

**Questão 1.**

- a) (1,5) Seja  $p(x)$  o polinômio de Taylor de ordem 4 da função  $f(x) = \sqrt{x}$  em torno do ponto  $x_0 = 1$ . Determine  $p(x)$  e mostre que:

$$|f(x) - p(x)| < \frac{7}{2^8}(x-1)^5, \text{ para todo } x > 1.$$

- b) (0,5) Use o item (a), com  $x = 1 + t^4$ , para encontrar um valor aproximado de  $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+t^4} dt$ .

- c) (0,5) Verifique que o erro na estimativa feita em (b) é inferior a  $\frac{1}{2^{30}}$ .

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x}, \quad x_0 = 1 \Rightarrow f(x_0) = 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{1}{2} \\ f''(x) &= -\frac{1}{4} x^{-3/2} \Rightarrow f''(x_0) = -\frac{1}{4} \\ f'''(x) &= \frac{3}{8} x^{-5/2} \Rightarrow f'''(x_0) = \frac{3}{8} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} f^{(4)}(x) &= -\frac{15}{16} x^{-7/2} \Rightarrow f^{(4)}(x_0) = -\frac{15}{16} \\ f^{(5)}(x) &= \frac{15}{16} \cdot \frac{7}{2} x^{-9/2} = \frac{15 \cdot 7}{2^5} x^{-9/2} \end{aligned}$$

Portanto:

$$(a) \quad p(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4} \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{3}{8} \frac{(x-1)^3}{3!} - \frac{15}{16} \frac{(x-1)^4}{4!}$$

Sabemos que  $f(x) - p(x) = \frac{f^{(5)}(\bar{x})}{5!} (x-1)^5$ , para algum  $\bar{x}$  entre 1 e  $x$ .

$$\begin{aligned} \text{Se } x > 1, \text{ então } 1 < \bar{x} < x \\ \Rightarrow 1 < \sqrt{\bar{x}} < \sqrt{x} \\ \Rightarrow 1 < (\sqrt{\bar{x}})^9 < (\sqrt{x})^9 \\ \Rightarrow (0 <) \frac{1}{(\sqrt{\bar{x}})^9} < 1 \end{aligned}$$

Logo,

$$|f(x) - p(x)| = \frac{15 \cdot 7}{2^5} (\bar{x})^{-9/2} \frac{(x-1)^5}{5!} < \frac{15 \cdot 7}{2^5} \cdot \frac{(x-1)^5}{\cancel{5} \cdot 4 \cdot \cancel{2}}$$

$$\Rightarrow |f(x) - p(x)| < \frac{7}{2^8} (x-1)^5, \text{ se } x > 1.$$

## Questões 1 - Continuação

Fazendo  $x = 1 + t^4$  ( $\Rightarrow x - 1 = t^4$ ) temos:

$$|f(1+t^4) - p(1+t^4)| < \frac{7}{2^8} (t^4)^5 = \frac{7}{2^8} t^{20}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{7}{2^8} t^{20} < \sqrt{1+t^4} - p(1+t^4) < \frac{7}{2^8} t^{20}$$

Calculando-se a integral, iremos obter:

$$\underbrace{-\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{7}{2^8} t^{20} dt}_{(*)} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+t^4} dt - \int_0^{\frac{1}{2}} p(1+t^4) dt \leq \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{7}{2^8} t^{20} dt}_{(*)}$$

$$(*) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{7}{2^8} t^{20} dt = \frac{7}{2^8} \frac{t^{21}}{21} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^8} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{21} < \frac{1}{2^{30}}$$

Portanto,

$$-\frac{1}{2^{30}} < \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+t^4} dt - \int_0^{\frac{1}{2}} p(1+t^4) dt < \frac{1}{2^{30}}$$

ou seja,  $\boxed{\left| \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+t^4} dt - \int_0^{\frac{1}{2}} p(1+t^4) dt \right| < \frac{1}{2^{30}}} \quad (c)$

e um valor aproximado para  $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+t^4} dt$  é

$$\int_0^{\frac{1}{2}} p(1+t^4) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[ 1 + \frac{1}{2} t^4 - \frac{1}{4} \frac{(t^4)^2}{2} + \frac{3}{8} \frac{(t^4)^3}{3!} - \frac{15}{16} \frac{(t^4)^4}{4!} \right] dt =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[ 1 + \frac{t^4}{2} - \frac{1}{8} t^8 + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3!} t^{12} - \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4!} t^{16} \right] dt =$$

$$= \left[ t + \frac{t^5}{10} - \frac{t^9}{9 \cdot 8} + \frac{1}{16} \frac{t^{13}}{13} - \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4!} \frac{t^{17}}{17} \right]_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2^5} - \frac{1}{72} \cdot \frac{1}{2^9} + \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{2^{13}} - \frac{15}{2^4} \cdot \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{17} \cdot \frac{1}{2^{17}}$$

(b)

**Questão 2.** Considere a função  $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{3 + 2x - 3y^2}}$  e seja  $\mathcal{C}$  a curva de nível de  $f$  que passa pelo ponto  $(3, 0)$ .

a) Usando o sistema de coordenadas abaixo:

i)  $(0,5)$  represente geometricamente o domínio de  $f$ ;

$$3 + 2x - 3y^2 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{2}y^2 - \frac{3}{2} \Rightarrow D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > \frac{3}{2}y^2 - \frac{3}{2}\}$$

Ou seja, o domínio de  $f$  é a região interna da parábola  $x = \frac{3}{2}y^2 - \frac{3}{2}$

ii)  $(1,0)$  faça um esboço da curva  $\mathcal{C}$ .

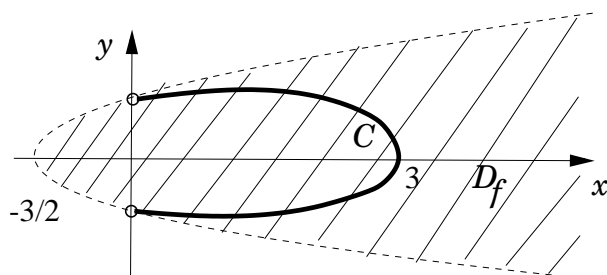
Seja  $k \in \text{Im}_f$  e considere  $\frac{x}{\sqrt{3 + 2x - 3y^2}} = k$ .

Como  $(3, 0) \in \mathcal{C}$ , então  $k = f(3, 0) = \frac{3}{\sqrt{9}} = 1$ .

$x = \sqrt{3 + 2x - 3y^2}$  (observe que  $x > 0$ )

$$x^2 = 3 + 2x - 3y^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + 3y^2 = 4 \Rightarrow \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$$

Ou seja, a curva  $\mathcal{C}$  é parte da elipse  $\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$ , na qual  $x > 0$ . (\*)



b)  $(1,0)$  Determine uma parametrização para a curva  $\mathcal{C}$ , isto é, encontre um intervalo  $I$  e uma função  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  contínua cuja imagem é  $\mathcal{C}$ .

Utilizando a relação fundamental da trigonometria em (\*), segue que uma parametrização para a curva  $\mathcal{C}$  é dada por

$$\gamma(t) = \left(1 + 2 \cos t, \frac{2}{\sqrt{3}} \sin t\right), \text{ com } 1 + 2 \cos t > 0$$

Portanto,  $\cos t > -\frac{1}{2}$ , ou seja,  $t \in I = ] -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}[$ .

c) (0,5) Decida se existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x,y)$ .

Considere a curva  $\gamma_1(t) = (t, 1)$ , com  $t > 0$ , e a curva  $\gamma$  como no item (b).

Temos que

$$(a) \lim_{t \rightarrow 0^+} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{\sqrt{3+2t-3}} = 0$$

$$(b) \lim_{t \rightarrow \frac{2\pi}{3}} f(\gamma(t)) = \lim_{t \rightarrow \frac{2\pi}{3}} 1 = 1 \text{ } (\gamma \text{ é a curva de nível } 1 \text{ de } f \text{ e } \gamma(t) \rightarrow (0, 1), \text{ quando } t \rightarrow \frac{2\pi}{3})$$

Portanto, NÃO existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x,y)$ .

**Questão 2.** Considere a função  $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{12+4x-12y^2}}$  e seja  $\mathcal{C}$  a curva de nível de  $f$  que passa pelo ponto  $(6,0)$ .

a) Usando o sistema de coordenadas abaixo:

i)  $(0,5)$  represente geometricamente o domínio de  $f$ ;

$$12 + 4x - 12y^2 > 0 \Rightarrow x > 3y^2 - 3 \Rightarrow D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 3y^2 - 3\}$$

Ou seja, o domínio de  $f$  é a região interna da parábola  $x = 3y^2 - 3$

ii)  $(1,0)$  faça um esboço da curva  $\mathcal{C}$ .

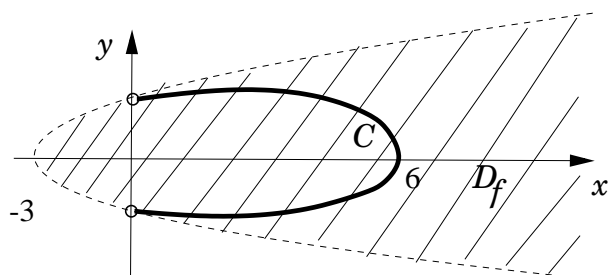
Seja  $k \in \text{Im}_f$  e considere  $\frac{x}{\sqrt{12+4x-12y^2}} = k$ .

Como  $(6,0) \in \mathcal{C}$ , então  $k = f(6,0) = \frac{6}{\sqrt{36}} = 1$ .

$x = \sqrt{12+4x-12y^2}$  (observe que  $x > 0$ )

$$x^2 = 12 + 4x - 12y^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 12y^3 = 16 \Rightarrow \left(\frac{x-2}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$$

Ou seja, a curva  $\mathcal{C}$  é parte da elipse  $\left(\frac{x-2}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$ , na qual  $x > 0$ . (\*)



b)  $(1,0)$  Determine uma parametrização para a curva  $\mathcal{C}$ , isto é, encontre um intervalo  $I$  e uma função  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  contínua cuja imagem é  $\mathcal{C}$ .

Utilizando a relação fundamental da trigonometria em (\*), segue que uma parametrização para a curva  $\mathcal{C}$  é dada por

$$\gamma(t) = \left(2 + 4 \cos t, \frac{2}{\sqrt{3}} \sin t\right), \text{ com } 2 + 4 \cos t > 0$$

Portanto,  $\cos t > -\frac{1}{2}$ , ou seja,  $t \in I = ] -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}[$ .

c) (0,5) Decida se existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x,y)$ .

Considere a curva  $\gamma_1(t) = (t, 1)$ , com  $t > 0$ , e a curva  $\gamma$  como no item (b).

Temos que

$$(a) \lim_{t \rightarrow 0^+} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{\sqrt{12+4t-12}} = 0$$

$$(b) \lim_{t \rightarrow \frac{2\pi}{3}} f(\gamma(t)) = \lim_{t \rightarrow \frac{2\pi}{3}} 1 = 1 \text{ } (\gamma \text{ é a curva de nível } 1 \text{ de } f \text{ e } \gamma(t) \rightarrow (0, 1), \text{ quando } t \rightarrow \frac{2\pi}{3})$$

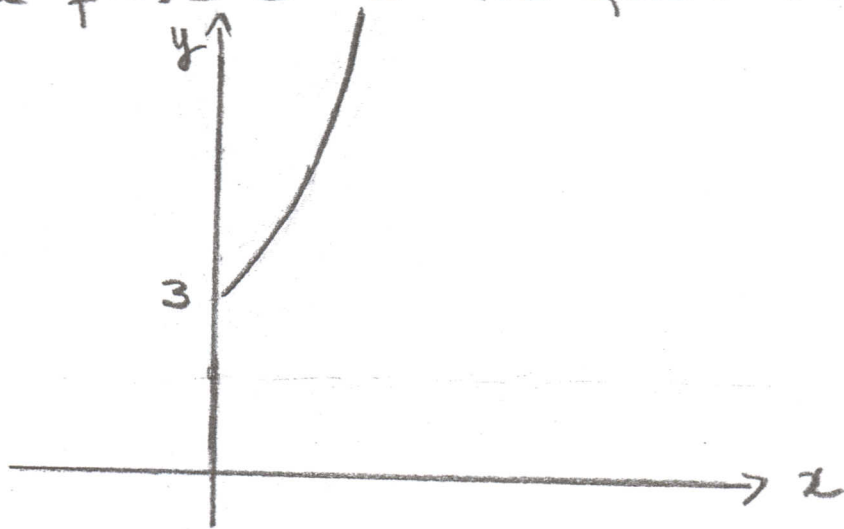
Portanto, NÃO existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x,y)$ .

Questão 3. Esboce a imagem das seguintes curvas planas. Justifique.

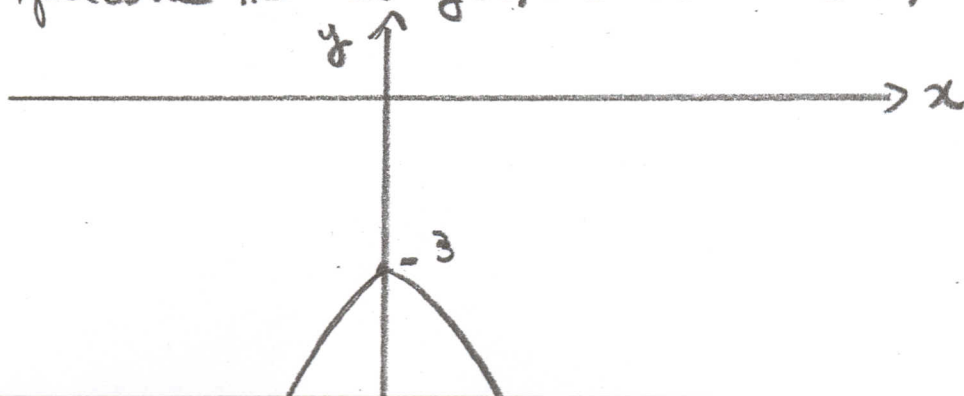
a) (1,0)  $\gamma(t) = (\ln(t^2+1), t^2+3), t \in \mathbb{R}$

b) (1,0)  $\gamma(t) = (\operatorname{tg} t, 3\operatorname{sect} t), t \in ]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

a)  $\delta(t) = (x(t), y(t))$  para  $x(t) = \ln(t^2+1)$  e  $y(t) = t^2+3$   
 Como  $y(t) = e^{x(t)} + 2$ , a imagem de  $\delta$  está contida no gráfico de  $f(x) = e^x + 2$ . Como o domínio de  $\delta$  é  $\mathbb{R}$ ,  $x(t) = \ln(t^2+1)$  percorre o intervalo  $[\ln(1), +\infty[$ , que é  $[0, +\infty[$ . Assim, a imagem de  $\delta$  é a parte do gráfico de  $f(x) = e^x + 2$  na qual  $x \geq 0$



b)  $\delta(t) = (x(t), y(t))$  para  $x(t) = \operatorname{tg} t$  e  $y(t) = 3\operatorname{sect} t$   
 Como  $\left(\frac{y(t)}{3}\right)^2 = 1 + (x(t))^2$ , a imagem de  $\delta$  está contida no hipérbolo de equação  $\frac{y^2}{9} - x^2 = 1$ . Como  $t \in ]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ ,  $x(t) = \operatorname{tg} t$  percorre  $\mathbb{R}$  e  $y(t) = 3\operatorname{sect} t \in ]-\infty, -3]$

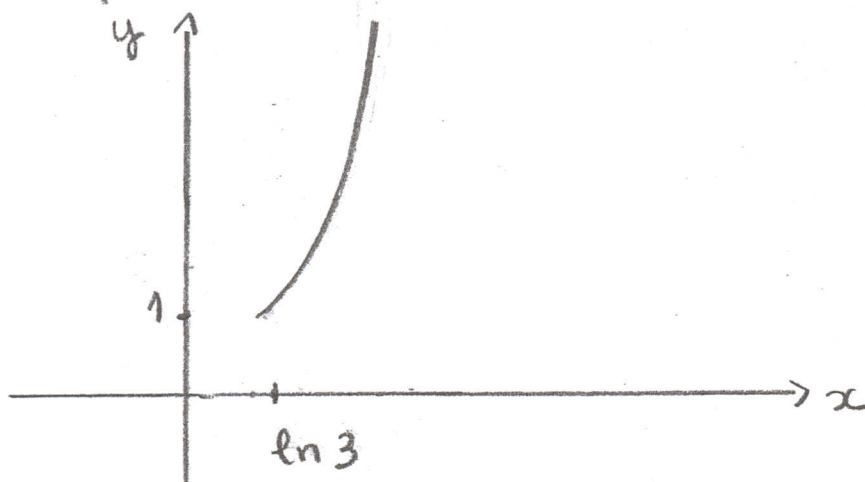


Questão 3. Esboce a imagem das seguintes curvas planas. Justifique.

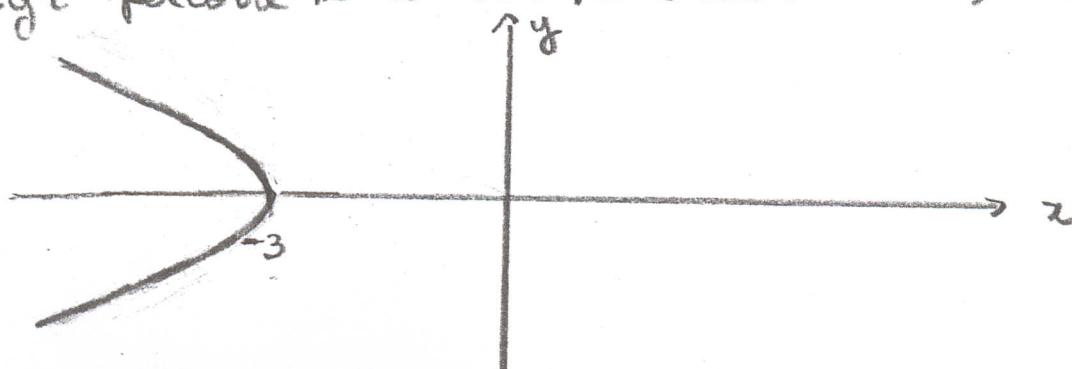
a) (1,0)  $\gamma(t) = (\ln(t^2 + 3), t^2 + 1), t \in \mathbb{R}$

b) (1,0)  $\gamma(t) = (3 \sec t, \operatorname{tg} t), t \in ]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

a)  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  para  $x(t) = \ln(t^2 + 3)$  e  $y(t) = t^2 + 1$   
 Como  $y(t) = e^{x(t)} - 2$ , a imagem de  $\gamma$  está contida  
 no gráfico de  $f(x) = e^x - 2$ . Como o domínio de  
 $\gamma$  é  $\mathbb{R}$ ,  $x(t) = \ln(t^2 + 3)$  percorre o intervalo  
 $[\ln(3), +\infty[$ . Assim, a imagem de  $\gamma$  é a parte  
 do gráfico de  $f(x) = e^x - 2$  na qual  $x \geq \ln 3$



$\gamma(t) = (x(t), y(t))$  para  $x(t) = 3 \sec t$  e  $y(t) = \operatorname{tg} t$   
 Como  $\left(\frac{x(t)}{3}\right)^2 = 1 + (y(t))^2$ , a imagem de  $\gamma$  está contida  
 na hipérbole de equação  $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1$ . Como  $t \in ]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ ,  
 $y(t) = \operatorname{tg} t$  percorre  $\mathbb{R}$  e  $x(t) = 3 \sec t \in ]-\infty, -3]$





Questão 4. Calcule, caso exista. Se não existir, explique por quê.

a) (1,5)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(3x^2 + 4y^2) \ln(x^2 + y^2)}{3x^2 + 4y^2}$

b) (1,0)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^3}{x^4 - y^6}$

a) 1)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(3x^2 + 4y^2)}{3x^2 + 4y^2} = 1$  pois  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen } t}{t} = 1$

e  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (3x^2 + 4y^2) = 0$

2)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) = 0$  pois

$\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln t}{1/t} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} (-t) = 0$

e  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) = 0$

3)  $0 \leq \frac{3x^2 + 4y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{4(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 4$  se  $(x,y) \neq (0,0)$

De 2) e 3) segue que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underbrace{\frac{3x^2 + 4y^2}{x^2 + y^2}}_{\text{limitada}} \underbrace{(x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)}_0 = 0$

Logo

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(3x^2 + 4y^2)}{3x^2 + 4y^2} \cdot \underbrace{\left( \frac{3x^2 + 4y^2}{x^2 + y^2} \right) (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)}_0 = 0$

Portanto

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \text{sen}(3x^2 + 4y^2) \ln(x^2 + y^2) = 0$

4b) Seja  $f(x,y) = \frac{x^2 y^3}{x^4 - y^6}$

A

Sejam  $\gamma_1(t) = (t, 0)$ ,  $t \neq 0$

e  $\gamma_2(t) = (t^6, 2t^4)$ ,  $t \neq 0$

Temos que  $\gamma_1(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} (0,0)$  e  $\gamma_2(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} (0,0)$

Mas  $\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t^4} = 0 = L_1$

e  $\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t^6)^2 (2t^4)^3}{(t^6)^4 - (2t^4)^6} =$

$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2^3 t^{24}}{(1 - 2^6) t^{24}} = \frac{2^3}{1 - 2^6} = L_2$

Como  $L_1 \neq L_2$ , não existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$

Questão 4. Calcule, caso exista. Se não existir, explique por quê.

a) (1,5)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(4x^2 + 3y^2) \ln(x^2 + y^2)}{4x^2 + 3y^2}$

b) (1,0)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^2}{x^6 - y^4}$

a) 1)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(4x^2 + 3y^2)}{4x^2 + 3y^2} = 1$  pois  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen } t}{t} = 1$

e  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (4x^2 + 3y^2) = 0$

2)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) = 0$  pois

$\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln t}{1/t} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} (-t) = 0$

3)  $0 \leq \frac{4x^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{4(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$  se  $(x,y) \neq (0,0)$

De 2) e 3) segue que  $0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underbrace{\frac{4x^2 + 3y^2}{x^2 + y^2}}_{\text{limitada}} \underbrace{(x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)}_{\downarrow 0}$

Logo  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(4x^2 + 3y^2)}{4x^2 + 3y^2} \underbrace{\left( \frac{4x^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} \right) (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)}_{\downarrow 0} = 0$ .

Portanto

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \text{sen}(4x^2 + 3y^2) \ln(x^2 + y^2) = 0$