2ª Prova de MAT-2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II
POLI - USP - 23/10/2006

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
TOTAL	

Nome: ______________________ Turma: ____

Assinatura: ______________________

JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS AFIRMAÇÕES

1. (2,0) Verifique a existência dos limites abaixo. Justifique a sua resposta.

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}\text{sen}\left(\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right)$

   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x-y}$

(a) $$\frac{x^2y}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\text{ltda.}} \cdot \underbrace{y}_{\to 0 \text{ quando } (x,y)\to(0,0)} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Daí $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \text{sen}\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right) = \lim_{u\to 0} \text{sen}\, u = 0$$

Por outro lado, $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ é limitada, pois

$$\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1.$$

Daí

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{xy}{x^2+y^2}}_{\text{limitado}} \operatorname{sen}\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right) = 0$$

$\operatorname{sen}\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right) \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$

(b) Seja $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x-y}$

$f(x,y) = 1 \iff x^2y = x-y \iff y = \dfrac{x}{x^2+1}$

Seja $\gamma(t) = \left(t, \dfrac{t}{t^2+1}\right)$. $\gamma(0) = (0,0)$ e

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} 1 = 1$$

Por outro lado, seja $\mu(t) = (t,0)$. $\mu(0) = (0,0)$.

Então $f(\mu(t)) = \dfrac{0}{t} = 0$

Logo $\lim_{t\to 0} f(\mu(t)) = 0 \neq 1 = \lim_{t\to 0} f(\gamma(t))$

Logo, o limite pedido não existe.

$2^{\underline{a}}$ Prova de MAT-2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II
POLI - USP - 23/10/2006

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
TOTAL	

Nome: ______________________ Turma: ____

Assinatura: ______________________

JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS AFIRMAÇÕES

1. (2,0) Verifique a existência dos limites abaixo. Justifique a sua resposta.

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}\text{sen}\left(\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right)$

   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{y-x}$

(a) $\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} = \underbrace{\dfrac{y^2}{x^2+y^2}}_{\text{limitado}} \cdot \underbrace{x}_{\substack{\downarrow (x,y)\to(0,0) \\ 0}} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

Daí $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \text{sen}\left(\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right) = \lim\limits_{u\to 0} \text{sen}\, u = 0$

Por outro lado, $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ é limitada, pois

$$\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1.$$

Daí:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{xy}{x^2+y^2}}_{\text{limitada}} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right)}_{\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)}\ 0} = 0.$$

(b) Seja $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x-y}$

$f(x,y) = 1 \iff xy^2 = x - y \iff x = \dfrac{y}{1-y^2}$

Seja $\gamma(t) = \left(\dfrac{t}{1-t^2}, t\right)$. $\gamma(0) = (0,0)$ e

$f(\gamma(t)) = 1 \quad \therefore \quad \lim\limits_{t\to 0} f(\gamma(t)) = 1$

Por outro lado, seja $\mu(t) = (t,0)$. $\mu(0) = (0,0)$ e

$f(\mu(t)) = \dfrac{0}{t} = 0$. Logo

$$\lim_{t\to 0} f(\mu(t)) = 0 \neq 1 = \lim_{t\to 0} f(\gamma(t))$$

Logo, o limite pedido não existe

2. (3,0) Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x^2+y^2)-1}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) É $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ contínua em $(0,0)$?

(c) Mostre que f é diferenciável em $(0,0)$.

(a) se $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2x\,(x^2+y^2)\,\text{sen}(x^2+y^2) - 2x.\,[\cos(x^2+y^2)-1]}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos h^2 - 1}{h^3} =$$

$$\underset{\text{L'Hopital}}{=} -\lim_{h\to 0} \frac{2h\,\text{sen}\,h^2}{3h^2} = -\frac{2}{3}\Big(\underbrace{\lim_{h\to 0} h}_{=0}\Big).\Big(\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}\,h^2}{h^2}}_{=1}\Big) = 0$$

(b) $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x\,\underbrace{\frac{\text{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}_{\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)}\ 1} - 2x\,\underbrace{\frac{\cos(x^2+y^2)-1}{(x^2+y^2)^2}}_{\to\ ?}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x^2+y^2)-1}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{u\to 0}\frac{\cos u - 1}{u^2} \underset{\text{(L'Hopital}}{=} -\lim_{u\to 0}\frac{\text{sen}\,u}{2u} =$$

Logo, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2.0.1 - 2.0.\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

Logo, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $(0,0)$.

(c) Como $f(x,y) = f(y,x)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ é contínua em $(0,0)$, segue que (por simetria) $\frac{\partial f}{\partial y}$ também é contínua em $(0,0)$

Como ambas, $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$, são contínuas em $(0,0)$, segue que f é diferenciável em $(0,0)$.

2. (3,0) Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x^2+y^2)-1}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) É $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ contínua em $(0,0)$?

(c) Mostre que f é diferenciável em $(0,0)$.

(a) Se $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2y(x^2+y^2)\,\mathrm{sen}\,(x^2+y^2) - 2y[\cos(x^2+y^2)-1]}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos h^2 - 1}{h^3} = (\text{L'Hospital})$$

$$= -\lim_{h\to 0} \frac{2h\,\mathrm{sen}\,h^2}{3h^2} = -\frac{2}{3}\lim_{h\to 0} h \cdot \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,h^2}{h^2} = -\frac{2}{3}\cdot 0 \cdot 1 = 0$$

(b) $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y \underbrace{\frac{\mathrm{sen}\,(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}_{\substack{\downarrow (x,y)\to(0,0) \\ 1}} - 2y \underbrace{\frac{\cos(x^2+y^2)-1}{(x^2+y^2)^2}}_{\substack{\downarrow \\ ?}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x^2+y^2)-1}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{u\to 0}\frac{\cos u - 1}{u^2} = -\lim_{u\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,u}{2u} = -\frac{1}{2}$$

Logo $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2.0.1 - 2.0.\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Logo $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em $(0,0)$.

(c) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos h^2 - 1}{h^3} = 0$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\cos(h^2+k^2)-1}{(h^2+k^2)^{3/2}} =$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{\cos u - 1}{u^{3/2}} \underset{\text{L'Hospital}}{=} -\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{\frac{3}{2}u^{1/2}} =$$

$$= -\frac{2}{3} \lim_{u\to 0}\left(u^{1/2} \frac{\operatorname{sen} u}{u}\right) = -\frac{2}{3}\cdot 0 \cdot 1 = 0.$$

Logo f é diferenciável em $(0,0)$.

3. (2,5) Seja $f(x,y)$ uma função de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$ (isto é, todas as derivadas parciais até segunda ordem de f são contínuas em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$). Seja

$$g(u,v) = f(u^2 - v^2, 2uv).$$

(a) Calcule $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v)$ em termos das derivadas parciais de f.

(b) Sabendo que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 \text{ para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (*)$$

e que

$$f(0,y) = y^2 \text{ para todo } y \in \mathbb{R}, \qquad (**)$$

calcule $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(1,1)$.

(a) $g(u,v) = f(\underbrace{u^2 - v^2}_{x}, \underbrace{2uv}_{y})$

$$\boxed{\frac{\partial x}{\partial u} = 2u \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -2v \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 2v \quad \text{e } \frac{\partial y}{\partial v} = 2u}$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)(-2v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, 2u$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = -2v\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)(2u) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\, 2v\right] + 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + 2u\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\, 2u + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\, 2v\right]$$

Como f é de classe C^2, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ $\forall (x,y)$.

Logo
$$\boxed{\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = -4uv\, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + (4u^2 - 4v^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + 4uv\, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}$$

(b) Se $(u,v) = (1,1) \implies (x,y) = (0,2)$. Pelo item (a):

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(1,1) = 4\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,2) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,2)\right] + (4-4)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,2) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(0,2).$$

Por $(**)$ temos que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 2y$, e daí, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,2) = 4$. Usando $(*)$, temos
$$\boxed{\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(1,1) = 4 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 = 0}$$

3. (2,5) Seja $f(x,y)$ uma função de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$ (isto é, todas as derivadas parciais até segunda ordem de f são contínuas em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$). Seja

$$g(u,v) = f(2uv, u^2 - v^2).$$

(a) Calcule $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v)$ em termos das derivadas parciais de f.

(b) Sabendo que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 \text{ para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (*)$$

e que

$$f(x,0) = x^2 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, \quad (**)$$

calcule $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(1,1)$.

(a) $g(u,v) = f(\underbrace{2uv}_{x}, \underbrace{u^2 - v^2}_{y})$

$\dfrac{\partial x}{\partial u} = 2v$, $\dfrac{\partial x}{\partial v} = 2u$, $\dfrac{\partial y}{\partial u} = 2u$ e $\dfrac{\partial y}{\partial v} = -2v$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,2u + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)(-2v)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = 2\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right] + 2u\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,2v + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\,2u\right] - 2v\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\,2v + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\,2u\right]$$

Como f é de classe C^2, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ $\forall (x,y)$.

Logo
$$\boxed{\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 4uv\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right] + (4u^2 - 4v^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y).}$$

(b) Se $(u,v) = (1,1)$ então $(x,y) = (2,0)$. Pelo item (a),

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(1,1) = 2\frac{\partial f}{\partial x}(2,0) + 4\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,0) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,0)\right] + (4-4)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,0)$$

Por (**) temos que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 2x$. Logo $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,0) = 4$. Por (*) e (**) temos então que

$$\boxed{\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(1,1) = 2.4 + 4.2 = 16}$$

4. (2,5) (a) Seja $f(x, y)$ uma função diferenciável e tal que $f(t^3, 3t) = \ln t$, para todo $t > 0$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 3)$, sabendo que $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 3) = -\frac{2}{3}$.

(b) Seja $g(x, y) = x^3y^2 - x^2y^3 + 2xy^2$. Suponha que $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ é uma curva derivável cuja imagem de está contida na intersecção do gráfico de g com o gráfico da função f do item (a). Ache a equação da reta tangente à imagem de γ no ponto $(1, 3, g(1, 3))$.

a) $f(t^3, 3t) = \ln t,\ t > 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(t^3, 3t)\,3t^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(t^3, 3t).3 = \frac{1}{t},\ t > 0$

$(t=1) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,3).3 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,3).3 = 1$

$\frac{\partial f}{\partial y}(1,3) = -\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(1,3) = 1}$

b) $g(x,y) = x^3y^2 - x^2y^3 + 2xy^2$

$g(1,3) = 9 - 27 + 18 = 0$

$\nabla g(x,y) = (3x^2y^2 - 2xy^3 + 2y^2,\ 2x^3y - 3x^2y^2 + 4xy)$

$\nabla g(1,3) = (27 - 54 + 18,\ 6 - 27 + 12) = (-9, -9)$

$\nabla f(1,3) = \left(1, -\frac{2}{3}\right)$

$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2/3 & -1 \\ -9 & -9 & -1 \end{vmatrix} = \left(-\frac{25}{3}, +10, -15\right) = \frac{5}{3}(-5, 6, -9)$

$\boxed{X = (1,3,0) + \lambda(-5,6,-9),\ \lambda \in \mathbb{R}}$

4. (2,5) (a) Seja $f(x,y)$ uma função diferenciável e tal que $f(3t, t^3) = \ln t$, para todo $t > 0$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(3,1)$, sabendo que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(3,1) = -\dfrac{2}{3}$.

(b) Seja $g(x,y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 2x^2y$. Suponha que $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ é uma curva derivável cuja imagem está contida na intersecção do gráfico de g com o gráfico da função f do item (a). Ache a equação da reta tangente à imagem de γ no ponto $(3, 1, g(3,1))$.

a) $f(3t, t^3) = \ln t$, $t>0$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(3t, t^3)3 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(3t,t^3)3t^2 = \dfrac{1}{t}$, $t>0$

$(t=1) \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(3,1).3 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(3,1).3 = 1$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(3,1) = -\dfrac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(3,1) = 1.}$ //

b) $g(x,y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 2x^2y$

$g(3,1) = 9 - 27 + 12 = 0$

$\nabla g(x,y) = (2xy^3 - 3x^2y^2 + 4xy, 3x^2y^2 - 2x^3y + 2x^2)$

$\nabla g(3,1) = (6-27+12, 27-54+18) = (-9,-9)$

$\nabla f(3,1) = (1, -\frac{2}{3})$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -\frac{2}{3} & -1 \\ -9 & -9 & -1 \end{vmatrix} = \left(-\frac{25}{3}, +10, -15\right) = \frac{5}{3}(-5,6,-9)$$

$$\boxed{X = (3,1,0) + \lambda(-5,6,-9), \lambda \in \mathbb{R}}$$ //