1. a) (1,5 ponto) Esboce a imagem da curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por A

$$\gamma(t) = (\text{sen}^4 t + 2\cos^2 t - 2,\ \text{sen}^2 t - 1).$$

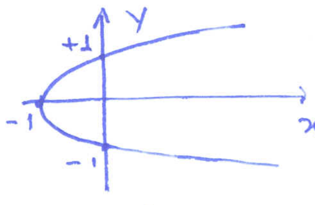
b) (1,5 ponto) Considere $F(x,y) = \dfrac{10x^2 - 2y}{x^2 + y^2}$. Determine o domínio de F e esboce as curvas de nível dos níveis $c = 0$, $c = 1$ e $c = 10$.

a) $y = \text{sen}^2 t - 1 \qquad (-1 \leq y \leq 0)$

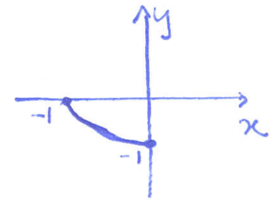
$x = \text{sen}^4 t + 2(\underbrace{\cos^2 t - 1}_{-\text{sen}^2 t}) = (y+1)^2 - 2(y+1) = y^2 - 1$

$(x, y) \in Im(\gamma) \iff x = y^2 - 1$ e $-1 \leq y \leq 0$

$Im(\gamma)$ está contida na parábola $x = y^2 - 1$



$x = y^2 - 1$



$Im(\gamma)$

b) $Dom(F) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x,y) \neq (0,0)\}$

$F(x,y) = 0 \Rightarrow 10x^2 - 2y \Rightarrow y = 5x^2$ (parábola)

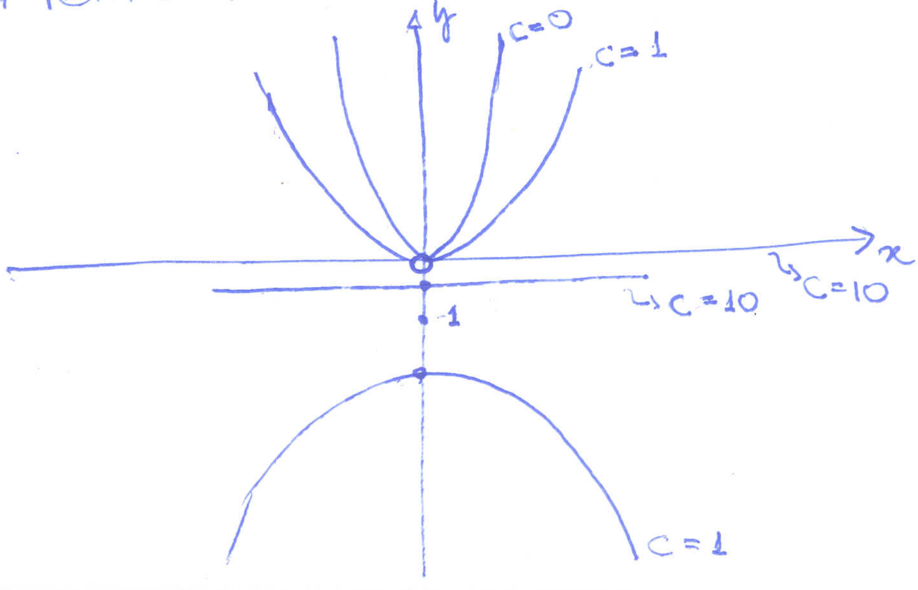
$F(x,y) = 1 \Rightarrow 10x^2 - 2y = x^2 + y^2 \Rightarrow 9x^2 = y^2 + 2y + 1 - 1$

$\Rightarrow 1 = (y+1)^2 - 9x^2$ (hipérbole)

$F(x,y) = 10 \Rightarrow 10x^2 - 2y = 10x^2 + 10y^2 \Rightarrow 10y^2 + 2y = 0$

$\Rightarrow 2y(5y + 1) = 0 \Rightarrow y = 0$ ou $y = -1/5$ (duas retas)

O ponto (0,0) não está no domínio e, portanto, deve ser retirado das curvas encontradas.



1. a) (1,5 ponto) Esboce a imagem da curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por B

$$\gamma(t) = (\cos^4 t + 2\,\mathrm{sen}^2\, t - 5,\ \cos^2 t - 1).$$

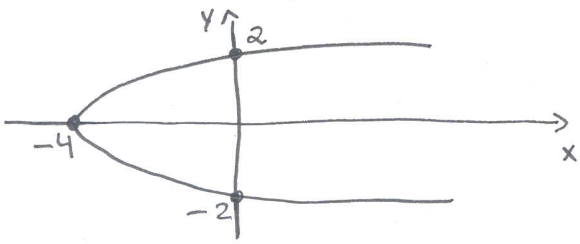
b) (1,5 ponto) Considere $F(x,y) = \dfrac{10y^2 - 2x}{x^2 + y^2}$. Determine o domínio de F e esboce as curvas de nível dos níveis $c = 0$, $c = 1$ e $c = 10$.

a) $y = \cos^2 t - 1 \qquad (-1 \leq y \leq 0)$

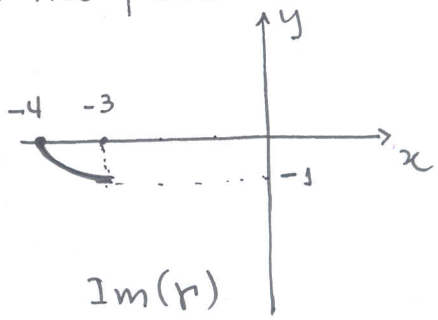
$x = \cos^4 t + 2(1 - \cos^2 t) - 5 = (y+1)^2 - 2y - 5 = y^2 - 4$

$(x,y) \in \mathrm{Im}(\gamma) \iff x = y^2 - 4 \ \text{ e } \ -1 \leq y \leq 0$

$\mathrm{Im}(\gamma)$ está contida na parábola $x = y^2 - 4$



parábola $x = y^2 - 4$



$\mathrm{Im}(\gamma)$

b) $\mathrm{Dom}(F) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x,y) \neq (0,0)\}$

$F(x,y) = 0 \iff \begin{matrix} 10y^2 - 2x = 0 \\ (x,y) \neq (0,0) \end{matrix} \iff \begin{matrix} x = 5y^2 \\ \text{e } (x,y) \neq (0,0) \end{matrix}$

A curva de nível zero é uma parábola (sem um ponto)

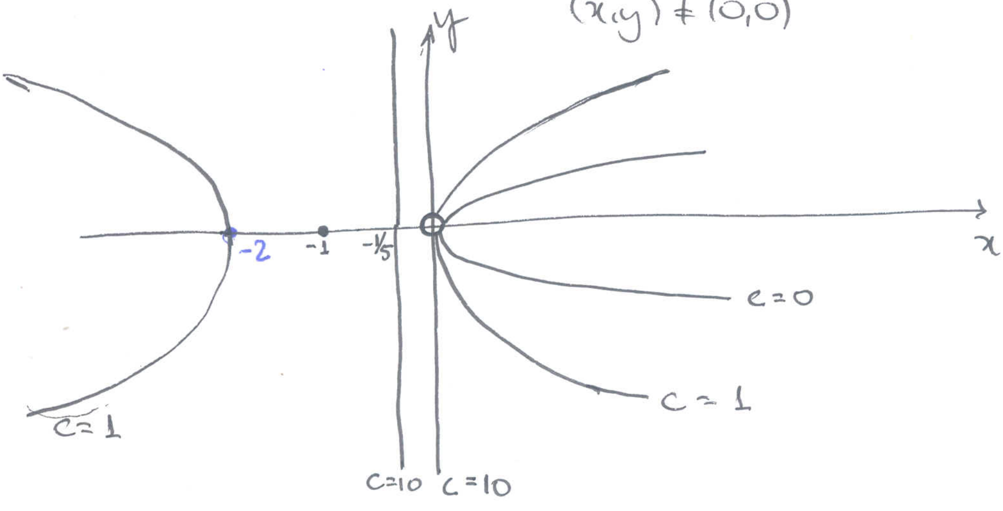
$F(x,y) = 1 \iff \begin{matrix} 10y^2 - 2x = x^2 + y^2 \\ (x,y) \neq (0,0) \end{matrix} \iff$

$\iff \begin{matrix} (x+1)^2 - 9y^2 = 1 \\ (x,y) \neq (0,0) \end{matrix}$

A curva de nível 1 é uma hipérbole (sem um ponto).

$F(x,y) = 10 \iff \begin{matrix} \cancel{10y^2} - 2x = 10x^2 + \cancel{10y^2} \\ (x,y) \neq (0,0) \end{matrix} \iff \begin{matrix} x(5x+1) = 0 \\ (x,y) \neq (0,0) \\ x = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{5} \end{matrix}$

A curva de nível 10 são duas retas (sem um ponto



2. a) (1,5 ponto) Seja $\Gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ a curva dada por $\Gamma(t) = (x(t),\ \operatorname{sen} t,\ 1+\cos t)$. Sabendo que a imagem de Γ está contida na superfície de equação $(z-1)^2 - \frac{y^2}{4} = x$, determine $x(t)$ e a encontre uma equação para a reta tangente a Γ em $\Gamma(\pi/3)$.

A

b) Seja S a superfície de equação $-2x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$.

b1) (1,0 ponto) Estude a intersecção de S com cada plano $x = k$ e com o plano $y = 1$. Esboce S.

b2) (1,5 ponto) Encontre uma parametrização para a intersecção de S com o plano $2x + y = 2$.

a) $x(t) = (1+\cos t - 1)^2 - \frac{\operatorname{sen}^2 t}{4} = \cos^2 t - \frac{\operatorname{sen}^2 t}{4} = 1 - \frac{5}{4}\operatorname{sen}^2 t$

$\Gamma(\frac{\pi}{3}) = \left(1 - \frac{5}{4}\cdot\frac{3}{4},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 1 + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{16}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$x'(t) = -\frac{10}{4}\operatorname{sen} t \cdot \cos t$, $x'(\frac{\pi}{3}) = -\frac{5}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{5}{8}\cdot\sqrt{3}$

$\Gamma'(\frac{\pi}{3}) = \left(-\frac{5}{8}\sqrt{3}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

equação da reta: $(x,y,z) = \left(\frac{1}{16}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right) + \lambda\left(-\frac{5}{8}\sqrt{3}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b1) $x = k$: $(y-1)^2 + z^2 = 1 + 2k^2$: circunferência no plano $x = k$, com centro em $(k, 1, 0)$ e raio $\sqrt{1+2k^2}$

$y = 1$ $z^2 - 2x^2 = 1$: hipérbole no plano $y = 1$

S é um hiperboloide circular de uma folha

(ver esboço depois da resolução de b2)

b2) $\begin{cases} -2x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -2x^2 + (2-2x-1)^2 + z^2 = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \Longleftrightarrow$

$\begin{cases} 2(x^2 - 2x + 1) + z^2 = 2 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

$x - 1 = \cos t$

$\frac{z}{\sqrt{2}} = \operatorname{sen} t$

$y = 2 - 2x$

$\therefore y = 2 - 2(1 + \cos t)$

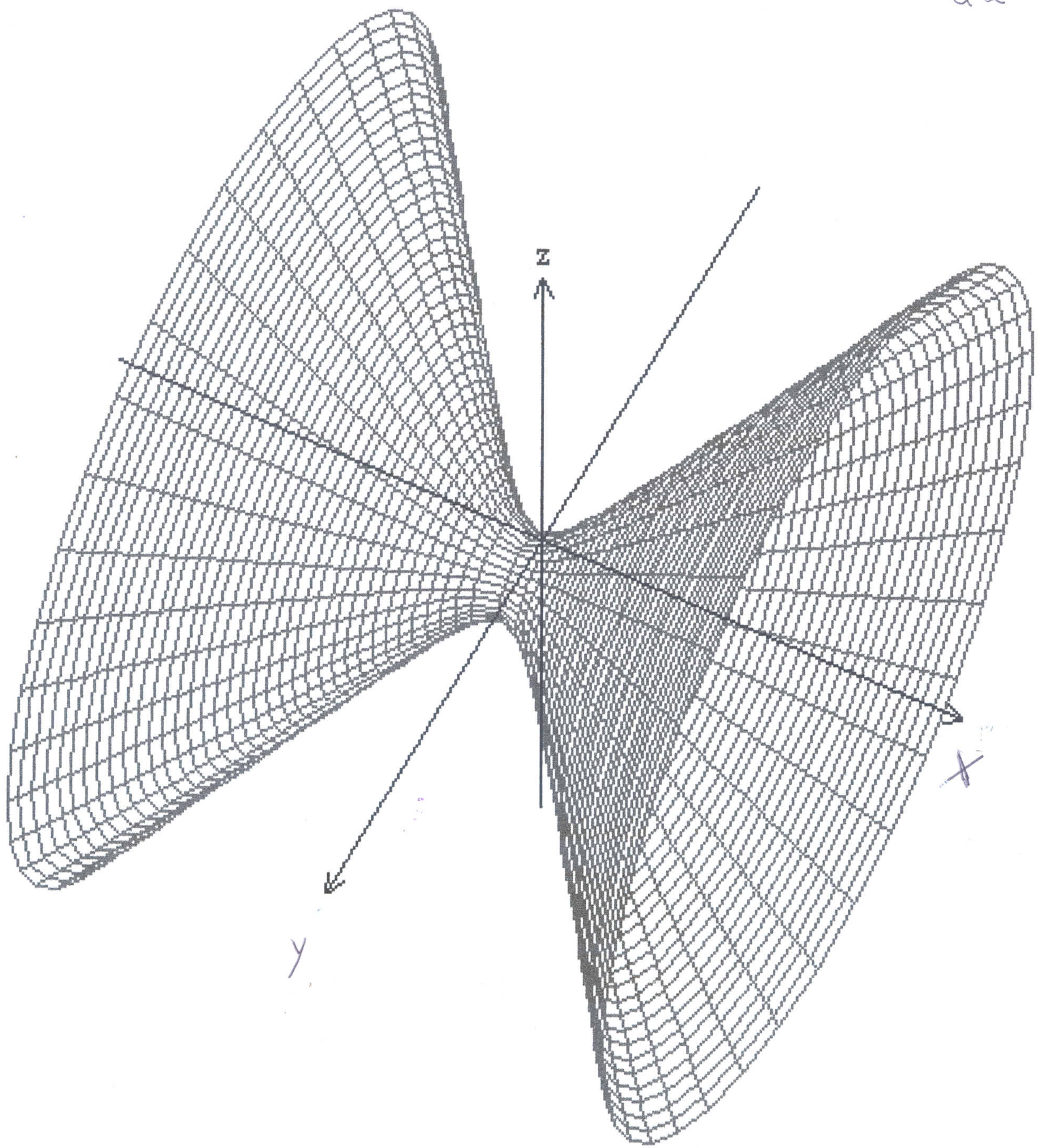
Uma parametrização é

$\Gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$\Gamma(t) = (1 + \cos t, -2\cos t, \sqrt{2}\operatorname{sen} t)$

Q2 b1)

A



B

2. a) (1,5 ponto) Seja $\Gamma : [0, 2\pi] \to I\!R^2$ a curva dada por $\Gamma(t) = (\operatorname{sen} t, y(t), 1+\cos t)$. Sabendo que a imagem de Γ está contida na superfície de equação $(z-1)^2 - \dfrac{x^2}{9} = y$, determine $y(t)$ e a encontre uma equação para a reta tangente a Γ em $\Gamma(\pi/6)$.

b) Seja S a superfície de equação $(x-1)^2 - 2y^2 + z^2 = 1$.

b1) (1,0 ponto) Estude a intersecção de S com cada plano $y = k$ e com o plano $x = 1$. Esboce S.

b2) (1,5 ponto) Encontre uma parametrização para a intersecção de S com o plano $2y + x = 2$.

a) $y(t) = (1+\cos t - 1)^2 - \dfrac{\operatorname{sen}^2 t}{9} = \cos^2 t - \dfrac{\operatorname{sen}^2 t}{9} = 1 - \dfrac{10}{9}\operatorname{sen}^2 t$

$\Gamma\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{10}{9}\cdot\frac{1}{4}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{13}{18}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$y'(t) = -\dfrac{20}{9}\cos t \operatorname{sen} t$, $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{20}{9}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = -\dfrac{5}{9}\sqrt{3}$

$\Gamma'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{9}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right)$

equação da reta: $(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{13}{18}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \lambda\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{9}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right)$

b1) $y = k$ $(x-1)^2 + z^2 = 1 + 2k^2$: circunferência no plano $y = k$, com centro em $(1, k, 0)$ e raio $\sqrt{1+2k^2}$

$x = 1$ $z^2 - 2y^2 = 1$: hipérbole no plano $x = 1$

S é um hiperboloide circular de uma folha

(ver esboço depois da resolução de b2)

b2) $\begin{cases} (x-1)^2 - 2y^2 + z^2 = 1 \\ 2y + x = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} (2-2y-1)^2 - 2y^2 + z^2 = 1 \\ 2y + x = 2 \end{cases} \iff$

$\begin{cases} 2(y^2 - 2y + 1) + z^2 = 2 \\ 2y + x = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} (y-1)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 \\ 2y + x = 2 \end{cases}$

$y - 1 = \cos t$

$\dfrac{z}{\sqrt{2}} = \operatorname{sen} t$

$x = 2 - 2y = 2 - 2(1 + \cos t)$

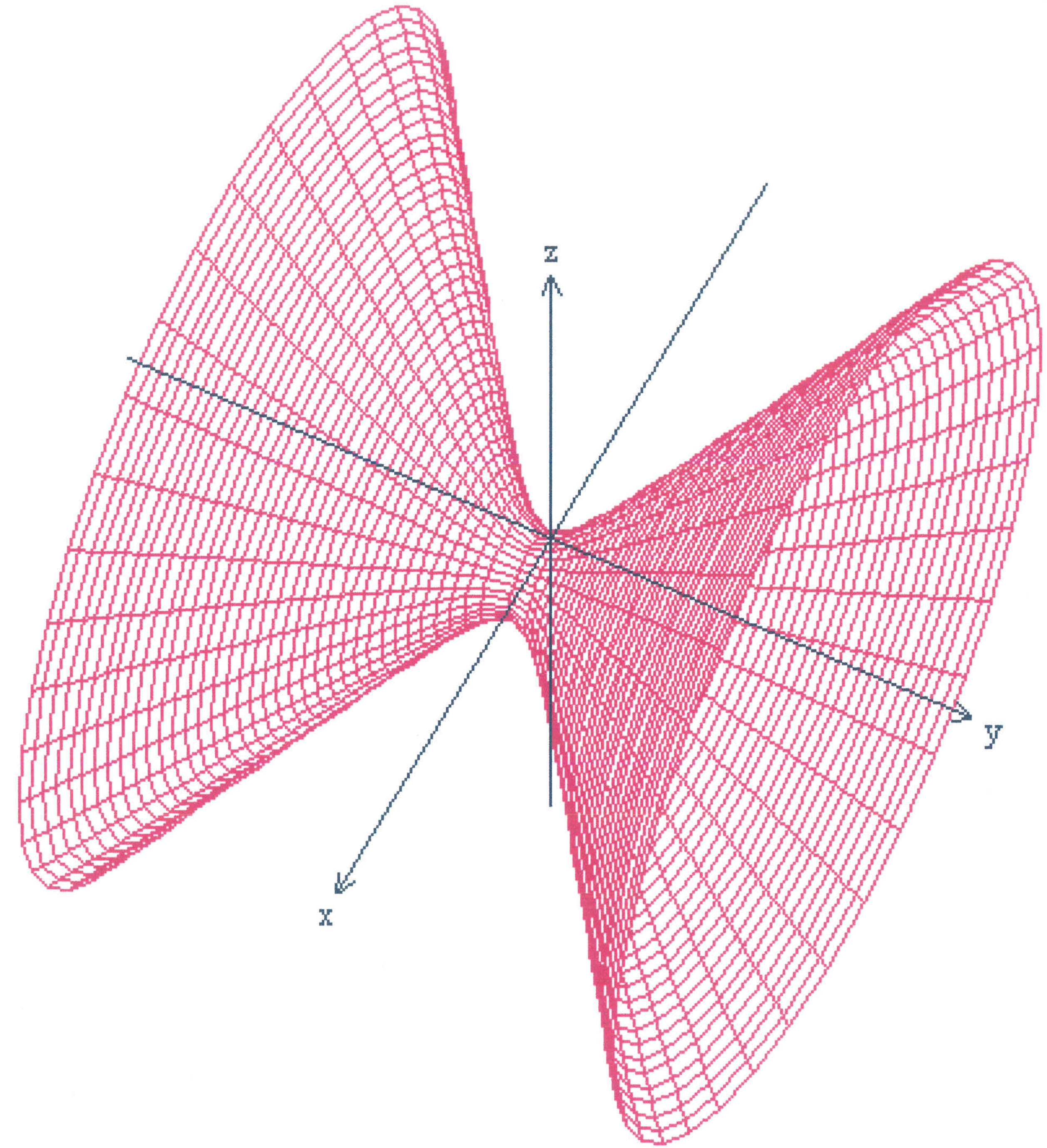
Uma parametrização é

$\Gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$\Gamma(t) = (-2\cos t, 1 + \cos t, \sqrt{2}\operatorname{sen} t)$

Q2 b1)

B



3. Calcule ou mostre que não existe.

a) (1,5 ponto) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^4+y^2}\,\mathrm{sen}(x^2+y^2)$

b) (1,5 ponto) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{x^2y}-1}{y^3}$

$$
\begin{aligned}
a) \qquad & \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^4+y^2}\,\mathrm{sen}(x^2+y^2) \\
= \quad & \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3(x^2+y^2)}{x^4+y^2}\,\frac{\mathrm{sen}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} \\
= \quad & \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5+x^3y^2}{x^4+y^2}\,\frac{\mathrm{sen}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} \\
= \quad & \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\overbrace{x}^{\to 0}\cdot\overbrace{\frac{x^4}{x^4+y^2}}^{limitado}+\overbrace{x^3}^{\to 0}\cdot\overbrace{\frac{y^2}{x^4+y^2}}^{limitado}\right)\frac{\mathrm{sen}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} \\
= \quad & (0+0)\cdot 1 = 0,
\end{aligned}
$$

pois $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\mathrm{sen}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} = \lim\limits_{u\to 0^+} \dfrac{\mathrm{sen}u}{u} = 1.$

b) Seja $g(x,y) = \dfrac{e^{x^2y}-1}{y^3}$. Por um lado

$$\lim_{t\to 0} g(0,t) = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t^3} = \lim_{t\to 0} 0 = 0.$$

Por outro

$$\lim_{t\to 0} g(t,t) = \lim_{t\to 0}\frac{e^{t^3}-1}{t^3} = \lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u} = 1.$$

Logo, tal limite não existe.

3. Calcule ou mostre que não existe.

a) (1,5 ponto) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^4}\ \mathrm{sen}(x^2+y^2)$

b) (1,5 ponto) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy^2}-1}{x^3}$

$$\begin{aligned}
a) \quad & \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^4}\ \mathrm{sen}(x^2+y^2) \\
= \quad & \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3(x^2+y^2)}{x^2+y^4}\ \frac{\mathrm{sen}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} \\
= \quad & \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3x^2+y^5}{x^2+y^4}\ \frac{\mathrm{sen}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} \\
= \quad & \lim_{(x,y)\to(0,0)} \Bigg(\overbrace{y^3}^{\to 0} \cdot \overbrace{\frac{x^2}{x^2+y^4}}^{\textit{limitado}} + \overbrace{y}^{\to 0} \cdot \overbrace{\frac{y^4}{x^2+y^4}}^{\textit{limitado}} \Bigg) \frac{\mathrm{sen}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} \\
= \quad & (0+0)\cdot 1 = 0,
\end{aligned}$$

pois $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{sen}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} = \lim_{u\to 0^+} \frac{\mathrm{sen} u}{u} = 1.$

b) Seja $g(x,y) = \dfrac{e^{xy^2}-1}{x^3}$. Por um lado

$$\lim_{t\to 0} g(t,0) = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^3} = \lim_{t\to 0} 0 = 0.$$

Por outro

$$\lim_{t\to 0} g(t,t) = \lim_{t\to 0} \frac{e^{t^3}-1}{t^3} = \lim_{u\to 0} \frac{e^u-1}{u} = 1.$$

Logo, tal limite não existe.