

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Determine se F é contínua no ponto $(0, 0)$.

b) Dado um vetor $\vec{u} = (a, b)$ com $\|\vec{u}\| = 1$, calcule, caso exista, a derivada direcional de F na direção de $\vec{u}$ em $(0, 0)$,

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}}(0, 0).$$

c) Decida se F é diferenciável no ponto $(0, 0)$. Justifique.

a) Para $(x, y) \neq (0, 0)$, temos:

$$F(x, y) = x \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\text{Agora: } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} x = 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{y^2}{y^2} = 1$$

$$\therefore 0 = F(0, 0) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} F(x, y) \Rightarrow F \text{ é contínua em } (0, 0).$$

b) Para $t \neq 0$,

$$\frac{F((0, 0) + t\vec{u}) - F(0, 0)}{t} = \frac{F(ta, tb)}{t} = \frac{t^3 ab^2}{(t^2 a^2 + t^2 b^2)t} = \frac{t^3 ab^2}{t^3 (a^2 + b^2)} = ab^2$$

$$\therefore \frac{\partial F}{\partial \vec{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} ab^2 = ab^2$$

c) Sendo $\vec{u} = (1, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1)$, segue do item b) que

$$0 = \frac{\partial F}{\partial \vec{u}}(0, 0) = \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) \quad \text{e} \quad 0 = \frac{\partial F}{\partial \vec{v}}(0, 0) = \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0)$$

Suponhamos que F seja diferenciável em $(0, 0)$.

Então segue que, para todo vetor $\vec{u} = (a, b)$

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}}(0, 0) = \nabla F(0, 0) \cdot \vec{u} = 0$$

Mas, pelo item b), $\frac{\partial F}{\partial \vec{u}}(0, 0) \neq 0$ se a e b são ambos não nulos.
 $\therefore F$ não é diferenciável em $(0, 0)$

Solução alternativa do item c. Se $(h, k) \neq (0, 0)$

$$\begin{aligned} E(h, k) &= F(0+h, 0+k) - F(0, 0) - \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) \cdot h - \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) \cdot k \\ &= \frac{hk^2}{h^2+k^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{E(h, k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}}$$

Tomando $h=k$ e $k>0$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^3}{(2h^2)^{3/2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Portanto, não é verdade que $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$

e concluímos que F não é diferenciável em $(0,0)$.

1)[3,0] Considere a função $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Determine se F é contínua no ponto $(0, 0)$.

b) Dado um vetor $\vec{u} = (a, b)$ com $\|\vec{u}\| = 1$, calcule, caso exista, a derivada direcional de F na direção de $\vec{u}$ em $(0, 0)$,

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}}(0, 0).$$

c) Decida se F é diferenciável no ponto $(0, 0)$. Justifique.

a) Para $(x, y) \neq (0, 0)$, temos $F(x, y) = y \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2}$

Como $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} y = 0$ e $0 \leq \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2}{x^2} = 1$, segue que

$$0 = F(0, 0) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} F(x, y) \Rightarrow F \text{ é contínua em } (0, 0)$$

b) Para $t \neq 0$,

$$\frac{F(0, 0) + t\vec{u} - F(0, 0)}{t} = \frac{F(ta, tb)}{t} = \frac{t^3 a^2 b}{(t^2 a^2 + t^2 b^2) \cdot t} = \frac{t^3 a^2 b}{t^3 (a^2 + b^2)} = a^2 b$$

$$\therefore \frac{\partial F}{\partial \vec{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} a^2 b = a^2 b$$

c) Sendo $\vec{u} = (1, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1)$, segue do item b) que

$$0 = \frac{\partial F}{\partial \vec{u}}(0, 0) = \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) \quad \text{e} \quad 0 = \frac{\partial F}{\partial \vec{v}}(0, 0) = \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0)$$

Suponhamos que F seja diferenciável em $(0, 0)$.

Então temos, para todo vetor $\vec{u} = (a, b)$

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}}(0, 0) = \nabla F(0, 0) \cdot \vec{u} = 0$$

Mas, pelo item b) $\frac{\partial F}{\partial \vec{u}}(0, 0) \neq 0$ se a e b são ambos não nulos

$\therefore F$ não pode ser diferenciável em $(0, 0)$.

Solução alternativa do item c

Se $(h,k) \neq (0,0)$

$$\frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{F(0+h,0+k) - F(0,0) - \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) \cdot h - \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) \cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$\frac{h^2 k}{(h^2+k^2) \cdot \sqrt{h^2+k^2}}$$

Tomando $h=k$, $k>0$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^3}{(2h^2)^{3/2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Portanto, não é verdade que $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$

e F não é diferenciável em $(0,0)$.

2)[3,5] Seja $f = f(x, y)$ uma função de classe C^2 e seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(u, v) = uf(u^2 - v, u + 2v).$$

a) Determine $\frac{\partial g}{\partial u}(u, v)$ e $\frac{\partial g}{\partial v}(u, v)$ em função das derivadas parciais de f .

b) Determine $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v)$ em função das derivadas parciais de f .

c) Calcule $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(-2, 3)$, sabendo que

$$\nabla f(1, 4) = (3, 5), \quad f(1, 4) = -3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 4) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 4) = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 4) = -1.$$

a) Pela regra da cadeia

$$g_u(u, v) = f(u^2 - v, u + 2v) + u \left[f_x(u^2 - v, u + 2v) \cdot (2u) + f_y(u^2 - v, u + 2v) \cdot (1) \right]$$

$$g_v(u, v) = u \cdot \left[f_x(u^2 - v, u + 2v) \cdot (-1) + f_y(u^2 - v, u + 2v) \cdot (2) \right]$$

b) Como $f \in C^2$, pela regra da cadeia obtemos

$$g_{vu}(u, v) = (g_v)_u(u, v) = \left[f_x(u^2 - v, u + 2v) \cdot (-1) + f_y(u^2 - v, u + 2v) \cdot (2) \right]$$

$$+ u \left[f_{xx}(u^2 - v, u + 2v) \cdot (-1) \cdot (2u) + f_{xy}(u^2 - v, u + 2v) \cdot (-1) \cdot (1) + \right. \\ \left. + f_{yx}(u^2 - v, u + 2v) \cdot (2) \cdot (2u) + f_{yy}(u^2 - v, u + 2v) \cdot (2) \cdot (1) \right]$$

$f \in C^2$ então
por Schwarz

$$\underline{=} -f_x(u^2 - v, u + 2v) + 2f_y(u^2 - v, u + 2v) - 2u^2 f_{xx}(u^2 - v, u + 2v) \\ + u(4u - 1)f_{xy}(u^2 - v, u + 2v) + 2u f_{yy}(u^2 - v, u + 2v)$$

c) Como

$$x(u, v) = u^2 - v$$

$$y(u, v) = u + 2v$$

$$u = -2$$

$$v = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} x(u, v) = u^2 - v \\ y(u, v) = u + 2v \\ u = -2 \\ v = 3 \end{array} \right\} \text{então} \begin{cases} x(-2, 3) = 4 - 3 = 1 \\ y(-2, 3) = -2 + 6 = 4 \end{cases}$$

So go,

$$g_{uv}(-2, 3) = -f_x(1, 4) + 2 f_y(1, 4) - 8 f_{xx}(1, 4) \\ + (-2)(-9) f_{xy}(1, 4) + (-4) f_{yy}(1, 4)$$

Como

$$\nabla f(1, 4) = (f_x(1, 4), f_y(1, 4)) = (3, 5)$$

$$f_{xx}(1, 4) = 1$$

$$f_{xy}(1, 4) = 1$$

$$e f_{yy}(1, 4) = -1$$

Seus

$$g_{uv}(-2, 3) = -3 + 2 \cdot (5) - 8 \cdot (1) + 18 \cdot (1) - 4 \cdot (-1) \\ = -3 + 10 - 8 + 18 + 4 \\ = 21$$

2)[3,5] Seja $f = f(x, y)$ uma função de classe C^2 e seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(u, v) = v f(-u + v^2, 2u + v).$$

a) Determine $\frac{\partial g}{\partial u}(u, v)$ e $\frac{\partial g}{\partial v}(u, v)$ em função das derivadas parciais de f .

b) Determine $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v)$ em função das derivadas parciais de f .

c) Calcule $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(3, -2)$, sabendo que

$$\nabla f(1, 4) = (5, 3), f(1, 4) = -2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 4) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 4) = 1 \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 4) = -1.$$

a) Pela Regra da Cadeia,

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = v \left[\frac{\partial f}{\partial x}(-u + v^2, 2u + v) \cdot (-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(-u + v^2, 2u + v) \cdot (2) \right].$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = f(-u + v^2, 2u + v) +$$

$$+ v \left[\frac{\partial f}{\partial x}(-u + v^2, 2u + v) \cdot (2v) + \frac{\partial f}{\partial y}(-u + v^2, 2u + v) \right].$$

b) Novamente, pela Regra da Cadeia ($f \in C^2$),

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial g}{\partial v} \right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(-u + v^2, 2u + v) \cdot (-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(-u + v^2, 2u + v) \cdot (2) +$$

$$+ v \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-u + v^2, 2u + v) \cdot (-2v) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-u + v^2, 2u + v) \cdot (4v) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-u + v^2, 2u + v) \cdot (-1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-u + v^2, 2u + v) \cdot (2) \right] =$$

$f \in C^2$
pelo Teo
de
Schwarz
 $\Downarrow$

$$= 2 \frac{\partial f}{\partial y}(-u + v^2, 2u + v) - \frac{\partial f}{\partial x}(-u + v^2, 2u + v) + 2v \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-u + v^2, 2u + v)$$

$$+ (-2v^2) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-u + v^2, 2u + v) + v(4v - 1) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-u + v^2, 2u + v).$$

$$c) \quad x(u,v) = -u + v^2$$

$$y(u,v) = 2u + v$$

$$u = 3$$

$$v = -2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(3, -2) = -3 + 4 = 1 \\ y(3, -2) = 6 - 2 = 4 \end{cases}$$

B

$\therefore$ pelo que foi calculado acima, pelo resultados obtidos no item b) e sabendo que $\nabla f(1,4) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,4), \frac{\partial f}{\partial y}(1,4) \right)$ obtemos que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(3, -2) &= 2 \cdot \overbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(1,4)}^3 - \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(1,4)}^5 + (-4) \cdot \overbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,4)}^{-1} + \\ &\quad + (-8) \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,4)}_1 + (-2)(-9) \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,4)}_1 \end{aligned}$$

$$= 6 - 5 + 4 - 8 + 18$$

$$= 28 - 13 = 15$$

$$\underline{\text{Resp:}} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(3, -2) = 15$$

Veja o gabarito da questão 3B!

3)[3,5] Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

a) Sabendo que a imagem da curva $\gamma(t) = (2t, t^2 + 1)$ está contida na curva de nível $f(x, y) = 8$, encontre um vetor $\vec{u}$ tal que $\nabla f(4, 5)$ seja paralelo ao vetor $\vec{u}$.

b) Sabendo que o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(4, 5, 8)$ passa pelo ponto $(0, 3, 0)$, determine a equação deste plano tangente.

c) Dentre as curvas abaixo, uma não pode ter sua imagem contida no gráfico da função f dos itens anteriores. Decida qual, e justifique o porquê.

$$i) \alpha(t) = \left(t, t+1, \frac{t^2}{3} - \frac{4t}{3} + 8 \right)$$

$$ii) \mu(t) = (t^2, t+3, t^2+t^3-2t)$$

a) f diferenciável e γ derivável.

Como $\gamma(2) = (4, 5)$, se $\text{Im}(\gamma) \subset$ na curva de nível 8 do f ,

então $\nabla f(4, 5) \perp \gamma'(2)$.

Mas $\gamma'(t) = (2, 2t) \Rightarrow \gamma'(2) = (2, 4)$. Como $\nabla f(4, 5) \perp (2, 4)$

então $\nabla f(4, 5) \parallel (-2, 4)$

b) Suponhamos que $\nabla f(4, 5) = (-2a, a)$ para algum $a \in \mathbb{R}$. Logo, a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(4, 5, 8)$ é da forma

$$-2a(x-4) + a(y-5) = z-8$$

Como $(0, 3, 0)$ pertence ao plano temos:

$$-2a(-4) + a(3-5) = -8 \Leftrightarrow a = -4/3.$$

Logo, plano tangente : $4/3(x-4) - 4/3(y-5) = z-8$

vetor normal: $\vec{n} = (4/3, -4/3, -4)$

$$\nabla f(4, 5) = (4/3, -4/3)$$

c) $\text{Im}(\mu)$ não pode estar contida no $\text{Graf}(f)$

JUSTIFICATIVA: $\mu(2) = (4, 5, 8)$. Se $\text{Im}(\mu) \subset \text{Graf}(f)$, então o vetor tangente $\mu'(2)$ deve ser paralelo ao plano tangente ao $\text{Graf}(f)$ no ponto $(4, 5, 8)$. Ou seja, temos que ter

$$\mu'(2) \cdot \vec{n} = 0,$$

onde $\vec{n} = (4/3, -4/3, -4)$ é um vetor normal ao plano tangente.

Mas $\mu'(t) = (2t, 1, 2t+3t^2-2)$ e $\mu'(2) = (4, 1, 14)$ e verificamos que

$$\vec{n} \cdot \mu'(2) = (4/3, -4/3, -4) \cdot (4, 1, 14) = -14/3 \neq 0$$

Logo, $\text{Im}(\mu)$ não pode estar contida em $\text{Graf}(f)$.