Questão 1 - A

Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$(x,y,z) \longmapsto x^2+y^2+y^4-z^2-2$

Então $f \in C^1$ ($\therefore$ derivável) e $f \circ \Gamma = \text{cte.} = 0$ (pois $S = f^{-1}(0)$ e $\text{Im}\,\Gamma \subset S$); portanto, pela regra da cadeia, conclui-se que

(i) $\langle \nabla f(\Gamma(2)), \Gamma'(2) \rangle = 0$

Por outro lado, 2 é pto. de máximo de $g \circ \Gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; como esta função é derivável (pois $g \in C^1$ e Γ derivável) segue-se do teorema de Fermat que $0 = (g\circ\Gamma)'(2) \underset{\text{regra da cadeia}}{=} \langle \nabla g(\Gamma(2)), \Gamma'(2) \rangle$ (ii)

Como $(\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$ $\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y+4y^3, -2z)$

$\therefore \nabla f(\underbrace{1,1,1}_{\text{"}\Gamma(2)}) = (2,6,-2)$, segue-se

$$\nabla f(1,1,1) \wedge \nabla g(1,1,1) = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ i & j & k \end{vmatrix} = (8,-6,-10);$$

por (i) e (ii), e por ser $\Gamma'(2) \neq 0$, $(8,-6,-10)$ é múltiplo de $\Gamma'(2)$. Portanto, $\{(1,1,1)+\lambda(8,-6,-10) / \lambda \in \mathbb{R}\}$

2. **(2,0)** Seja $f(x,y) = 3ye^x - e^{3x} - y^3$.

A

(a) Encontre os ponto críticos de f e classifique-os.

(b) Existe $(x_0, y_0) \in R^2$ que seja ponto de máximo ou de mínimo de f em $\mathbb{R}^2$? **JUSTIFIQUE!**

a) $D_f = \mathbb{R}^2$; $(x,y) \in D_f$ é ponto crítico $\Longleftrightarrow$

$\nabla f(x,y) = (0,0)$.

$$(\nabla f)(x,y) = \left(3ye^x - 3e^{3x},\ 3e^x - 3y^2\right)$$

$\therefore$ Os pontos críticos são as soluções do sistema:

$$\begin{cases} 3ye^x - 3e^{3x} = 0 & \text{I} \\ 3e^x - 3y^2 = 0 & \text{II} \end{cases}$$

II $\Longleftrightarrow e^x = y^2$. Substituindo em I:

$3y^3 - 3y^6 = 0 \Longleftrightarrow 3y^3(1-y^3) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou} \\ y = 1 \end{cases}$

Se $y = 0$, de II segue que $e^x = 0$, impossível.

Se $y = 1$, de II segue que $e^x = 1 \Longleftrightarrow x = 0$.

$\therefore (0,1)$ é o único ponto crítico de f.

Agora, temos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \left(3ye^x - 9e^{3x}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = 3 - 9 = -6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \left(3e^x\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1) = 3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -6y \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) = -6$$

$$\therefore \quad H_f(0,1) = \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 36 - 9 = 27 > 0$$

Como f é de classe $\mathcal{C}^2$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) < 0$, segue que $(0,1)$ é ponto de máximo local.

b) Suponhamos que (x_0, y_0) seja extremante (máximo ou mínimo) global.

Sendo f de classe $\mathcal{C}^1$, devemos ter então $(\nabla f)(x_0, y_0) = (0,0)$. Do ítem b), segue então que $(x_0, y_0) = (0,1)$.

Entretanto, temos:

$f(0,1) = 3 - 1 - 1 = 1$,

$f(0,0) = -1$ e $f(0,-3) = -9 - 1 + 27 = +17$

Portanto $(0,1)$ não é extremante e então não existem extremantes globais.

Alternativamente, observemos que

$$f(0,y) = 3y - 1 - y^3.$$

Portanto $\lim\limits_{y \to \pm\infty} f(0,y) = \mp\infty$.

Segue que não existem extremantes globais.

Q3 - USANDO LAGRANGE

Seja $K = \{(x,y,z): x+y+z=1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$. Seja $f(x,y,z) = x^p + y^p + z^p$. Como K é compacto e f é contínua em K, pelo teorema de Weierstrass, f assume máximo e mínimo em K. Seja (x,y,z) um ponto de máximo ou de mínimo de f em K

1º caso: Se $x>0$, $y>0$ e $z>0$, pelo método de Lagrange, (x,y,z) é solução de:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) // (1,1,1) \\ x+y+z=1 \\ x>0, y>0, z>0 \end{cases}$$

e temos $(px^{p-1}, py^{p-1}, pz^{p-1})$ paralelo a $(1,1,1)$. Logo $px^{p-1} = py^{p-1} = pz^{p-1}$ e como $x+y+z=1$, temos $x=y=z=\frac{1}{3}$

2º caso: Se $z=0$, $x>0$ e $y>0$, então (x,y) é ponto de máximo ou de mínimo de $h(x,y) = f(x,y,0) = x^p + y^p$ em $S = \{(x,y): x+y=1, x>0, y>0\}$. Pelo método de Lagrange, temos $\nabla h(x,y) = (px^{p-1}, py^{p-1})$ paralelo a $(1,1)$ e, portanto $x = y = \frac{1}{2}$

De modo análogo:

3º caso: Se $x=0$, $y>0$ e $z>0$, então $y=z=\frac{1}{2}$

4º caso: Se $y=0$, $x>0$ e $z>0$, então $x=z=\frac{1}{2}$

Os únicos candidatos a ponto de máximo ou de mínimo de f em K são $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$, $(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$ e os pontos não incluídos nos quatro casos, que são: $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.

Calculando f nesses pontos temos:

$f(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = 3\,\frac{1}{3^p} = 3^{1-p}$

$f(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0) = f(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}) = 2\frac{1}{2^p} = 2^{1-p} < 3^{1-p}$ pois $1-p>0$

$f(1,0,0) = f(0,1,0) = f(0,0,1) = 1 < 2^{1-p} < 3^{1-p}$ pois $1-p>0$

Assim, para todo (x,y,z) em K, temos $f(x,y,z) \leq 3^{1-p}$
Logo $x^p + y^p + z^p \leq 3^{1-p}$ para todo (x,y,z) com $x+y+z=1$ $x>0$, $y>0$, $z>0$.

O valor mínimo de f em K é 1, que é assumido apenas nos pontos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$. Se $x+y+z=1$, $x>0$, $y>0$ e $z>0$ então (x,y,z) é um ponto de K e (x,y,z) não é um dos pontos de K onde f assume o valor mínimo 1. Logo, se $x+y+z=1$ $x>0$, $y>0$ e $z>0$, temos $x^p+y^p+z^p > 1$

Observação: No 1º caso, o método de Lagrange foi usado na região $R = \{(x,y,z) \in A : g(x,y,z) = 2\}$, sendo $g(x,y,z) = x+y+z$ e $A = \{(x,y,z) : x>0, y>0, z>0\}$. As hipóteses estão satisfeitas pois A é aberto e as funções g e f são de classe C^1 em R.

No 2º caso, o método de Lagrange foi usado na região $S = \{(x,y) \in U : j(x,y) = 2\}$, sendo $j(x,y) = x+y$ e $U = \{(x,y) : x>0, y>0\}$. As hipóteses estão satisfeitas pois U é aberto de $\mathbb{R}^2$ e as funções j e h são de classe C^1 em S