1. **(2,0)** Seja $f(x,y) = \cos(\sqrt[3]{x^2+y^2})$. Em que pontos de $\mathbb{R}^2$ é f diferenciável? **Justifique!**

A

Se $(x,y) \neq (0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\text{sen}\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{1}{3}(x^2+y^2)^{-2/3} \cdot 2x$

e, analogamente, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\text{sen}\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)\frac{1}{3}(x^2+y^2)^{-2/3} \cdot 2y$

que são funções contínuas.

Logo f é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e portanto diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Ver o que acontece com f em $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^{2/3})-1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\cos(x^{2/3})-1)(\cos(x^{2/3})+1)}{x(\cos(x^{2/3})+1)} =$$

$$\lim_{x\to 0} -\frac{\text{sen}^2 x^{2/3}}{x^{4/3}} \cdot \frac{x^{1/3}}{\cos(x^{2/3})+1} = \lim_{x\to 0} -\left(\underbrace{\frac{\text{sen}(x^{2/3})}{x^{2/3}}}_{\to 1 \text{ (limite fundamental)}}\right)^2 \frac{\overbrace{x^{1/3}}^{\to 0}}{\underbrace{\cos(x^{2/3})+1}_{\to 2}} = 0$$

Analogamente, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ (observe que $f(x,y) = f(y,x)$).

Temos então um candidato a plano tangente ao G_f em $(0,0,f(0,0)) = (0,0,1)$. Esse plano tem equação:

$$z = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0),$$

ou seja é o plano $z = 1$.

Seja $E(x,y) = f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)$

$= \cos\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right) - 1$.

Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{E(x,y)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)-1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(\cos\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)-1\right)\left(\cos\sqrt[3]{x^2+y^2}+1\right)}{\sqrt{x^2+y^2}\left(\cos\sqrt[3]{x^2+y^2}+1\right)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{\text{sen}^2\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\left(\cos\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)+1\right)} \frac{\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\left(\frac{\text{sen}\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}\right)^2 \sqrt[3]{\frac{(x^2+y^2)^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}} \frac{1}{\cos\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)+1}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\underbrace{\left(\frac{\text{sen}\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}\right)^2}_{\to 1} \cdot \underbrace{\sqrt[3]{\frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}}}_{(*)\text{ (veja abaixo)}\ \to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)+1}}_{\to 1/2} = 0$$

$$(*) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt[3]{\underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\text{limitada}}\underbrace{x}_{\to 0} + \underbrace{2\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\text{limitada}}\underbrace{y}_{\to 0} + \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\text{limitada}}\underbrace{y}_{\to 0}} = 0$$

Logo f é diferenciável em $(0,0)$.

Outro modo de calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)-1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Faça $u = x^2+y^2$. Então $(x,y)\to(0,0) \Rightarrow u\to 0$;

$$\text{logo } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)-1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{u\to 0} \frac{\cos(u^{1/3})-1}{u^{1/2}}$$

$$\underset{(\frac{0}{0})}{\overset{L'H}{=}} \lim_{u\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(u^{1/3})\cdot\frac{1}{3}u^{-2/3}}{\frac{1}{2}u^{-1/2}} = \lim_{u\to 0} -\frac{2}{3}\frac{\operatorname{sen}(u^{1/3})}{u^{1/3}}u^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$$

$$= \lim_{u\to 0} -\frac{2}{3}\underbrace{\frac{\operatorname{sen}(u^{1/3})}{u^{1/3}}}_{\to 1}\cdot \underbrace{u^{1/6}}_{\to 0} = 0$$

(Veja outra solução na prova tipo B)

De qualquer modo, provamos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{E(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$ o que implica

que f é diferenciável em $(0,0)$.

OUTRA SOLUÇÃO NA PROVA A

1. **(2,0)** Seja $f(x,y) = \cos(\sqrt[3]{x^2+y^2})$. Em que pontos de $\mathbb{R}^2$ é f diferenciável? **Justifique!**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{1}{3}(x^2+y^2)^{-2/3} \cdot 2x$$

$$= -\frac{2}{3}\frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^{2/3}}\, x \quad , \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0)$$

Se $(x,y) = (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\cos(x^{2/3}) - 1}^{\to 0}}{\underbrace{x}_{\to 0}}$$

$$\underset{(0/0)}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \left(-\operatorname{sen}(x^{2/3}) \cdot \frac{2}{3} x^{-1/3} \right)$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{2}{3} \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(x^{2/3})}{x^{2/3}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{x^{1/3}}_{\to 0} = -\frac{2}{3}\cdot 1 \cdot 0 = 0$$

(limite fundamental)

Logo
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} -\frac{2}{3}\frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^{2/3}}\, x & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Se $(x,y) \neq (0,0)$, então $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em (x,y).

Em $(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{2}{3}\frac{x\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^{2/3}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{2}{3} \sqrt[3]{\underbrace{x}_{\to 0}\underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\text{limitada}}}\; \underbrace{\frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}}_{\to 1} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

(limite fundamental)

Portanto $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $\mathbb{R}^2$.

Como f é simétrica ($f(x,y) = f(y,x)$) temos que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} -\frac{2}{3}\, y\,\frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^{2/3}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

e então $\frac{\partial f}{\partial y}$ também é contínua em $\mathbb{R}^2$.

Logo f é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ e portanto é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

2. **(2,5)** Na lista de funções abaixo, existe uma função f tal que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{u}}}(0,0)$ existe para todo vetor unitário $\vec{\mathbf{u}}$ e f **não** é contínua em $(0,0)$.

(I) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ (II) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(III) $f(x,y) = \sqrt{2x^2+5y^2}$

(a) Prove que a função escolhida não é contínua em $(0,0)$.

(b) Seja $\vec{\mathbf{u}} = (a,b)$ um vetor unitário. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{u}}}(0,0)$ para a função escolhida.

F

As funções (I) e (III) são contínuas pois

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{y}_{\to 0} \frac{y^2}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$$

limitada

e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{2x^2+5y^2} = 0 = f(0,0)$.

Assim, a função que queremos só pode ser (II)!

(a) Vamos mostrar que $\nexists \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$.

Sejam $\gamma_1(t) = (t,0)$ ($\gamma_1(0) = (0,0)$ e γ_1 é contínua em $t=0$)

$\gamma_2(t) = (t,t^2)$ ($\gamma_2(0,0) = (0,0)$ e γ_2 é contínua em $t=0$)

Temos que $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0} 0 = 0 = L_1$

$\displaystyle\lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2} = L_2$

Como $L_1 \neq L_2$, $\nexists \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$.

(b) Seja $\vec{u} = (a,b)$ com $a^2+b^2 = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{(f(0+at, 0+bt) - f(0,0))}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{a^2 b t^3}{a^4t^4 + b^2t^2}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{a^2 b}{a^4 t^2 + b^2}$$

Se $b = 0$, então $a \neq 0$ (pois $a^2+b^2=1$)

Logo $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{a^2 b}{a^4t^2+b^2} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{a^4 t^2} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$

Se $b \neq 0$, então

$$\lim_{t\to 0} \frac{a^2 b}{a^4t^2+b^2} = \frac{a^2 b}{b^2} = \frac{a^2}{b}.$$

Assim: $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \begin{cases} 0 & \text{se } b = 0 \\ a^2/b & \text{se } b \neq 0. \end{cases}$

2. **(2,5)** Na lista de funções abaixo, existe uma função f tal que $\frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{u}}}(0,0)$ existe para todo vetor unitário $\vec{\mathbf{u}}$ e f **não** é contínua em $(0,0)$.

B

(I) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ (II) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(III) $f(x,y) = \sqrt{3x^2+4y^2}$

(a) Prove que a função escolhida não é contínua em $(0,0)$.

(b) Seja $\vec{\mathbf{u}} = (a,b)$ um vetor unitário. Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{u}}}(0,0)$ para a função escolhida.

As funções (II) e (III) são contínuas em $(0,0)$ pois

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \overset{\to 0}{x} \underbrace{\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)}_{\text{limitada}} = 0 = f(0,0)$$

e $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{3x^2+4y^2} = 0 = f(0,0)$.

Como no enunciado é dito que existe f que NÃO é contínua em $(0,0)$, f só pode ser (I).

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$ não existe

pois se $\gamma_1(t) = (t,0)$, $\gamma_1(0) = (0,0)$ e γ_1 é contínua em $t=0$

e $\gamma_2(t) = (t,t^2)$, $\gamma_2(0) = (0,0)$ e γ_2 é contínua em $t=0$

temos que $\lim\limits_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim\limits_{t\to 0} 0 = 0 = L_1$ e

$\lim\limits_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2} = L_2$ e $L_1 \neq L_2$.

(b) Seja $\vec{u} = (a,b)$ um vetor unitário, isto é, $a^2+b^2=1$.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f(0+at, 0+bt) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\frac{a^2t^2\,bt}{a^4t^4+b^2t^2}\right] = \lim_{t\to 0} \frac{a^2 b}{a^4t^2+b^2}$$

Se $b \neq 0$ então

$$\lim_{t\to 0} \frac{a^2 b}{a^4t^2+b^2} = \frac{a^2}{b}$$

Se $b=0$, então $a \neq 0$ já que $a^2+b^2=1$.

Logo $\lim\limits_{t\to 0} \frac{a^2 b}{a^4t^2+b^2} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{0}{a^4t^2} = \lim\limits_{t\to 0} 0 = 0$.

Portanto $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \begin{cases} a^2/b & \text{se } b \neq 0 \\ 0 & \text{se } b = 0 \end{cases}$

MAT 2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II

$2^{\underline{o}}$ semestre de 2012 - Segunda Prova - 15/10/2012

(3,0) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Sabe-se que:

(I) a imagem da curva $\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\Gamma(t) = (t+1, t^2, 2t^5 + t^4 - 2t^3 - t^2)$ está contida no gráfico de f,

(II) a derivada direcional de f no ponto $(3,4)$, na direção do vetor $\vec{\mathbf{u}} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ é igual a $31\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Determine:

1. a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(3,4,f(3,4))$.

De (I) segue que

$$f(t+1, t^2) = 2t^5 + t^4 - 2t^3 - t^2. \tag{1}$$

Como f é diferenciável temos, pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t+1, t^2) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(t+1, t^2) \cdot 2t = 10t^4 + 4t^3 - 6t^2 - 2t.$$

Tomando $t = 2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3,4) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(3,4) \cdot 4 = 10 \cdot 16 + 4 \cdot 8 - 6 \cdot 4 - 4 = 164. \tag{2}$$

De (II), sendo f diferenciável, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3,4) \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}(3,4) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{31\sqrt{2}}{2}.$$

Portanto

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(3,4) + \frac{\partial f}{\partial y}(3,4) = 31. \tag{3}$$

Somando as equações (2) e (3), temos $\quad 5\frac{\partial f}{\partial y}(3,4) = 195 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(3,4) = 39.$

De (6), $\frac{\partial f}{\partial x}(3,4) = 8.$

Portanto

$$\nabla f(3,4) = (8,39)$$

Além disso, tomando $t = 2$ em (1)

$$f(3,4) = (2 \cdot 2^5 + 2^4 - 2 \cdot 2^3 - 2^2) = 60.$$

Portanto, a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(3,4,f(3,4)) = (3,4,60)$ é $(z-60) = 8(x-3) + 39(y-4)$, ou

$$z = 8x + 39y - 120.$$

2. a equação da reta tangente à curva de nível de f que contém o ponto $(3,4)$ nesse ponto.

   Se $\vec{T}$ é um vetor tangente à curva de nível de f no ponto $(3,4)$, temos

   $$\vec{T} \cdot \nabla f(3,4) = 0 \Leftrightarrow \vec{T} = \lambda(-39,8), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

   Portanto, a equação da reta tangente é

   $$(x,y) = (3,4) + \lambda(-39,8), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

MAT 2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II

$2^{\underline{o}}$ semestre de 2012 - Segunda Prova - 15/10/2012

(3,0) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Sabe-se que:

(I) a imagem da curva $\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\Gamma(t) = (t^2, t-1,\, t^5 + t^4 - 4t^3 + 2t^2)$ está contida no gráfico de f,

(II) a derivada direcional de f no ponto $(4, 1)$, na direção do vetor $\vec{\mathbf{u}} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ é igual a $11\sqrt{2}$.

Determine:

1. a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(4, 1, f(4, 1))$.

De (I) segue que

$$f(t^2, t-1) = t^5 + t^4 - 4t^3 + 2t^2. \tag{4}$$

Como f é diferenciável temos, pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, t-1) \cdot 2t + \frac{\partial f}{\partial y}(t+1, t^2) \cdot 1 = 5t^4 + 4t^3 - 12t^2 + 4t.$$

Tomando $t = 2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(4, 1) \cdot 4 + \frac{\partial f}{\partial y}(4, 1) \cdot 1 = 5 \cdot 16 + 4 \cdot 8 - 12 \cdot 4 + 8 = 72. \tag{5}$$

De (II), sendo f diferenciável, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(4, 1) \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}(4, 1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 11\sqrt{2}.$$

Portanto

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(4, 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(4, 1) = 22. \tag{6}$$

Subtraindo (6) de (5), temos $5\frac{\partial f}{\partial x}(4, 1) = 50 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(4, 1) = 10.$

De (6), $\frac{\partial f}{\partial y}(4,1) = 32.$

Portanto,

$$\nabla f(4,1) = (10,32)$$

Além disso, tomando $t = 2$ em (4)

$$f(4,1) = (2^5 + 2^4 - 4 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2) = 24.$$

Portanto, a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(4,1,f(4,1)) = (4,1,24)$ é $(z-24) = 10(x-4) + 32(y-1)$, ou

$$z = 10x + 32y - 48.$$

2. a equação da reta tangente à curva de nível de f que contém o ponto $(4,1)$ nesse ponto.

   Se $\vec{T}$ é um vetor tangente à curva de nível de f no ponto $(4,1)$, temos

$$\vec{T} \cdot \nabla f(4,1) = 0 \Leftrightarrow \vec{T} = \lambda(-32,10), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Portanto, a equação da reta tangente é

$$(x,y) = (4,1) + \lambda(-32,10), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

4. **(2,5)** Sejam $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f=f(x,y)$, uma função de classe C^2 e $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por

$$F(t,u)=t^2f(t^2u,5t+3u).$$

Calcule $\dfrac{\partial^2F}{\partial u\partial t}(1,2)$ em termos de f e de suas derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Como $f\in C^2$, f e suas derivadas parciais de 1ª ordem são deriváveis. Aplicando-se a regra de Leibnitz e a regra da cadeia, conclui-se que, $\forall (t,u)\in\mathbb{R}^2$:

1.) $$\frac{\partial F}{\partial t}(t,u)=2t\cdot f(t^2u,5t+3u)+t^2\Big[\frac{\partial f}{\partial x}(t^2u,5t+3u)\cdot 2tu+$$
$$+\frac{\partial f}{\partial y}(t^2u,5t+3u)\cdot 5\Big]$$

2.) $$\frac{\partial^2F}{\partial u\partial t}(t,u)=2t\cdot\Big[\frac{\partial f}{\partial x}(t^2u,5t+3u)\cdot t^2+\frac{\partial f}{\partial y}(t^2u,5t+3u)\cdot 3\Big]+$$
$$+2t^3\cdot\Big[\frac{\partial f}{\partial x}(t^2u,5t+3u)+u\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t^2u,5t+3u)\cdot t^2+$$
$$+u\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(t^2u,5t+3u)\cdot 3\Big]+5t^2\cdot\Big[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(t^2u,5t+3u)\cdot$$
$$\cdot t^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t^2u,5t+3u)\cdot 3\Big]$$

$$\therefore\ \frac{\partial^2F}{\partial u\partial t}(1,2)=4\frac{\partial f}{\partial x}(2,11)+6\frac{\partial f}{\partial y}(2,11)+$$
$$+4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,11)+17\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(2,11)+15\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,11)$$

4. **(2,5)** Sejam $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f=f(x,y)$, uma função de classe C^2 e $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por

$$F(t,u)=u^2 f(u^2 t, 2t+4u).$$

Calcule $\dfrac{\partial^2 F}{\partial t\partial u}(1,2)$ em termos de f e de suas derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Como $f\in C^2$, f e suas derivadas parciais de 1ª ordem são deriváveis. Aplicando-se a regra de Leibnitz e a regra da cadeia, conclui-se que, $\forall (t,u)\in\mathbb{R}^2$:

1.) $$\frac{\partial F}{\partial u}(t,u) = 2u\cdot f(u^2t, 2t+4u) + u^2\cdot\left[\frac{\partial f}{\partial x}(u^2t,2t+4u)\cdot 2ut + \frac{\partial f}{\partial y}(u^2t,2t+4u)\cdot 4\right]$$

2.) $$\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial u}(t,u) = 2u\cdot\left[\frac{\partial f}{\partial x}(u^2t,2t+4u)\cdot u^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(u^2t,2t+4u)\cdot 2\right] + 2u^3\frac{\partial f}{\partial x}(u^2t,2t+4u) + 2u^3t\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u^2t,2t+4u)\cdot u^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(u^2t,2t+4u)\cdot 2\right] + 4u^2\cdot\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(u^2t,2t+4u)\cdot u^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u^2t,2t+4u)\cdot 2\right]$$

$$\therefore \frac{\partial^2 F}{\partial t\partial u}(1,2) = 32\frac{\partial f}{\partial x}(4,10) + 8\frac{\partial f}{\partial y}(4,10) + 64\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(4,10) + 96\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(4,10) + 32\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(4,10)$$