A

1. (3,5 pontos) Seja S a superfície $x^2 - 2xy - 2y + z^2 = 0$.

a) Encontre uma parametrização para a curva (fechada) obtida pela intersecção de S com o plano $z = x + y$.

b) Determine um vetor tangente à intersecção de S com a superfície
$e^x + y^2 - 3y + z^2 + x^2y - 5z = -7$ no ponto $(0, 2, 2)$.

c) Determine os pontos da superfície $x^3 + xyz + z^3 = 1$ cujos planos tangentes são ortogonais ao vetor obtido no item b).

a) $\begin{cases} z = x+y \\ x^2 - 2xy - 2y + z^2 = 0 \end{cases}$

$x^2 - 2xy - 2y + (x+y)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{2}} + (y-1)^2 = 1$

$\therefore \gamma(t) : \begin{cases} x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \\ y(t) = 1 + \operatorname{sen} t \\ z(t) = 1 + \operatorname{sen} t + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$

b) Um vetor tg à intersec. das superfícies de nível 0 de
$F(x,y,z) = x^2 - 2xy - 2y + z^2$ e $G(x,y,z) = e^x + y^2 - 3y + z^2 + x^2y - 5z + 7$
em $(0,2,2)$ é paralelo ao $\vec{\nabla} F \wedge \vec{\nabla} G\,(0,2,2)$.

Como
$$(\nabla F \wedge \nabla G)(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x-2y & -2x-2 & 2z \\ e^x + 2xy & 2y - 3 + x^2 & 2z - 5 \end{vmatrix},$$

temos
$$(\nabla F \wedge \nabla G)(0,2,2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 0, -2).$$

$\therefore$ um vetor tg pode ser $\vec{v} = (1,0,1)$

c) $\vec{\nabla} f(x,y,z)$ é perpendicular ao plano tg à sup de nível 0 de $f(x,y,z) = x^3 + xyz + z^3 - 1$ em cada pto.

Logo $\vec{v}$ é paralelo ao $\vec{\nabla} f$, i.e. $\vec{\nabla} f(x,y,z) = \lambda \vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\therefore$ quero encontrar (x,y,z) tq

$$\begin{cases} ① \; 3x^2 + yz = \lambda \\ \quad xz = 0 \Rightarrow \underbrace{x=0}_{1º\text{ caso}} \text{ ou } \underbrace{z=0}_{2º\text{ caso}} \\ ② \; 3z^2 + xy = \lambda \\ ③ \; x^3 + xyz + z^3 = 1 \end{cases}$$

1º caso $x = 0$ em ① e ② obtemos

$\begin{cases} yz = \lambda \\ 3z^2 = \lambda \end{cases} \Rightarrow yz - 3z^2 = 0$

$z(y - 3z) = 0$

i.e. $z = 0 \Rightarrow$ abs. eq ③.

ou $\left.\begin{array}{l} y = 3z \\ \text{de ③. } z^3 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} z = 1 \\ y = 3 \end{array}$

2º caso $z = 0$ em ① e ② obtemos

$\begin{cases} 3x^2 = \lambda \\ xy = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} xy - 3x^2 = 0 \\ x(y - 3x) = 0 \end{array}$

i.e. $x = 0 \Rightarrow$ abs eq ③

ou $\left.\begin{array}{l} y - 3x = 0 \\ \text{de ③: } x^3 = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ e\; y = 3 \end{array}$

$\therefore$ obtenho os ptos $(0,3,1)$ e $(1,3,0)$

1. (3,5 pontos) Seja S a superfície $y^2 - 2xy - 2x + z^2 = 0$.

a) Encontre uma parametrização para a curva (fechada) obtida pela intersecção de S com o plano $z = x + y$.

b) Determine um vetor tangente à intersecção de S com a superfície

$e^y + x^2 - 3x + z^2 + xy^2 - 5z = -7$ no ponto $(2, 0, 2)$.

c) Determine os pontos da superfície $y^3 + xyz + z^3 = 1$ cujos planos tangentes são ortogonais ao vetor obtido no item b).

a) $\begin{cases} z = x+y \\ y^2 - 2xy - 2x + z^2 = 0 \end{cases}$

$y^2 - 2xy - 2x + (x+y)^2 = 0 \iff 2y^2 + x^2 - 2x = 0 \iff (x-1)^2 + \frac{y^2}{1/2} = 1$

$\therefore \gamma(t): \begin{cases} x(t) = 1 + \cos t \\ y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} t \\ z(t) = 1 + \cos t + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$

b) Um vetor tg. à intersec. das superfícies de nível 0 de

$F(x,y,z) = y^2 - 2xy - 2x + z^2$ e $G(x,y,z) = e^y + x^2 - 3x + z^2 + xy^2 - 5z$

em $(2,0,2)$ é paralelo ao $\vec{\nabla} F \wedge \vec{\nabla} G (2,0,2)$.

Como $\vec{\nabla} F \wedge \vec{\nabla} G (x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2y-2 & 2y-2x & 2z \\ 2x-3+y^2 & e^y + 2xy & 2z-5 \end{vmatrix}$

temos $\vec{\nabla} F \wedge \vec{\nabla} G (2,0,2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0, +2, +2)$.

$\therefore$ um vetor tg pode ser $\vec{v} = (0, \underline{1, 1})$ //

c) $\vec{\nabla} f(x,y,z)$ é perpendicular ao plano tg à sup. de nível 0

de $f(x,y,z) = y^3 + xyz + z^3 - 1$ em cada pto.

Logo $\vec{v}$ é paralelo ao $\vec{\nabla} f$, ie $\vec{\nabla} f(x,y,z) = \lambda \vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\therefore$ quero encontrar (x,y,z) tq $\begin{cases} yz = 0 \Rightarrow \underbrace{y=0}_{1^o\text{ caso}} \text{ ou } \underbrace{z=0}_{2^o\text{ caso}} \\ 3y^2 + xz = \lambda \quad (1) \\ 3z^2 + xy = \lambda \quad (2) \\ y^3 + xyz + z^3 = 1 \quad (3) \end{cases}$

1º caso se $y = 0$ então em (1) e (2)

obtemos $\begin{cases} xz = \lambda \\ 3z^2 = \lambda \end{cases}$ logo $xz - 3z^2 = 0$
$z(x - 3z) = 0$

ie $z = 0 \Rightarrow$ abs. pela eq (3)

ou

$\left.\begin{matrix} x = 3z \\ \text{de (3) } z^3 = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} z = 1 \\ x = 3 \end{matrix}$

2º caso: se $z = 0$ então em (1) e (2)

obtemos $\begin{cases} 3y^2 = \lambda \\ xy = \lambda \end{cases}$ logo $xy - 3y^2 = 0$
$y(x - 3y) = 0$

ie $y = 0 \Rightarrow$ abs pela eq (3)

ou

$\left.\begin{matrix} x = 3y \\ \text{de (3). } y^3 = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} y = 1 \\ x = 3 \end{matrix}$

$\therefore$ obtemos os ptos $(3, 0, 1)$ e $(3, 1, 0)$ //

A

2. (3,5 pontos) Seja $f(x,y) = \frac{y^3}{3} + x^2 + 2kxy + 3x$, onde k é constante real.

a) Determine e classifique os pontos críticos de f para $k = 1$.

b) Determine os valores de k para os quais f possui um único ponto crítico.

c) Para o maior dos valores de k encontrados no item b), classsifique o ponto crítico.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2ky + 3$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y^2 + 2kx$ e $H(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & 2k \\ 2k & 2y \end{vmatrix} = 4(y - k^2)$

a) para $k = 1$:

(x,y) é ponto crítico $\iff \begin{cases} 2x + 2y + 3 = 0 \\ y^2 + 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$ ou $y = -1$

$x = -\frac{y^2}{2}$. Logo, os pontos críticos são $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ e $\left(-\frac{9}{2}, 3\right)$.

$H\left(-\frac{1}{2}, -1\right) = -8 < 0 \Rightarrow$ $\boxed{\left(-\frac{1}{2}, -1\right) \text{ é ponto de sela}}$

$H\left(-\frac{9}{2}, 3\right) = 8 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-9/2, 3) = 2 > 0 \Rightarrow$ $\boxed{\left(-\frac{9}{2}, 3\right) \text{ é ponto de mínimo local}}$

b) O sistema $\begin{cases} 2x + 2ky + 3 = 0 \\ y^2 + 2kx = 0 \end{cases}$ deve ter uma única solução.

Multiplicando a 1ª por k e subtraindo da 2ª, obtemos

$$y^2 - 2k^2y - 3k = 0$$

para que esta última tenha uma única solução, devemos ter

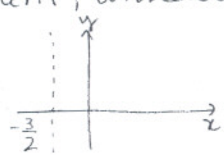
$4k^4 + 12k = 0$, isto é, $4k(k^3 + 3) = 0$. Logo, $\boxed{k = 0 \text{ ou } k = -\sqrt[3]{3}}$

c) O maior valor é $k = 0$. Neste caso,

$f(x,y) = \frac{y^3}{3} + x^2 + 3x$

$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} 2x + 3 = 0 \\ y^2 = 0 \end{cases} \iff (x,y) = \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

Temos $H(-3/2, 0) = 0$. O critério do Hessiano nada afirma. Porém, considerando f sobre a reta $x = -3/2$, obtemos



$f\left(-\frac{3}{2}, y\right) = \frac{y^3}{3} - \frac{9}{4}$ (é estritamente crescente)

Como $y = 0$ não é ponto de extremo local da função $\frac{y^3}{3} - \frac{9}{4}$, concluímos que $\boxed{\left(-\frac{3}{2}, 0\right) \text{ é um ponto de sela de } f}$

B

2. (3,5 pontos) Seja $f(x,y) = \frac{x^3}{3} + y^2 + 2kxy + 3y$, onde k é constante real.

a) Determine e classifique os pontos críticos de f para $k = 1$.

b) Determine os valores de k para os quais f possui um único ponto crítico.

c) Para o maior dos valores de k encontrados no item b), classsifique o ponto crítico.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^2 + 2ky \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + 2kx + 3 \quad \text{e} \quad H(x,y) = \begin{vmatrix} 2x & 2k \\ 2k & 2 \end{vmatrix} = 4(x - k^2)$$

a) para $k = 1$:

(x,y) é ponto crítico $\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2y = 0 \\ 2y + 2x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -1$

$y = -\frac{x^2}{2}$. logo, os pontos críticos são $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ e $\left(3, -\frac{9}{2}\right)$

$H\left(-1, -\frac{1}{2}\right) = -8 < 0 \Rightarrow$ $\boxed{\left(-1, -\tfrac{1}{2}\right) \text{ é ponto de sela}}$

$H\left(3, -\frac{9}{2}\right) = 8 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3, -9/2) = 6 > 0 \Rightarrow$ $\boxed{\left(3, -\tfrac{9}{2}\right) \text{ é ponto de mínimo local.}}$

b) O sistema $\begin{cases} x^2 + 2ky = 0 \\ 2y + 2kx + 3 = 0 \end{cases}$ deve ter uma única solução.

Multiplicando a 2ª por k e subtraindo da 1ª, obtemos

$$x^2 - 2k^2x - 3k = 0$$

para que esta última tenha uma única solução, devemos ter

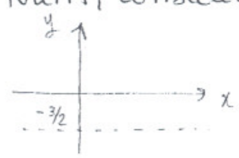
$4k^4 + 12k = 0$, isto é, $4k(k^3 + 3) = 0$. logo, $\boxed{k = 0 \text{ ou } k = -\sqrt[3]{3}}$

c) O maior valor de k é $k = 0$. Neste caso,

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + y^2 + 3y$$

$\nabla f(x,y) = (0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ 2y + 3 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow (x,y) = \left(0, -\frac{3}{2}\right)$

Temos $H(0, -3/2) = 0$. O critério do Hessiano nada afirma. Porém, considerando f sobre a reta $y = -3/2$, obtemos



$f\left(x, -\frac{3}{2}\right) = \frac{x^3}{3} - \frac{9}{4}$ é estritamente crescente

Como $x = 0$ não é ponto de extremo local da função $\frac{x^3}{3} - \frac{9}{4}$, concluímos

que $\boxed{\left(0, -\tfrac{3}{2}\right) \text{ é um ponto de sela de } f.}$

A

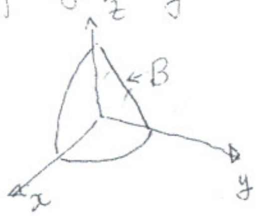
3. (3 pontos) Dado o problema:

"Encontrar o maior valor para o produto de três números positivos x, y e z com a restrição $x^2 + y + z = 1$."

a) Mostre que o problema tem solução.

b) Encontre a solução.

a) O problema consiste em encontrar o valor máximo da função $f(x,y,z) = xyz$ no conjunto $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y+z = 1, x>0, y>0, z>0\}$



Seja $C = \bar{B} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y+z=1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

Como f é contínua em $\mathbb{R}^3$ e C é compacto, o Teorema de Weirstrass assegura que existe (pelo menos) um ponto de máximo de f em C. Como $f(x,y,z) = 0$ se x ou y ou z se anula e $f(x,y,z) > 0$ se x, y e z são todos positivos, os pontos de máximo têm que estar em B.

b) Sejam $f(x,y,z)$ e B como no ítem a)

$g(x,y,z) = x^2+y+z-1$ e $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x>0, y>0, z>0\}$.

Observando que:

i) A é aberto,

ii) $B = \{(x,y,z) \in A \mid g(x,y,z) = 0\}$,

iii) f e g são funções de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$,

iv) $\nabla g(x,y,z) = (2x, 1, 1) \neq 0$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

segue, do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange que, se p é ponto de máximo de f em B, então

$\nabla f(p) = \lambda g(p)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Assim, os pontos de máximo de f em B estarão entre as soluções (x,y,z) do sistema:

$$\begin{cases} yz = \lambda 2x & (1) \\ xz = \lambda & (2) \\ xy = \lambda & (3) \\ x^2 + y + z = 1 & (4) \end{cases} \qquad \text{com} \quad x>0,\ y>0,\ z>0.$$

De (2) e (3), obtemos

$$xz = xy \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} y = z.$$

De (1) e (2), obtemos $(x>0)$

$$\frac{yz}{2x} = xz \overset{z>0}{\Longleftrightarrow} y = 2x^2.$$

Portanto, segue que $x^2 = y/2$ e $z = y$.

Substituindo em (4):

$$\frac{y}{2} + y + y = 1 \Longleftrightarrow \frac{5}{2} y = 1 \Longleftrightarrow \boxed{y = 2/5}.$$

Daí $x^2 = y/2 = \frac{1}{5} \overset{x>0}{\Longrightarrow} \boxed{x = \sqrt{5}/5}$ e $\boxed{z = y = 2/5}$.

Portanto $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$ é o único ponto de máximo de f em B e o valor máximo é $f\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right) = \frac{4\sqrt{5}}{125}$.

<u>Obs</u> O problema também pode ser resolvido usando primeiro a equação $x^2+y+z=1$ para obter uma das variáveis em função das outras e então substituindo na função $f(x,y,z) = xyz$ para obter um problema de maximização não condicionado.

3. (3 pontos) Dado o problema:

"Encontrar o maior valor para o produto de três números positivos x, y e z com a restrição $x + y^2 + z = 1$."

a) Mostre que o problema tem solução.

b) Encontre a solução.

a) Ver prova A.

b) Sejam $f(x,y,z) = xyz$, $g(x,y,z) = x+y^2+z-1$
e $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x>0, y>0, z>0\}$.

Segue, do Teorema dos multiplicadores de Lagrange (ver justificativa na prova A) que, se p é ponto de máximo de f em B, então $\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\therefore$ Os pontos de máximo de f em B estão entre as soluções (x,y,z) do sistema:

$$\begin{cases} yz = \lambda & (1) \\ xz = \lambda 2y & (2) \\ xy = \lambda & (3) \\ x+y^2+z = 1 & (4) \end{cases} \quad \text{com } x>0, y>0, z>0.$$

De (1) e (3) obtemos: $yz = xy \overset{y>0}{\Longleftrightarrow} x = z$

De (1) e (2) obtemos $(y>0)$: $yz = \dfrac{xz}{2y} \overset{z>0}{\Longleftrightarrow} 2y^2 = x \Longleftrightarrow y^2 = x/2$

Substituindo em (4):

$x + x/2 + x = 1 \Longleftrightarrow \dfrac{5}{2}x = 1 \Longleftrightarrow \boxed{x = 2/5}$

Daí, $z = x = 2/5$ e $y^2 = \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{5} \overset{y>0}{\Longrightarrow} y = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Portanto $\left(2/5, \dfrac{\sqrt{5}}{5}, 2/5\right)$ é o único ponto de máximo de f em B e o correspondente valor máximo é $f\left(2/5, \sqrt{5}/5, 2/5\right) = \dfrac{4\sqrt{5}}{125}$

Obs: Ver observação sobre outra possível solução na prova A.