A

Questão 1: (2,5 pontos) A reta r é normal ao cone de equação $(2x-1)^2 + y^2 = z^2$ num ponto P e é, também, normal ao elipsoide de equação $(x-3)^2 + y^2 + \frac{(z+3)^2}{2} = \frac{3}{2}$ no ponto $Q = (4, 0, -4)$.

(a) Determine uma equação da reta r.

(b) Determine as coordenadas do ponto P.

a) Seja $F(x,y,z) = (x-3)^2 + y^2 + \frac{(z+3)^2}{2} - \frac{3}{2}$

$\nabla F(x,y,z) = (2(x-3), 2y, (z+3)) \Rightarrow \nabla F(4,0,-4) = (2,0,-1)$

A reta r tem equação

$$(4,0,-4) + \lambda(2,0,-1),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

b) Seja $G(x,y,z) = (2x-1)^2 + y^2 - z^2$.

$\nabla G(x,y,z) = (4(2x-1), 2y, -2z)$

O ponto P é da forma $(4+2\lambda, 0, -4-\lambda)$

e $\nabla G(P)$ é paralelo ao reta $(2,0,-1)$.

$\nabla G(4+2\lambda, 0, -4-\lambda) = (4(7+4\lambda), 0, 8+2\lambda)$

$= (28+16\lambda, 0, 8+2\lambda)$

$\nabla G(P) \parallel (2,0,-1) \Leftrightarrow 28+16\lambda = -2(8+2\lambda)$

$\Leftrightarrow 44 = -20\lambda \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{-11}{5}}$

O ponto P é

$$P = \left(-2/5,\ 0,\ -9/5\right)$$

B

Questão 1: (2,5 pontos) A reta r é normal ao cone de equação $x^2 + (2y-1)^2 = z^2$ num ponto P e é, também, normal ao elipsoide de equação $x^2 + (y-3)^2 + \frac{(z+3)^2}{2} = \frac{3}{2}$ no ponto $Q = (0, 4, -4)$.

(a) Determine uma equação da reta r.

(b) Determine as coordenadas do ponto P.

a) Seja $H(x,y,z) = x^2 + (y-3)^2 + \frac{(z+3)^2}{2} - \frac{3}{2}$.

$\nabla H(x,y,z) = (2x, 2(y-3), z+3) \Rightarrow \nabla H(0,4,-4) = (0,2,-1)$

A reta r tem equação:

$(0,4,-4) + \lambda(0,2,-1), \lambda \in \mathbb{R}$

b) Seja $L(x,y,z) = x^2 + (2y-1)^2 - z^2$

$\nabla L(x,y,z) = (2x, 4(2y-1), -2z)$

O ponto P é da forma $(0, 4+2\lambda, -4-\lambda)$ (*)

e $\nabla L(P)$ é paralelo ao vetor $(0,2,-1)$

$\nabla L(0, 4+2\lambda, -4-\lambda) = (0, 4(7+4\lambda), 8+2\lambda)$

$= (0, 28+16\lambda, 8+2\lambda)$

$\nabla L(P) \parallel (0,2,-1) \Leftrightarrow 28+16\lambda = -2(8+2\lambda)$

$\Leftrightarrow 44 = -20\lambda \Leftrightarrow \lambda = -\frac{11}{5}$

substituindo em (*) temos:

$P = (0, -2/5, -9/5)$

A

Questão 1: (2,5 pontos) A reta r é normal ao cone de equação $(2x-1)^2+y^2=z^2$ num ponto P e é, também, normal ao elipsoide de equação $(x-3)^2+y^2+\dfrac{(z+3)^2}{2}=\dfrac{3}{2}$ no ponto $Q=(4,0,-4)$.

(a) Determine uma equação da reta r.

(b) Determine as coordenadas do ponto P.

a) Seja $F(x,y,z)=(x-3)^2+y^2+\frac{(z+3)^2}{2}-\frac{3}{2}$

$\nabla F(x,y,z)=(2(x-3),2y,(z+3)) \Rightarrow \nabla F(4,0,-4)=(2,0,-1)$

A reta r tem equação

$$(4,0,-4)+\lambda(2,0,-1),\ \lambda\in\mathbb{R}$$

b) Seja $G(x,y,z)=(2x-1)^2+y^2-z^2$.

$\nabla G(x,y,z)=(4(2x-1),2y,-2z)$

O ponto P é da forma $(4+2\lambda,0,-4-\lambda)$

e $\nabla G(P)$ é paralelo ao vetor $(2,0,-1)$.

$\nabla G(4+2\lambda,0,-4-\lambda)=(4(7+4\lambda),0,8+2\lambda)$

$=(28+16\lambda,0,8+2\lambda)$

$\nabla G(P)\ //\ (2,0,-1) \Leftrightarrow 28+16\lambda=-2(8+2\lambda)$

$\Leftrightarrow 44=-20\lambda \Leftrightarrow \boxed{\lambda=\frac{-11}{5}}$

O ponto P é

$$P=\left(-\tfrac{2}{5},\ 0,\ -\tfrac{9}{5}\right)$$

B

Questão 1: (2,5 pontos) A reta r é normal ao cone de equação $x^2 + (2y-1)^2 = z^2$ num ponto P e é, também, normal ao elipsoide de equação $x^2 + (y-3)^2 + \dfrac{(z+3)^2}{2} = \dfrac{3}{2}$ no ponto $Q = (0, 4, -4)$.

(a) Determine uma equação da reta r.

(b) Determine as coordenadas do ponto P.

a) Seja $H(x,y,z) = x^2 + (y-3)^2 + \dfrac{(z+3)^2}{2} - \dfrac{3}{2}$.

$\nabla H(x,y,z) = (2x, 2(y-3), z+3) \Rightarrow \nabla H(0,4,-4) = (0,2,-1)$

A reta r tem equação:

$(0,4,-4) + \lambda(0,2,-1), \lambda \in \mathbb{R}$

b) Seja $L(x,y,z) = x^2 + (2y-1)^2 - z^2$

$\nabla L(x,y,z) = (2x, 4(2y-1), -2z)$

O ponto P é da forma $(0, 4+2\lambda, -4-\lambda)$ (*)

e $\nabla L(P)$ é paralelo ao vetor $(0,2,-1)$

$\nabla L(0, 4+2\lambda, -4-\lambda) = (0, 4(7+4\lambda), 8+2\lambda)$

$= (0, 28+16\lambda, 8+2\lambda)$

$\nabla L(P) \,//\, (0,2,-1) \Leftrightarrow 28+16\lambda = -2(8+2\lambda)$

$\Leftrightarrow 44 = -20\lambda \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{11}{5}$

Substituindo em (*) temos:

$P = (0, -2/5, -9/5)$

Questão 2: (2,5 pontos) Seja $f(x,y) = xe^{by^2+by+\frac{a}{x}}$ onde a e b são números reais não nulos. Encontre os pontos críticos de f e classifique-os em função de a e b.

Pontos críticos: $\nabla f(x,y) = \vec{0}$

$$f_x = e^{by^2+by+\frac{a}{x}} + x\cdot e^{by^2+by+\frac{a}{x}}\cdot\left(\frac{-a}{x^2}\right)$$

$$f_x = \left(1-\frac{a}{x}\right)e^{by^2+by+\frac{a}{x}} = 0 \Leftrightarrow x = a$$

$$f_y = xe^{by^2+by+\frac{a}{x}}\cdot(2by+b) = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } y = -\frac{1}{2}.$$

Único ponto crítico: $\left(a,-\frac{1}{2}\right)$.

$$f_{xx} = \left(\frac{a}{x^2}\right)\cdot e^{by^2+by+\frac{a}{x}} + \left(1-\frac{a}{x}\right)\cdot\left(-\frac{a}{x^2}\right)e^{by^2+by+\frac{a}{x}}$$

$$f_{xx} = \frac{a^2}{x^3}e^{by^2+by+\frac{a}{x}} \qquad \boxed{f_{xx}\left(a,-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{a}e^{\frac{b}{4}+\frac{b}{2}+1}}$$

$$f_{xy} = \left(1-\frac{a}{x}\right)\cdot(2by+b)e^{by^2+by+\frac{a}{x}} \qquad \boxed{f_{xy}\left(a,-\frac{1}{2}\right) = 0}$$

$$f_{yy} = 2bxe^{by^2+by+\frac{a}{x}} + x(2by+b)^2e^{by^2+by+\frac{a}{x}} \qquad \boxed{f_{yy}\left(a,-\frac{1}{2}\right) = 2abe^{\frac{3b}{4}+1}}$$

$$H\left(a,-\frac{1}{2}\right) = 2b\left(e^{\frac{3b}{4}+1}\right)^2$$

Temos:

$b<0 \Rightarrow H\left(a,-\frac{1}{2}\right)<0 \Rightarrow \left(a,-\frac{1}{2}\right)$ é pt de sela.

$b>0$ e $a>0 \Rightarrow H\left(a,-\frac{1}{2}\right)>0$ e $f_{xx}\left(a,-\frac{1}{2}\right)>0 \Rightarrow \left(a,-\frac{1}{2}\right)$ é mín. local

$b>0$ e $a<0 \Rightarrow H\left(a,-\frac{1}{2}\right)>0$ e $f_{xx}\left(a,-\frac{1}{2}\right)<0 \Rightarrow \left(a,-\frac{1}{2}\right)$ é máx. local

Questão 2: (2,5 pontos) Seja $f(x,y) = ye^{bx^2+x+\frac{a}{y}}$ onde a e b são números reais não nulos. Encontre os pontos críticos de f e classifique-os em função de a e b.

Pontos críticos: $\nabla f(x,y) = \vec{0}$

$$f_x = y(2bx+1)e^{bx^2+x+\frac{a}{y}} = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x = \frac{-1}{2b}$$

$$f_y = e^{bx^2+x+\frac{a}{y}} + y \cdot e^{bx^2+x+\frac{a}{y}} \cdot \left(-\frac{a}{y^2}\right)$$

$$f_y = \left(1 - \frac{a}{y}\right)e^{bx^2+x+\frac{a}{y}} = 0 \Leftrightarrow y = a.$$

Único ponto crítico: $\left(\frac{-1}{2b}, a\right)$.

$$f_{xx} = y \cdot 2b \cdot e^{bx^2+x+\frac{a}{y}} + y(2bx+1)^2 e^{bx^2+x+\frac{a}{y}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{xx}\left(\frac{-1}{2b}, a\right) = 2abe^{\frac{1}{4b}-\frac{1}{2b}+1}}$$

$$f_{xy} = \left(1-\frac{a}{y}\right)(2bx+1)e^{bx^2+x+\frac{a}{y}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{xy}\left(\frac{-1}{2b}, a\right) = 0}$$

$$f_{yy} = \frac{a}{y^2}e^{bx^2+x+\frac{a}{y}} + \left(+1-\frac{a}{y}\right)\cdot\left(-\frac{a}{y^2}\right)e^{bx^2+\cancel{x}+\frac{a}{y}}$$

$$f_{yy} = \frac{a^2}{y^3}e^{\left(bx^2+x+\frac{a}{y}\right)} \Rightarrow \boxed{f_{yy}\left(\frac{-1}{2b}, a\right) = \frac{1}{a}e^{1-\frac{1}{4b}}}$$

$$H\left(\frac{-1}{2b}, a\right) = 2b\left(e^{1-\frac{1}{4b}}\right)^2$$

Temos

- $b < 0 \Rightarrow H\left(\frac{-1}{2b}, a\right) < 0 \Rightarrow \left(\frac{-1}{2b}, a\right)$ é pt de sela
- $b > 0$ e $a > 0 \Rightarrow H\left(\frac{-1}{2b}, a\right) > 0$ e $f_{xx}\left(\frac{-1}{2b}, a\right) > 0 \Rightarrow \left(\frac{-1}{2b}, a\right)$ é pt de mínimo local
- $b > 0$ e $a < 0 \Rightarrow H\left(\frac{-1}{2b}, a\right) > 0$ e $f_{xx}\left(\frac{-1}{2b}, a\right) < 0 \Rightarrow \left(\frac{-1}{2b}, a\right)$ é ponto de máximo local.

Questão 3: Justifique a existência e determine os pontos de máximo e mínimo de $f(x,y,z) = x^2 + z^2 - xz + 3y$ em $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 25\}$

R é limitado pois é uma esfera; R é fechado pois a fronteira de R é $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 25\}$ que está contido em R. Pelo Teorema de Weierstrass, a função contínua f assume máximo e mínimo em R. Esses valores não são assumidos em pontos do interior de R, pois $\nabla f(x,y,z) = (2x-z, 3, 2z-x)$ que é diferente do vetor nulo em todos os pontos (x,y,z). Assim, os pontos de máximo e de mínimo de f em R estão na fronteira de R, que é uma superfície de nível da função $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. As funções f e g são de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e $\nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$ é não nulo se $x^2+y^2+z^2 = 25$. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, temos que se (x,y,z) é um dos pontos de máximo ou de mínimo que queremos encontrar, então existe λ real tal que

$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$ e (x,y,z) está na fronteira de R. Portanto:

$$\begin{cases} 2x - z = 2\lambda x & (1) \\ 3 = 2\lambda y & (2) \\ 2z - x = 2\lambda z & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 25 & (4) \end{cases}$$

De (1) e (3) decorre que $2x - z - 2z + x = 2\lambda x - 2\lambda z$ e portanto $3(x-z) = 2\lambda(x-z)$. Logo $x = z$ ou $\lambda = 3/2$

1º caso: $\lambda = \frac{3}{2}$

$(2) \Rightarrow y = 1$

$(1) \Rightarrow 2x - z = 3x \Rightarrow x = -z$ e, com isso,

$(4) \Rightarrow 2x^2 + 1 = 25 \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$ ou $x = -2\sqrt{3}$

No 1º caso, os pontos são $P_1 = (2\sqrt{3}, 1, -2\sqrt{3})$, $P_2 = (-2\sqrt{3}, 1, 2\sqrt{3})$

2º caso: $x = z$

$(1) \Rightarrow x = 2\lambda x \Rightarrow x = 0$ ou $\lambda = \frac{1}{2}$

Se $x = 0$ (e portanto $z = 0$), decorre de (4) que $y = 5$ ou $y = -5$

Se $\lambda = \frac{1}{2}$, decorre de (2) que $y = 3$ e, como $x = z$,

temos, por (4) que $x = 2\sqrt{2}$ ou $x = -2\sqrt{2}$

No 2º caso, os pontos são: $P_3 = (0, 5, 0)$, $P_4 = (0, -5, 0)$,

$P_5 = (2\sqrt{2}, 3, 2\sqrt{2})$, $P_6 = (-2\sqrt{2}, 3, -2\sqrt{2})$

$f(P_5) = 8 + 8 - 8 + 9 = 17 = f(P_6)$

$f(P_3) = 15$ $\qquad$ $f(P_4) = -15$

$f(P_1) = 12 + 12 + 12 + 3 = 39 = f(P_2)$

$\therefore$ P_4 é ponto de mínimo e os pontos P_1 e P_2 são pontos de máximo

Questão 3: (2,5 pontos) Justifique a existência e determine os pontos de máximo e mínimo de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - xy + 3z$ em $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 25\}$.

R é limitado pois é uma esfera; R é fechado pois a fronteira de R é $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 25\}$, que está contido em R. Pelo Teorema de Weierstrass, a função contínua f assume máximo e mínimo em R. Como $\nabla f(x,y,z) = (2x-y, 2y-x, 3) \neq (0,0,0)$, f não assume máximo nem mínimo no interior de R. Assim, os pontos de máximo e de mínimo de f em R estão na fronteira de R, que é uma superfície de nível da função $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Como f e g são de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, se (x,y,z) é um desses pontos, usando o método de Lagrange, temos que $\nabla f(x,y,z)$ é paralelo a $\nabla g(x,y,z) = (2x, 2y,$ Como (x,y,z) está na fronteira de R, temos $x^2+y^2+z^2 = 2$ e portanto os pontos de máximo e mínimo de f em R verificam a

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x-y & 2y-x & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{0} \\ x^2+y^2+z^2 = 25 \end{cases}$$

que equivale a

$$\begin{cases} 2yz - xz - 3y = 0 & (1) \\ 2xz - yz - 3x = 0 & (2) \\ 2xy - y^2 - 2yx + x^2 = x^2 - y^2 = 0 & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 25 & (4) \end{cases}$$

Por (3), temos que $x = y$ ou $x = -y$

1º caso: $x = y$

$(2) \Rightarrow xz - 3x = x(z-3) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $z = 3$

Se $x=0$ (e portanto $y=0$) temos, por (4), que $z=5$ ou $z=-5$

Se $z=3$, como $x=y$, temos, por (4), que $x=2\sqrt{2}$ ou $x=-2$

No 1º caso, os pontos são $P_1=(0,0,5)$ e $P_2=(0,0,-5)$ se $x=$

$P_3=(2\sqrt{2},2\sqrt{2},3)$ e $P_4=(-2\sqrt{2},-2\sqrt{2},3)$ se $z=3$

2º caso: $x=-y$

(2) $\Rightarrow 3xz-3x=3x(z-1)=0 \Rightarrow x=0$ ou $z=1$

O caso $x=0=-y$ já foi estudado no 1º caso

Se $z=1$, como $x=-y$, temos, por (4) que $x=2\sqrt{3}$ ou $x=-2$

No 2º caso, os pontos são $P_5=(2\sqrt{3},-2\sqrt{3},1)$ e $P_6=(-2\sqrt{3},2\sqrt{3},1)$

$f(P_1)=15$, $f(P_2)=-15$

$f(P_3)=f(P_4)=8+8-8+9=17$

$f(P_5)=f(P_6)=12+12+12+3=39$

Resposta: $P_2=(0,0,-5)$ é o ponto de mínimo

$P_5=(2\sqrt{3},-2\sqrt{3},1)$ e $P_6=(-2\sqrt{3},2\sqrt{3},1)$ são os pontos de máximo

Questão 4: Seja $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-z)^2 + (y-z)^2 = 8 \text{ e } x+y+z = 2\}$. Sabendo que C é um conjunto fechado e limitado, determine os pontos de C que estão mais próximos de $(0,0,0)$ e os que estão mais distantes de (0,0,0).

`Solução`: Queremos achar os pontos de máximo e de mínimo da função $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ em C. Como C é compacto e f é contínua, segue do Teorema de Weierstrass que esses pontos existem.

Definindo $g(x,y,z) = \frac{1}{2}[(x-z)^2 + (y-z)^2] - 4$ e $h(x,y,z) = x+y+z-2$, temos $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = h(x,y,z) = 0\}$. Estamos em condições de aplicar o método dos multiplicadores de Lagrange, pois f é diferenciável e g e h são de classe C^1. Temos $\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$, $\nabla g(x,y,z) = (x-z, y-z, 2z-x-y)$, $\nabla h(x,y,z) = (1,1,1)$ e $\nabla g(x,y,z) \wedge \nabla h(x,y,z) = (x+2y-3z, -2x-y+3z, x-y)$. Se $\nabla g(x,y,z) \wedge \nabla h(x,y,z) = (0,0,0)$, então $x = y = z$ e portanto $(x,y,z) \notin C$. Isto é, ∇g e ∇h são linearmente independentes em todos os pontos de C. Segue então que, nos pontos de máximo ou de mínimo de f em C, ∇f é combinação linear de ∇g e ∇h. Assim, os pontos de máximo ou de mínimo de f em C necessariamente serão pontos (x,y,z) para os quais existem λ e μ tais que $\frac{1}{2}\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) + \mu \nabla h(x,y,z)$. Queremos portanto resolver o sistema

$$\begin{cases} x = \lambda(x-z) + \mu & (1) \\ y = \lambda(y-z) + \mu & (2) \\ z = \lambda(2z-x-y) + \mu & (3) \\ x+y+z = 2 & (4) \\ (z-x)^2 + (z-y)^2 = 8 & (5). \end{cases}$$

Subtraindo (2) de (1) e (3) de (2), vem

$$\begin{cases} x-y = \lambda(x-y) & (6) \\ y-z = \lambda(x+2y-3z) & (7). \end{cases}$$

A equação (6) implica que $\lambda = 1$ ou que $x = y$.

Se $\lambda = 1$, segue de (7) que $x+y-2z = 0$. Subtraindo esta equação de (4), vem que $z = 2/3$. Daí segue de (4) que $y = 4/3 - x$. Substituindo estas igualdades em (5), vem que $2(x-2/3)^2 = 8$, logo $x = 8/3$ ou $x = -4/3$. Obtemos assim dois candidatos a pontos extremais: $(8/3, -4/3, 2/3)$ e $(-4/3, 8/3, 2/3)$.

Se $x = y$, segue de (4) e (5) que $(z-x)^2 = 4$ e $z = 2-2x$. Logo, $(2-3x)^2 = 4$ e, portanto, $x = 0$ ou $x = 4/3$. Obtemos assim mais dois candidatos a pontos extremais: $(0,0,2)$ e $(4/3, 4/3, -2/3)$.

Para descobrir quais são os pontos de máximo e os pontos de mínimo, basta calcular o valor de f nos quatro candidatos encontrados:

$$f(8/3, -4/3, 2/3) = \frac{84}{9}, \ f(-4/3, 8/3, 2/3) = \frac{84}{9}, \ f(0,0,2) = 4, \ f(4/3, 4/3, -2/3) = 4.$$

Concluímos então que $(0,0,2)$ e $(4/3, 4/3, -2/3)$ são pontos de mínimo de f em C e que $(8/3, -4/3, 2/3)$ e $(-4/3, 8/3, 2/3)$ são pontos de máximo. Assim, os pontos de C mais próximos da origem são $(0,0,2)$ e $(4/3, 4/3, -2/3)$ e ficam à distância 2 da origem. Os pontos mais distantes são $(8/3, -4/3, 2/3)$ e $(-4/3, 8/3, 2/3)$ e ficam à distância $\sqrt{84}/3$.

Questão 4: Seja $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (y-x)^2 + (z-x)^2 = 8 \text{ e } x+y+z = 2\}$. Sabendo que C é um conjunto fechado e limitado, determine os pontos de C que estão mais próximos de $(0,0,0)$ e os que estão mais distantes de (0,0,0).

`Solução`: Queremos achar os pontos de máximo e de mínimo da função $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ em C. Como C é compacto e f é contínua, segue do Teorema de Weierstrass que esses pontos existem.

Definindo $g(x,y,z) = \dfrac{1}{2}[(y-x)^2 + (z-x)^2] - 4$ e $h(x,y,z) = x+y+z-2$, temos $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = h(x,y,z) = 0\}$. Estamos em condições de aplicar o método dos multiplicadores de Lagrange, pois f é diferenciável e g e h são de classe C^1. Os pontos de máximo ou de mínimo de f em C necessariamente serão pontos (x,y,z) onde ∇f, ∇g e ∇h são coplanares (isto inclui os pontos onde ∇g e ∇h são linearmente dependentes e os pontos onde eles são linearmente independentes e ∇f é combinação linear deles).

Temos $\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$, $\nabla g(x,y,z) = (2x-y-z, y-x, z-x)$, $\nabla h(x,y,z) = (1,1,1)$. Metade do produto misto $\nabla f \wedge \nabla g \cdot \nabla h$ calculado em (x,y,z) é igual a:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x-y-z & y-x & z-x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x(y-x) - y(2x-y-z) - x(z-x) + z(2x-y-z) + y(z-x) - z(y-x) =$$

$$(y-x)(z-x) + (x-z)(y-x) + (z-y)(2x-y-z) = (z-y)(2x-y-z).$$

Concluímos então que ∇f, ∇g e ∇h são coplanares se e somente se $z = y$ ou $2x - y - z = 0$.

Os pontos extremais de f em C serão portanto soluções de um dos dois sistemas seguintes:

$$\begin{cases} z = y & (1) \\ x+y+z = 2 & (2) \\ (y-x)^2 + (z-x)^2 = 8 & (3) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2x-y-z = 0 & (4) \\ x+y+z = 2 & (2) \\ (y-x)^2 + (z-x)^2 = 8 & (3)\,. \end{cases}$$

Substituindo $z = y$ e $x = 2 - 2y$ em (3), vem $(3y-2)^2 = 4$ e, portanto, $y = 0$ ou $y = 4/3$. Obtemos assim as duas soluções do primeiro dos dois sistemas acima: $(2,0,0)$ e $(-2/3, 4/3, 4/3)$.

Somando (4) e (2), obtemos $x = 2/3$. Substituindo $x = 2/3$ em (2), vem $z = 4/3 - y$. Substituindo estas duas igualdades em (3), vem $(y - 2/3)^2 = 4$ e, portanto, $y = 8/3$ ou $y = -4/3$. Obtemos assim as duas soluções do segundo dos dois sistemas acima: $(2/3, 8/3, -4/3)$ e $(2/3, -4/3, 8/3)$.

Para descobrir quais são os pontos de máximo e os pontos de mínimo, basta calcular o valor de f nos quatro candidatos encontrados:

$$f(2/3, -4/3, 8/3) = \frac{84}{9},\ f(2/3, 8/3, -4/3) = \frac{84}{9},\ f(2,0,0) = 4,\ f(-2/3, 4/3, 4/3) = 4.$$

Concluímos então que $(2,0,0)$ e $(-2/3, 4/3, 4/3)$ são pontos de mínimo de f e que $(2/3, -4/3, 8/3)$ e $(2/3, 8/3, -4/3)$ são pontos de máximo em C. Assim, os pontos de C mais próximos da origem são $(2,0,0)$ e $(-2/3, 4/3, 4/3)$ e ficam à distância 2 da origem. Os pontos mais distantes são $(2/3, -4/3, 8/3)$ e $(2/3, 8/3, -4/3)$ e ficam à distância $\sqrt{84}/3$.