1. (a) (1,5) Seja C a curva dada pela intersecção das superfícies

$$z = 3 - x^2 - 3y^2 \text{ e } z = 2x + y^2.$$

Encontre uma parametrização para C, ou seja, encontre um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ e $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ derivável cuja imagem é C.

(b) (1,5) Seja r a reta tangente à intersecção das superfícies

$$yx^3 + y^2x + 3zy - z^3x = 4 \quad \text{e} \quad xyz - y^2z + z^3 = 1$$

no ponto $(1, 1, 1)$.

A reta r passa pelo ponto $(5, -1, -1)$? Justifique.

(a)

$$\left.\begin{array}{l} z = 3 - x^2 - 3y^2 \\ z = 2x + y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 - x^2 - 3y^2 = 2x + y^2 \iff$$

$$x^2 + 2x + 4y^2 - 3 = 0 \iff$$

$$x^2 + 2x + 1 + 4y^2 - 4 = 0 \iff$$

$$(x+1)^2 + 4y^2 = 4 \iff$$

$$\frac{(x+1)^2}{4} + y^2 = 1$$

Note que $\frac{x+1}{2} = \cos t \Rightarrow x = 2\cos t - 1$

Logo podemos tomar: $x(t) = 2\cos t - 1$

$y(t) = \operatorname{sen} t$

$z(t) = 2x(t) + y^2(t) = 4\cos t - 2 + \operatorname{sen}^2 t$

Portanto, uma parametrização para C é:

$$\boxed{\gamma(t) = (2\cos t - 1, \operatorname{sen} t, 4\cos t - 2 + \operatorname{sen}^2 t), \quad t \in [0, 2\pi]}$$

b)

Seja r a reta tangente as superfícies.

$$yx^3 + y^2x + 3zy - z^3x = 4 \text{ e } xyz - y^2x + z^3 = 1, \text{ no ponto } (1,1,$$

Define: $g(x,y,z) = yx^3 + y^2x + 3zy - z^3x$ e

$h(x,y,z) = xyz - y^2z + z^3$

Logo: $\nabla g(x,y,z) = (3x^2y + y^2 - z^3,\ x^3 + 2yx + 3z,\ 3y - 3z^2x)$

$$\Rightarrow \nabla g(1,1,1) = (3,6,0) = 3(1,2,0)$$

$$\nabla h(x,y,z) = (yz,\ xz - 2yz,\ xy - y^2 + 3z^2)$$

$$\Rightarrow \nabla h(1,1,1) = (1,-1,3)$$

Seja $\vec{v}$ um vetor diretor de r. Sabemos que

$\vec{v} \perp \nabla g(1,1,1)$ e $\vec{v} \perp \nabla h(1,1,1)$.

Logo $\vec{v} \,/\!/\, \nabla g(1,1,1) \wedge \nabla h(1,1,1)$ e portanto $(1,2,0) \wedge \nabla h(1,1,1)$

é um vetor diretor de r.

$$(1,2,0) \wedge \nabla h(1,1,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - \vec{k} - 2\vec{k} - 3\vec{j} =$$

$$= (6,-3,-3) = 3(2,-1,-1).$$

Portanto uma equação de r é:

$$X = (1,1,1) + \lambda(2,-1,-1),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Fazendo $\lambda = 2$: $X = (1,1,1) + 2(2,-1,-1) = (5,-1,-1)$

Então r passa pelo ponto $(5,-1,-1)$.

1. (a) (1,5) Seja C a curva dada pela intersecção das superfícies

$$z = 3 - 3x^2 - y^2 \text{ e } z = x^2 + 2y.$$

Encontre uma parametrização para C, ou seja, encontre um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ e $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ derivável cuja imagem é C.

(b) (1,5) Seja r a reta tangente à intersecção das superfícies

$$xy^3 + x^2y + 3xz - yz^3 = 4 \quad \text{e} \quad xyz - x^2z + z^3 = 1$$

no ponto $(1, 1, 1)$.

A reta r passa ~~passa~~ pelo ponto $(-1, 5, -1)$? Justifique.

(a)

$$\left.\begin{array}{l} z = 3 - 3x^2 - y^2 \\ z = x^2 + 2y \end{array}\right\} \Rightarrow 3 - 3x^2 - y^2 = x^2 + 2y \iff$$

$$4x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0 \iff$$

$$4x^2 + y^2 + 2y + 1 - 4 = 0 \iff$$

$$4x^2 + (y+1)^2 = 4$$

$$x^2 + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

Note que $\frac{y+1}{2} = \operatorname{sen} t \Rightarrow y = 2\operatorname{sen} t - 1$

Logo podemos tomar:

$$x(t) = \cos t$$
$$y(t) = 2\operatorname{sen} t - 1$$
$$z(t) = x^2(t) + 2y(t) = \cos^2 t + 4\operatorname{sen} t - 2$$

Portanto, uma parametrização para C é:

$$\boxed{\gamma(t) = (\cos t, 2\operatorname{sen} t - 1, \cos^2 t + 4\operatorname{sen} t - 2), \quad t \in [0, 2\pi]}$$

b)

Seja r a reta tangente as superfícies

$xy^3 + x^2y + 3xz + yz^3 = 4$ e $xyz - x^2z + z^3 = 1$, no ponto $(1,1,1)$.

Define $g(x,y,z) = xy^3 + x^2y + 3xz - yz^3$ e

$h(x,y,z) = xyz - x^2z + z^3$

Logo $\nabla g(x,y,z) = (y^3 + 2xy + 3z,\ 3xy^2 + x^2 - z^3,\ 3x - 3yz^2)$

$\Rightarrow \nabla g(1,1,1) = (6,3,0) = 3(2,1,0)$

$\nabla h(x,y,z) = (yz - 2x,\ xz,\ xy - x^2 + 3z^2)$

$\Rightarrow \nabla h(1,1,1) = (-1,1,3)$

Seja $\vec{v}$ um vetor diretor de r. Sabemos que

$\vec{v} \perp \nabla g(1,1,1)$ e $\vec{v} \perp \nabla h(1,1,1)$

Logo $\vec{v} \parallel \nabla g(1,1,1) \wedge \nabla h(1,1,1)$ e portanto $(2,1,0) \wedge \nabla h(1,1,1)$ é um vetor diretor de r.

$$(2,1,0) \wedge \nabla h(1,1,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 2\vec{k} + \vec{k} - 6\vec{j} =$$
$$= (3,-6,3) =$$
$$= 3(1,-2,1)$$

Portanto uma equação de r é:

$$X = (1,1,1) + \lambda(1,-2,1),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Fazendo $\lambda = -2$: $X = (1,1,1) + (-2)(1,-2,1) = (-1,5,-1)$.

Então r passa pelo ponto $(-1,5,-1)$.

MAT 2454 - Cálculo II - POLI - 2009

Resolução da Questão 2 da P3

Resolução da Turma B; a da turma A é análoga.

(a) Tem-se, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x,y) = xy(1-x^2-4y^2) = xy - x^3y - 4xy^3$. Portanto, f é de classe C^∞ e seu gradiente e matriz hessiana são, respectivamente, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\nabla f(x,y) = (y - 3x^2y - 4y^3, x - x^3 - 12xy^2)$$
$$\mathsf{Hess}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} -6xy & 1-3x^2-12y^2 \\ 1-3x^2-12y^2 & -24xy \end{pmatrix}$$

Assim, $\nabla f(x,y) = \mathbb{O}$ se, e somente se, $y(1-3x^2-4y^2) = 0$ e $x(1-x^2-12y^2) = 0$, i.e. se, e somente se, $(x,y) = \mathbb{O}$ ou $(0, \pm\frac{1}{2})$ ou $(\pm 1, 0)$ ou $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4})$; estes são os pontos críticos de f. Calculando-se a matriz hessiana em cada um destes pontos, conclui-se que $\mathbb{O}, (0, \pm\frac{1}{2}), (\pm 1, 0)$ são pontos de sela, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ são pontos de máximo local e $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ são pontos de mínimo local.

(b) Considere a restrição de f a $\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant x \text{ e } x^2 + 4y^2 \leqslant 1\}$. Como $\overline{D}$ é compacto e f é contínua, segue-se do teorema de Weierstrass que f assume máximo em $\overline{D}$. Sejam $\Gamma_1 \doteq \{(x,y) \in \overline{D} \mid y = 0\}$, $\Gamma_2 \doteq \{(x,y) \in \overline{D} \mid x^2 + 4y^2 = 1\}$ e $\Gamma_3 \doteq \{(x,y) \in \overline{D} \mid x = y\}$. Seja $p_0 \in \overline{D}$ ponto de máximo de f em $\overline{D}$. Se $p_0 \in D = \operatorname{int} \overline{D}$, então segue-se do item anterior que $p_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Como as restrições de f a Γ_1 e a Γ_2 se anulam identicamente e como f assume valores estritamente positivos em D, segue-se que $p_0 \notin \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Por outro lado, se $p_0 \in \Gamma_3$, parametrizando-se Γ_3 por $\gamma(t) = (t,t)$, $t \in [0, \frac{1}{\sqrt{5}}]$, e analisando-se a função derivável $f \circ \gamma : [0, \frac{1}{\sqrt{5}}] \to \mathbb{R}$, conclui-se que $p_0 = (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$. Como $f(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}) = \frac{1}{20} < \frac{1}{16} = f(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, conclui-se que $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ é o único ponto de máximo de f em $\overline{D}$. Finalmente, como $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) \in D$ e $D \subset \overline{D}$, conclui-se que $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ é o ponto de máximo de f em D.

a) Como f é contínua e C é compacto, o problema tem solução. Vamos encontrar os pontos de máximo e de mínimo da restrição de f a C, usando o Teorema dos multiplicadores de Lagrange. Para isso, consideremos

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$, que é um aberto de $\mathbb{R}^3$,

$g(x,y,z) = x^2 + 4y^2 - z^2 + 1$ e $h(x,y,z) = x + 2y - 2z + 4$

que são de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$. Temos que

$C = \{(x,y,z) \in A : g(x,y,z) = 0 \text{ e } h(x,y,z) = 0\}$. Vamos mostrar que $\nabla g(x,y,z) \wedge \nabla h(x,y,z) \neq \vec{0}$, se (x,y,z) está em C.

$$\nabla g(x,y,z) \wedge \nabla h(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 8y & -2z \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (4z - 16y,\ 4x - 2z,\ -8y + 4x)$$

que é nulo se e só se $z = 4y$ e $x = 2y$. Mas um ponto do tipo $(2y, y, 4y)$ não é de C pois $h(2y, y, 4y) \neq 0$.

Como f é de classe C^1, o teorema garante que se (x,y,z) é de máximo ou mínimo da restrição de f a C então existem λ e μ reais tais que

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x + \beta & (1) \\ 2 = 8\lambda y + 2\beta & (2) \\ -2z = -2\lambda z - 2\beta & (3) \end{cases}$$

De (1) e (2) segue que $0 = 2(2\lambda x + \beta) - (8\lambda y + 2\beta) = 4\lambda(x - 2y)$

Se $\lambda = 0$, segue de (1), que $\beta = 1$ e de (3), que $z = 1$. Mas não existem pontos do tipo $(x, y, 1)$ em C pois se $0 = g(x, y, 1)$ então $x = y = 0$ e $h(0,0,1) \neq 0$

Se $x = 2y$, como (x, y, z) é de C, temos que

$0 = x + 2y - 2z + 4 = 4y + 2z + 4$ e portanto $z = 2y + 2$.

Temos também $0 = x^2 + 4y^2 - z^2 + 1 = 8y^2 - (2y+2)^2 + 1 =$

$= 4y^2 - 8y + 3$ e portanto $y = 1 + \frac{\sqrt{7}}{2}$ ou $y = 1 - \frac{\sqrt{7}}{2}$

Os pontos de extremo da restrição de f a C são

$P_1 = (2 + \sqrt{7}, 1 + \frac{\sqrt{7}}{2}, 4 + \sqrt{7})$ e $P_2 = (2 - \sqrt{7}, 1 - \frac{\sqrt{7}}{2}, 4 - \sqrt{7})$

Como $f(P_1) = -19 - 6\sqrt{7}$ e $f(P_2) = -19 + 6\sqrt{7}$, então

P_1 é o ponto de mínimo, P_2 é o ponto de máximo,

$-19 - 6\sqrt{7}$ é o valor mínimo de f em C e

$-19 + 6\sqrt{7}$ é o valor máximo de f em C

---

b) Como f é contínua e R é compacto, o problema tem solução. Se (x_0, y_0, z_0) é ponto de máximo ou de mínimo da restrição de f a R então ocorre um dos casos abaixo:

1º caso (x_0, y_0, z_0) é ponto do conjunto C do item a)
Nesse caso, (x_0, y_0, z_0) é um dos pontos P_1 ou P_2 encontrados em a).

2º caso (x_0,y_0,z_0) está em R mas não em C

Nesse caso (x_0,y_0,z_0) é extremo da restrição de f ao conjunto M, onde

$$M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0<z<\frac{y+2x+4}{2},\ x^2+4y^2-z^2+1=0\right\}$$

Temos que $M=\{(x,y,z)\in B : g(x,y,z)=0\}$, onde

$$B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0<z<\frac{y+2x+4}{2}\right\},$$ que é aberto e

$g(x,y,z)=x^2+4y^2-z^2+1$, que é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$

Temos também que $\nabla g(x,y,z)=(2x,8y,-2z)$, que não é nulo se (x,y,z) é de M. Pelo teorema dos multiplicadores de Lagrange, sendo (x_0,y_0,z_0) extremo da restrição de f a M, existe λ real tal que $\nabla f(x_0,y_0,z_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0,z_0)$

isto é: $1=2\lambda x_0$, $2=8\lambda y_0$, $-2z_0=-2\lambda z_0$.

Como (x_0,y_0,z_0) é de M, temos $z_0>0$. Logo $\lambda=1$, $x_0=\frac{1}{2}$ e $y_0=\frac{1}{4}$. Usando que $x_0^2+4y_0^2-z_0^2+1=0$, temos $z_0=\sqrt{\frac{3}{2}}$. O único ponto possível é

$P_3=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, que está em M, pois $0<\sqrt{3/2}<\dfrac{\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4}{2}$

Conclusão: os extremos da restrição de f a R só podem ser P_1 ou P_2 encontrados em a) ou P_3 encontrado em b)

Como $f(P_1)=-19-6\sqrt{7}$, $f(P_2)=-19+6\sqrt{7}$ e $f(P_3)=-\frac{1}{2}$

e como $-19-6\sqrt{7}<-19+6\sqrt{7}<-19+18<-\frac{1}{2}$ então

P_1 é ponto de mínimo, P_3 é ponto de máximo, $-19-6\sqrt{7}$ é valor mínimo de f em R e $-\frac{1}{2}$ é valor máximo de f em R

B.

a) Como f é contínua e C é compacto, o problema tem solução. Para encontrar os pontos de máximo e mínimo, usaremos o teorema dos multiplicadores de Lagrange.

Consideremos $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$, que é aberto, $g(x,y,z) = 4x^2 + y^2 - z^2 + 1$, $h(x,y,z) = 2x + y - 2z + 4$ e $f(x,y,z) = 2x + y - z^2$ que são de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$

Temos que $C = \{(x,y,z) \in A : g(x,y,z) = 0 \text{ e } h(x,y,z) = 0\}$

Pelo teorema, se (x,y,z) é ponto de máximo ou de mínimo da restrição de f a C então $\nabla f(x,y,z)$ $\nabla g(x,y,z)$ e $\nabla h(x,y,z)$ são L.D. e portanto

$$= \det \begin{bmatrix} 8x & 2y & -2z \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2z \end{bmatrix} = -2z(2-2) + 2z(8x-4y) + 2(8x-4y) =$$

$= (2-2z)(8x-4y)$. Logo $z = 1$ ou $y = 2x$. Mas não existem pontos do tipo $(x,y,1)$ em C, pois o sistema $\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 1^2 + 1 = 0 \\ 2x + y - 2\cdot 1 + 4 = 0 \end{cases}$ não tem solução.

Se $y = 2x$, como (x,y,z) é de C, temos $\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 - z^2 + 1 = 0 \\ 4x - 2z + 4 = 0 \end{cases}$

logo $z = 2x + 2$ e $0 = 4x^2 + 4x^2 - (2x+2)^2 + 1 = 4x^2 - 8x - 3$

Assim, $x = 1 + \frac{\sqrt{7}}{2}$ ou $x = 1 - \frac{\sqrt{7}}{2}$

Temos dois pontos possíveis: $P_1 = \left(1 + \frac{\sqrt{7}}{2}, 2 + \sqrt{7}, 4 + \sqrt{7}\right)$

$P_2 = \left(1 - \frac{\sqrt{7}}{2}, 2 - \sqrt{7}, 4 - \sqrt{7}\right)$. Como $f(P_1) = -19 - 7\sqrt{7}$ e $f(P_2) = -19 + 6\sqrt{7}$ então P_1 é ponto de mínimo e P_2 é ponto de máximo, $-19 - 6\sqrt{7}$ é o valor mínimo e

$-19+6\sqrt{7}$ é o valor máximo.

b) Como f é contínua e R é compacto, o problema tem solução. Se (x_0, y_0, z_0) é ponto de máximo ou de mínimo da restrição de f a R então ocorre um dos casos abaixo:

1º caso: (x_0, y_0, z_0) é ponto do conjunto C do item a). Nesse caso, (x_0, y_0, z_0) é um dos pontos P_1 ou P_2 encontrado em a)

2º caso: (x_0, y_0, z_0) está em R mas não em C. Nesse caso, (x_0, y_0, z_0) é extremo da restrição de f ao conjunto M, onde

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < \frac{2x+y+4}{2},\ 4x^2+y^2-z^2+1=0\right\}.$$

Temos que $M = \{(x,y,z) \in B : g(x,y,z)=0\}$, onde $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < \frac{2x+y+4}{2}\right\}$, que é aberto e $g(x,y,z) = 4x^2+y^2-z^2+1$, que é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$.

Pelo Teorema dos multiplicadores de Lagrange, sendo (x_0, y_0, z_0) extremo da restrição de f a M, temos $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ paralelo a $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ e portanto

$$\vec{0} = \nabla f(x_0,y_0,z_0) \wedge \nabla g(x_0,y_0,z_0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8x_0 & 2y_0 & -2z_0 \\ 2 & 1 & -2z_0 \end{vmatrix} =$$

$(-4y_0z_0 + 2z_0)\vec{i} + (16x_0z_0 - 4z_0)\vec{j} + (8x_0 - 4y_0)\vec{k}$. Como (x_0, y_0, z_0) é de M então $z_0 > 0$ e portanto $y_0 = 2x_0$

$y_0 = \frac{1}{2}$, $x_0 = \frac{1}{4}$. Como $4x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 + 1 = 0$, temos $z_0 = \sqrt{3/2}$. O único ponto possível é $P_3 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ que está em M pois $0 < \sqrt{3/2} < \frac{2\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 4}{2}$

Conclusão: os extremos da restrição de f a R só podem ser P_1 ou P_2 encontrados em a) ou P_3.

Como $f(P_1) = -19-6\sqrt{7}$, $f(P_2) = -19+6\sqrt{7}$, $f(P_3) = -\frac{1}{2}$

e como $-19-6\sqrt{7} < -19+6\sqrt{7} < -19+18 < -\frac{1}{2}$, então

P_1 é ponto de mínimo, P_3 é ponto de máximo,

$-19-6\sqrt{7}$ é valor mínimo de f em R e $-\frac{1}{2}$ é valor máximo de f em R.