1. **(2,5)** Seja $f(x,y) = (xy)^{\frac{1}{5}}(x^2+y^2)^{\frac{3}{10}}$.

   (a) Se $x_0y_0 \neq 0$, é f diferenciável em (x_0,y_0)? Por que?

   (b) É f diferenciável em $(0,0)$?

   (c) Existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1)$? Existe $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0)$?

   (d) Determine o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^2$ onde f <u>não</u> é diferenciável. <u>Justifique.</u>

   (a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{5}(xy)^{-\frac{4}{5}}y(x^2+y^2)^{\frac{3}{10}} + (xy)^{\frac{1}{5}}\frac{3}{10}(x^2+y^2)^{-\frac{7}{10}}2x$$
$$= \frac{1}{5}\frac{y(x^2+y^2)^{\frac{3}{10}}}{(xy)^{\frac{4}{5}}} + \frac{3}{5}\frac{x(xy)^{\frac{1}{5}}}{(x^2+y^2)^{\frac{7}{10}}}$$

desde que $xy \neq 0$ (para que os denominadores sejam não nulos).

Como a função f é simétrica ($f(x,y) = f(y,x)$) temos, para $xy \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) == \frac{1}{5}\frac{x(x^2+y^2)^{\frac{3}{10}}}{(xy)^{\frac{4}{5}}} + \frac{3}{5}\frac{y(xy)^{\frac{1}{5}}}{(x^2+y^2)^{\frac{7}{10}}}.$$

Assim, se (x_0,y_0) é tal que $x_0y_0 \neq 0$, as derivadas parcias de f existem em uma vizinhança de (x_0,y_0) (pois $x_0y_0 \neq 0$ implica que $xy \neq 0$ em uma vizinhança de (x_0,y_0)) e são contínuas em (x_0,y_0). Logo f é diferenciável em (x_0,y_0).

   (b) As derivadas parciais de f em $(0,0)$ são:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Para ver se f é diferenciável em $(0,0)$, usaremos a definição de diferenciabilidade. Seja

$$E(x,y) = f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0) = (xy)^{\frac{1}{5}}(x^2+y^2)^{\frac{3}{10}}.$$

Mas, para que f seja diferenciável em $(0,0)$ é preciso que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{E(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

o que não ocorre nesse caso, pois se

$$\phi(x,y) = \frac{E(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{(xy)^{\frac{1}{5}}(x^2+y^2)^{\frac{3}{10}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt[5]{\frac{xy}{x^2+y^2}}$$

e $\gamma(t) = (t,t)$, então

$$\lim_{t\to 0} \phi(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} \sqrt[5]{\frac{t^2}{2t^2}} = \sqrt[5]{\frac{1}{2}}.$$

Logo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{E(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \neq 0,$$

pois exibimos um caminho que passa pela origem e pelo qual o limite não é igual a 0 (na verdade esse limite não existe, mas aqui, basta provar que ele é $\neq 0$). Portanto f **não** é diferenciável em $(0,0)$.

(c)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,1)-f(0,1)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\frac{1}{5}}(x^2+1)^{\frac{3}{10}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2+1)^{\frac{3}{10}}}{x^{\frac{4}{5}}} = +\infty,$$

já que quando $x \to 0$, $(x^2+1)^{\frac{3}{10}} \to 1$ e $x^{\frac{4}{5}} \to 0$ e é positivo. Logo, não existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1)$.

Analogamente, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0)$ não existe, pois

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(1,y)-f(1,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{y^{\frac{1}{5}}(y^2+1)^{\frac{3}{10}}}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{(y^2+1)^{\frac{3}{10}}}{y^{\frac{4}{5}}} = +\infty.$$

(d) f **não** é diferenciável em $(0,0)$ por (b).

Assim como vimos em (c), a derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ não existe nos pontos da forma

$(0,a)$ com $a \neq 0$ e a derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ não existe nos pontos da forma $(a,0)$ com $a \neq 0$, pois se $a \neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,a) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,a) - f(0,a)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{a^{\frac{1}{5}} x^{\frac{1}{5}} (x^2 + a^2)^{\frac{3}{10}}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{a^{\frac{1}{5}} (x^2 + a^2)^{\frac{3}{10}}}{x^{\frac{4}{5}}} = \pm\infty,$$

conforme $a > 0$ ou $a < 0$. Para $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,0)$ é totalmente análogo.

Conclusão: f não é diferenciável nos pontos dos eixos x e y.

1. **(2,5)** Seja $f(x,y) = (xy)^{\frac{1}{5}}(x^2+y^2)^{\frac{3}{10}}$.

   (a) Se $x_0y_0 \neq 0$, é f diferenciável em (x_0,y_0)? Por que?

   (b) É f diferenciável em $(0,0)$?

   (c) Existe $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$? Existe $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$?

   (d) Determine o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^2$ onde f não é diferenciável. Justifique.

(a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{5}(xy)^{-\frac{4}{5}}y(x^2+y^2)^{\frac{3}{10}} + (xy)^{\frac{1}{5}}\frac{3}{10}(x^2+y^2)^{-\frac{7}{10}}2x$$
$$= \frac{1}{5}\frac{y(x^2+y^2)^{\frac{3}{10}}}{(xy)^{\frac{4}{5}}} + \frac{3}{5}\frac{x(xy)^{\frac{1}{5}}}{(x^2+y^2)^{\frac{7}{10}}}$$

desde que $xy \neq 0$ (para que os denominadores sejam não nulos).

Como a função f é simétrica ($f(x,y) = f(y,x)$) temos, para $xy \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) == \frac{1}{5}\frac{x(x^2+y^2)^{\frac{3}{10}}}{(xy)^{\frac{4}{5}}} + \frac{3}{5}\frac{y(xy)^{\frac{1}{5}}}{(x^2+y^2)^{\frac{7}{10}}}.$$

Assim, se (x_0,y_0) é tal que $x_0y_0 \neq 0$, as derivadas parcias de f existem em uma vizinhança de (x_0,y_0) (pois $x_0y_0 \neq 0$ implica que $xy \neq 0$ em uma vizinhança de (x_0,y_0)) e são contínuas em (x_0,y_0). Logo f é diferenciável em (x_0,y_0).

(b) As derivadas parciais de f em $(0,0)$ são:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Para ver se f é diferenciável em $(0,0)$, usaremos a definição de diferenciabilidade. Seja

$$E(x,y) = f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0) = (xy)^{\frac{1}{5}}(x^2+y^2)^{\frac{3}{10}}.$$

Mas, para que f seja diferenciável em $(0,0)$ é preciso que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{E(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

o que não ocorre nesse caso, pois se

$$\phi(x,y) = \frac{E(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{(xy)^{\frac{1}{5}}(x^2+y^2)^{\frac{3}{10}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt[5]{\frac{xy}{x^2+y^2}}$$

e $\gamma(t) = (t,t)$, então

$$\lim_{t\to 0} \phi(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} \sqrt[5]{\frac{t^2}{2t^2}} = \sqrt[5]{\frac{1}{2}}.$$

Logo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{E(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \neq 0,$$

pois exibimos um caminho que passa pela origem e pelo qual o limite não é igual a 0 (na verdade esse limite não existe, mas aqui, basta provar que ele é $\neq 0$). Portanto f **não** é diferenciável em $(0,0)$.

(c)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,1)-f(0,1)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\frac{1}{5}}(x^2+1)^{\frac{3}{10}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2+1)^{\frac{3}{10}}}{x^{\frac{4}{5}}} = +\infty,$$

já que quando $x \to 0$, $(x^2+1)^{\frac{3}{10}} \to 1$ e $x^{\frac{4}{5}} \to 0$ e é positivo. Logo, não existe $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$.

Analogamente, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$ não existe, pois

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(1,y)-f(1,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{y^{\frac{1}{5}}(y^2+1)^{\frac{3}{10}}}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{(y^2+1)^{\frac{3}{10}}}{y^{\frac{4}{5}}} = +\infty.$$

(d) f **não** é diferenciável em $(0,0)$ por (b).

Assim como vimos em (c), a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ não existe nos pontos da forma

$(0,a)$ com $a \neq 0$ e a derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ não existe nos pontos da forma $(a,0)$ com $a \neq 0$, pois se $a \neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,a) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,a) - f(0,a)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{a^{\frac{1}{5}} x^{\frac{1}{5}} (x^2 + a^2)^{\frac{3}{10}}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{a^{\frac{1}{5}} (x^2 + a^2)^{\frac{3}{10}}}{x^{\frac{4}{5}}} = \pm\infty,$$

conforme $a > 0$ ou $a < 0$. Para $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,0)$ é totalmente análogo.

Conclusão: f não é diferenciável nos pontos dos eixos x e y.

Questão a2) Sejam $f = f(x,y)$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$ e g a função dada por

$$g(u,v) = f(u^3 - uv^2, 1 + u\cos v) + \frac{\partial f}{\partial y}(vu, e^{2u+3v}).$$

(a) Determine $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ em função das derivadas parciais de primeira e de segunda ordem de f.

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u^3 - uv^2, 1 + u\cos v)(3u^2 - v^2) + \frac{\partial f}{\partial y}(u^3 - uv^2, 1 + u\cos v)(\cos v)$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(vu, e^{2u+3v})v + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(vu, e^{2u+3v})e^{2u+3v}2$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u^3 - uv^2, 1 + u\cos v)(-2uv) + \frac{\partial f}{\partial y}(u^3 - uv^2, 1 + u\cos v)(-u\,\mathrm{sen}\, v)$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(vu, e^{2u+3v})u + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(vu, e^{2u+3v})e^{2u+3v}3$$

(b) Suponha que

(I) $2x - 4y + 2z = 5$ é o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0, 1, f(0,1))$.

(II) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) = -3$

Determine o valor máximo da derivada direcional de g no ponto $(0,0)$.

$$2x - 4y + 2z = 5 \;\Rightarrow\; z = -x + 2y + \frac{5}{2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1) = -1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 2 \end{cases}$$

$$\nabla g(0,0) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(0,0), \frac{\partial g}{\partial v}(0,0)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1), 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1)\right) = (-4, -9)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \vec{u}}(0,0) = ||\nabla g(0,0)|| = ||(-4,-9)|| = \sqrt{16 + 81} = \sqrt{97}.$$

Questão b2) Sejam $f = f(x,y)$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$ e g a função dada por

$$g(u,v) = f(1 + u\cos v, u^3 - uv^2) + \frac{\partial f}{\partial x}(e^{2u+3v}, vu)\,.$$

(a) Determine $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ em função das derivadas parciais de primeira e de segunda ordem de f.

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(1 + u\cos v, u^3 - uv^2)(\cos v) + \frac{\partial f}{\partial y}(1 + u\cos v, u^3 - uv^2)(3u^2 - v^2)$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(e^{2u+3v}, vu)e^{2u+3v}2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(e^{2u+3v}, vu)v$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(1 + u\cos v, u^3 - uv^2)(-u\,\mathrm{sen}\, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(1 + u\cos v, u^3 - uv^2)(-2uv)$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(e^{2u+3v}, vu)e^{2u+3v}3 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(e^{2u+3v}, vu)u$$

(b) Suponha que

(I) $2x - 4y + 2z = 5$ é o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 0, f(1,0))$.

(II) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = -3$

Determine o valor máximo da derivada direcional de g no ponto $(0,0)$.

$$2x - 4y + 2z = 5 \;\Rightarrow\; z = -x + 2y + \frac{5}{2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0) = -1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 2 \end{cases}$$

$$\nabla g(0,0) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(0,0), \frac{\partial g}{\partial v}(0,0)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0), 3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0)\right) = (-7,-9)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \vec{u}}(0,0) = ||\nabla g(0,0)|| = ||(-7,-9)|| = \sqrt{49+81} = \sqrt{130}.$$

Questão 3) Sejam $f(x,y) = 3x^2y - 2xy^2$ e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tais que:

(I) $\nabla f(x_0, y_0)$ é tangente à curva $xy^3 - x^3y - 2xy - y^3 + 6 = 0$ no ponto $(1,2)$;

(II) a derivada direcional de f no ponto (x_0, y_0) e na direção do vetor $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$ é igual a $\frac{9}{\sqrt{2}}$.

Determine todos os pontos (x_0, y_0) para os quais se tem, <u>simultaneamente</u>, as condições (I) e (II) acima satisfeitas.

Solução: Seja $g(x,y) = xy^3 - x^3y - 2xy - y^3 + 6$. Então a curva dada em (I) é a curva de nível 0 de g. Como

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = y^3 - 3x^2y - 2y$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 3xy^2 - x^3 - 2x - 3y^2$$

são contínuas em $\mathbb{R}^2$, temos que $\nabla g(1,2)$ é ortogonal à curva dada em (I) no ponto $(1,2)$. Portanto de (I) temos que

$$\nabla f(x_0, y_0) \bullet \nabla g(1,2) = 0\ . \tag{1}$$

Notemos que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ pois suas derivadas parciais de primeira ordem são polinômios, e portanto são contínuas em $\mathbb{R}^2$. De f ser diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e de (II), temos que

$$\frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \bullet \vec{w}\,. \tag{2}$$

Como

$$\nabla g(1,2) = (8 - 6 - 4\,,\ 12 - 1 - 2 - 12) = (-2, -3)$$
$$\nabla f(x_0, y_0) = (\,6x_0y_0 - 2y_0^2\,,\ 3x_0^2 - 4x_0y_0\,)\,,$$

temos, de (1) e (2), que $-12x_0y_0 + 4y_0^2 - 9x_0^2 + 12x_0y_0 = 0$ e $6x_0y_0 - 2y_0^2 + 3x_0^2 - 4x_0y_0 = 9$. Da primeira equação temos que $x_0 = \frac{2y_0}{3}$ ou $x_0 = \frac{-2y_0}{3}$. Da segunda equação temos que $3x_0^2 = 2y_0^2 - 2x_0y_0 + 9$.

Para $x_0 = \frac{2y_0}{3}$ temos $\frac{4y_0^2}{3} = 2y_0^2 - \frac{4y_0^2}{3} + 9$, e assim $y_0 = \sqrt{\frac{27}{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$ ou $y_0 = -\sqrt{\frac{27}{2}} = -\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

Para $x_0 = \frac{-2y_0}{3}$ temos $\frac{4y_0^2}{3} = 2y_0^2 + \frac{4y_0^2}{3} + 9$, que não tem solução real.

Os pontos procurados são: $\left(\sqrt{6}\,,\ \frac{3\sqrt{6}}{2}\right)$ e $\left(-\sqrt{6}\,,\ \frac{-3\sqrt{6}}{2}\right)$.

Questão 3) Sejam $f(x,y) = 3xy^2 - 2x^2y$ e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tais que:

(I) $\nabla f(x_0, y_0)$ é tangente à curva $x^3y - xy^3 - 2xy - x^3 + 6 = 0$ no ponto $(2,1)$;

(II) a derivada direcional de f no ponto (x_0, y_0) e na direção do vetor $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$ é igual a $\frac{9}{\sqrt{2}}$.

Determine todos os pontos (x_0, y_0) para os quais se tem, <u>simultaneamente</u>, as condições (I) e (II) acima satisfeitas.

Solução: Seja $g(x,y) = x^3y - xy^3 - 2xy - x^3 + 6$. Então a curva dada em (I) é a curva de nível 0 de g. Como

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 3x^2y - y^3 - 2y - 3x^2$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 2x$$

são contínuas em $\mathbb{R}^2$, temos que $\nabla g(2,1)$ é ortogonal à curva dada em (I) no ponto $(2,1)$. Portanto de (I) temos que

$$\nabla f(x_0, y_0) \bullet \nabla g(2,1) = 0\ . \tag{1}$$

Notemos que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ pois suas derivadas parciais de primeira ordem são polinômios, e portanto são contínuas em $\mathbb{R}^2$. De f ser diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e de (II), temos que

$$\frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \bullet \vec{w}\,. \tag{2}$$

Como

$$\nabla g(2,1) = (12 - 1 - 2 - 12\,,\, 8 - 6 - 4) = (-3, -2)$$
$$\nabla f(x_0, y_0) = (3y_0^2 - 4x_0y_0\,,\, 6x_0, y_0 - 2x_0^2\,)\,,$$

temos, de (1) e (2), que $-9y_0^2 + 12x_0y_0 - 12x_0y_0 + 4x_0^2 = 0$ e $3y_0^2 - 4x_0y_0 + 6x_0y_0 - 2x_0^2 = 9$. Da primeira equação temos que $x_0 = \frac{3y_0}{2}$ ou $x_0 = \frac{-3y_0}{2}$. Da segunda equação temos que $2x_0^2 = 3y_0^2 + 2x_0y_0 - 9$.

Para $x_0 = \frac{3y_0}{2}$ temos $\frac{9y_0^2}{2} = 3y_0^2 + 3y_0^2 - 9$, e assim $y_0 = \sqrt{6}$ ou $y_0 = -\sqrt{6}$.

Para $x_0 = \frac{-3y_0}{2}$ temos $\frac{9y_0^2}{2} = 3y_0^2 - 3y_0^2 - 9$, que não tem solução real.

Os pontos procurados são: $\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\,,\,\sqrt{6}\right)$ e $\left(\frac{-3\sqrt{6}}{2}\,,\,-\sqrt{6}\right)$.

4. **(2,5)** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que:

(I) a imagem da curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = \left(t^2 + t + 1, 2t + 3, \dfrac{5t+1}{t^2+1}\right)$ está contida no gráfico de f;

(II) a imagem da curva $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\mu(t) = (t^2 + t - 1, t + 2)$ está contida em uma curva de nível de f.

Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 3, f(1,3))$.

Como $\operatorname{Im}\gamma \subset G_f$, temos $\dfrac{5t+1}{t^2+1} = f(t^2+t+1, 2t+3)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Em particular, tomando $t=0$, obtemos $f(1,3) = 1$.

Sendo f diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e γ' diferenciável em $\mathbb{R}$, segue pela regra da cadeia que, para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt} f(t^2+t+1, 2t+3) = \frac{\partial f}{\partial x}(t^2+t+1, 2t+3)\cdot(2t+1) + \frac{\partial f}{\partial y}(t^2+t+1, 2t+3)\cdot 2 \quad (1)$$

Por outro lado, $$\frac{d}{dt}\left(\frac{5t+1}{t^2+1}\right) = \frac{5(t^2+1) - 2t(5t+1)}{(t^2+1)^2} \quad (2)$$

Igualando (1) e (2) e fazendo $t=0$, segue que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,3) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(1,3) = 5 \quad \text{(I)}$$

Como a imagem de μ está contida em uma curva de nível, obtemos, para todo $t \in \mathbb{R}$

$$f(t^2+t-1, t+2) = f(t^2+t-1, t+2)\big|_{t=1} = f(1,3)$$
$$= 1 \quad \text{(como visto acima)}.$$

A

Usando novamente a regra da cadeia, obtemos então:

$$0 = \frac{d}{dt}(1) = \frac{d}{dt} f(t^2+t-1, t+2)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(t^2+t-1, t+2)\cdot(2t+1) + \frac{\partial f}{\partial y}(t^2+t-1, t+2)\cdot$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Tomando $t = 1$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,3)\cdot 3 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,3) = 0 \quad \text{II}$$

De II, obtemos $\frac{\partial f}{\partial y}(1,3) = -3\,\frac{\partial f}{\partial x}(1,3)$ e,

substituindo em I:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,3) - 6\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(1,3) = 5 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(1,3) = -1}$$

e então $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(1,3) = 3}$

A equação do plano tangente ao G_f em $(1,3,f(1,3)) = (1,3,1)$ é, portanto:

$$z - 1 = (-1)\cdot(x-1) + 3\cdot(y-3)$$ ou

$$z = 1 - x + 1 - 9 + 3y \Leftrightarrow$$

$$\boxed{z = -x + 3y - 7}$$

4. **(2,5)** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que:

(I) a imagem da curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = \left(2t+3, t^2+t+1, \dfrac{5t+1}{t^2+1}\right)$ está contida no gráfico de f;

(II) a imagem da curva $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\mu(t) = (t+2, t^2+t-1)$ está contida em uma curva de nível de f.

Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(3, 1, f(3,1))$.

Como $\operatorname{Im} \gamma \subset$ Gráfico de f, temos $\dfrac{5t+1}{t^2+1} = f(2t+3, t^2+t+1)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Em particular, tomando $t=0$, obtemos $f(3,1) = 1$.

Sendo f diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e γ diferenciável em $\mathbb{R}$, segue, pela regra da cadeia, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dt} f(2t+3, t^2+t+1) = \frac{\partial f}{\partial x}(2t+3, t^2+t+1) \cdot 2 + \frac{\partial f}{\partial y}(2t+3, t^2+t+1) \cdot (2t+1) \quad (1)$$

Por outro lado,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{5t+1}{t^2+1}\right) = \frac{5(t^2+1) - 2t(5t+1)}{(t^2+1)^2} \quad (2)$$

Igualando (1) e (2) e fazendo $t=0$, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3,1) \cdot 2 + \frac{\partial f}{\partial y}(3,1) = 5. \quad \text{I}$$

Como a imagem de μ está contida em uma curva de nível, segue que

$$f(t+2, t^2+t-1) = f(t+2, t^2+t-1) = f(3,1) = 1$$

([illegible] visto acima)

Usando novamente a regra da cadeia, obtemos B

$$0 = \frac{d}{dt}(1) = \frac{d}{dt} f(t+2, t^2+t-1)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(t+2, t^2+t-1) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(t+2, t^2+t-1) \cdot (2t+1),$$

para $t \in \mathbb{R}$. Fazendo $t = 1$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3,1) + \frac{\partial f}{\partial y}(3,1)3 = 0 \quad \text{II}$$

De II, obtemos $\frac{\partial f}{\partial x}(3,1) = -3\frac{\partial f}{\partial y}(3,1)$ e,

substituindo em I:

$$-6\frac{\partial f}{\partial y}(3,1) + \frac{\partial f}{\partial y}(3,1) = 5 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(3,1) = -1$$

e então $\frac{\partial f}{\partial x}(3,1) = 3$.

A equação do plano tangente ao G_f em $(3, 1, f(3,1)) = (3, 1, 1)$ é, portanto:

$$z - 1 = 3 \cdot (x-3) + (-1) \cdot (y-1) \Leftrightarrow$$

$$z = 1 + 3x - 9 - y + 1 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{z = 3x - y - 7}$$