e (b_2), como $f(-3, 0, 0) = -9$, $f(-1, \pm 4, \pm 4) = -21$, $f(2, \pm\sqrt{10}, \pm\sqrt{10}) = 6$ e $f(2, \pm\sqrt{10}, \mp\sqrt{10}) = 26$, temos que o valor máximo de f sobre R é 26 e o valor mínimo é -21.

Questão 3. Dada a função $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$:

a) (1,5) classifique os pontos críticos de f;

b) (1,5) determine os valores máximo e mínimo de f no compacto

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy + x + y = 0,\ -\frac{1}{2} \leq x \leq 1\}.$$

a) f é de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$ e $\nabla f(x,y) = (3x^2-3y, 3y^2-3x)$.

$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \Rightarrow y = y^4 \Rightarrow y(1-y^3) = 0 \Rightarrow y = 0$ ou $y = 1$. Logo, $(0,0)$ e $(1,1)$ são os pontos críticos.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -3$

$H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0 \Rightarrow \boxed{(0,0) \text{ é ponto de sela}}$

$H(1,1) = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 27 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 6 > 0 \Rightarrow \boxed{(1,1) \text{ é mínimo local}}$

b) f contínua em R compacto $\Rightarrow$ f tem máx e mín absolutos em R, pelo T. Weierstrass.

$R = B \cup \{(-1/2, 1), (1, -1/2)\}$, em que $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy + x + y = 0, -1/2 < x < 1\}$.

Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1/2 < x < 1\}$. Então A é aberto, f é diferenciável em A, $B = \{(x,y) \in A : g(x,y) = 0\}$, onde $g(x,y) = xy + x + y$ é de classe C^1 em A e $\nabla g(x,y) = (y+1, x+1) \neq \vec{0}$ em B (pois $\nabla g(x,y) = \vec{0} \iff (x,y) = (-1,-1) \notin B$).

Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, se (x,y) é extremo local de f em B então $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$, o que implica que $\nabla f(x,y)$ e $\nabla g(x,y)$ são l.d.

Logo, $\begin{cases} 0 = \begin{vmatrix} x^2 - y & y^2 - x \\ y+1 & x+1 \end{vmatrix} = x^3 + x^2 - \cancel{xy} - y - y^3 - y^2 + \cancel{xy} + x = (x-y)(x^2+xy+y^2+x+y+1) \\ xy + x + y = 0,\ -\frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$

$\overset{xy+x+y=0}{=} (x-y)\underbrace{(x^2+y^2+1)}_{>0}$

Portanto, $\begin{cases} x = y \\ xy + x + y = 0 \\ -1/2 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $\cancel{x = -2}$

$(0,0)$ é o único candidato a extremo de f em B.

Candidatos a extremo de f em R:

$(0,0)$, $(-1/2, 1)$ e $(1, -1/2)$

$f(0,0) = 0$, $f(-1/2, 1) = f(1, -1/2) = \frac{19}{8}$

$\uparrow$ mínimo absoluto $\qquad$ $\uparrow$ máximo absoluto

Questão 3. Dada a função $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$:

a) (1,5) classifique os pontos críticos de f;

b) (1,5) determine os valores máximo e mínimo de f no compacto

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy - x - y = 0,\ -1 \le x \le \frac{1}{2}\}.$$

a) f é de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$ e $\nabla f(x,y) = (3x^2+3y, 3y^2+3x)$

$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2 \\ x = -y^2 \end{cases} \Rightarrow y = -y^4 \Rightarrow y(1+y^3) = 0 \Rightarrow y = 0$ ou $y = -1$ logo, $(0,0)$ e $(-1,-1)$ são os pontos críticos.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 3$

$H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0 \Rightarrow$ $\boxed{(0,0) \text{ é ponto de sela}}$

$H(-1,-1) = \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 27 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = -6 < 0 \Rightarrow$ $\boxed{(-1,-1) \text{ é máximo local}}$

b) f contínua em R compacto $\Rightarrow f$ tem máx e mín absolutos pelo T. de Weierstrass

$R = B \cup \{(-1, 1/2), (1/2, -1)\}$, em que $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy - x - y = 0$ e $-1 < x < 1/2\}$

Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1/2\}$. Então A é aberto, f é diferenciável em A,

$B = \{(x,y) \in A : g(x,y) = 0\}$, onde $g(x,y) = xy - x - y$ é de classe C^1 em A e

$\nabla g(x,y) = (y-1, x-1) \neq \vec{0}$ em B (pois $\nabla g(x,y) = \vec{0} \Leftrightarrow (x,y) = (1,1) \notin B$.)

Pelo método dos Multiplicadores de Lagrange, se (x,y) é extremo local de f em B então $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$, o que implica que $\nabla f(x,y)$ e $\nabla g(x,y)$ são l.d.

Logo, $\begin{cases} 0 = \begin{vmatrix} x^2+y & y^2+x \\ y-1 & x-1 \end{vmatrix} = x^3 - x^2 + xy - y - y^3 - xy + y^2 + x = (x-y)(x^2+xy+y^2-x-y+1) \\ xy - x - y = 0,\ -1 < x < \frac{1}{2} \end{cases}$

$\underset{xy-x-y=0}{=} (x-y)\underbrace{(x^2+y^2+1)}_{>0}$

Portanto, $\begin{cases} x = y \\ xy - x - y = 0 \\ -1 < x < 1/2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $\cancel{x = 2}$ $(0,0)$ é o único candidato a extremo de f em B

Candidatos a extremo de f em R:

$(0,0)$, $(-1, 1/2)$, $(1/2, -1)$

$f(0,0) = 0$ $\quad f(-1, 1/2) = f(1/2, -1) = -\frac{19}{8}$

$\uparrow$ máximo absoluto $\qquad \uparrow$ mínimo absoluto