

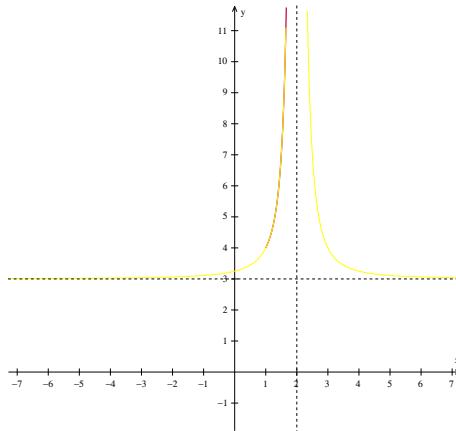
A

1. (a) **(1,5)** Sejam $\gamma(t) = (2 - \cos t, \sec^2 t + 3)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e $f(x, y) = ((x - 2)^2(y - 3))^{\frac{2}{3}} + 1$. Esboce a imagem de γ e mostre que a imagem de γ está contida em uma curva de nível de f indicando qual é o nível.

Resolução:

$$f(\gamma(t)) = f(2 - \cos t, \sec^2 t + 3) = ((2 - \cos t - 2)^2(\sec^2 t + 3 - 3))^{\frac{2}{3}} + 1 = ((-\cos t)^2(\sec^2 t)^{\frac{2}{3}} + 1 = 2, \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \text{ portanto a imagem de } \gamma \text{ está contida na curva de nível 2 de } f.$$

$$\gamma : \begin{cases} x = 2 - \cos(t) \\ y = \sec^2(t) + 3 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{(x-2)^2} + 3, \text{ com } 1 \leq x < 2 \text{ e } y \geq 4.$$



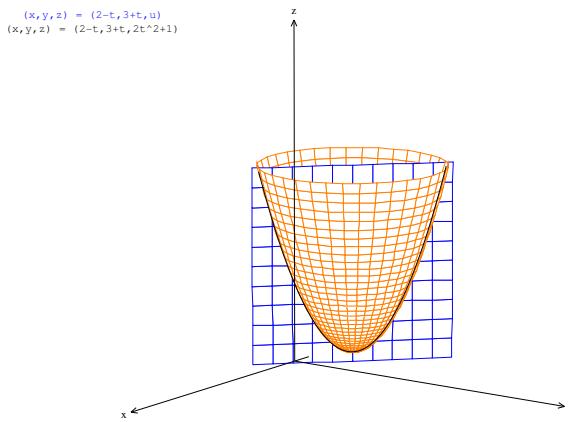
- (b) **(1,0)** Sejam $g(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + 1$ e $\Gamma(t) = (2 - t, 3 + t, z(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Sabendo que a imagem de Γ está contida no gráfico de g , encontre $z(t)$. Esboce a imagem de Γ .

Resolução:

$$z(t) = g(2 - t, 3 + t) = (2 - t - 2)^2 + (3 + t - 3)^2 + 1 = 2t^2 + 1.$$

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + t \end{cases} \Rightarrow x + y = 5. \text{ Portanto, } \Gamma(\mathbb{R}) \text{ é a intersecção do gráfico de } g \text{ (parabolóide) e o plano } x + y = 5.$$

Uma parametrização de Γ é dada por $\Gamma(t) = (2 - t, 3 + t, 2t^2 + 1)$, $t \in \mathbb{R}$.



2. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, explique por quê:

$$(a) (1,0) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4xy^3 + 2x^3 - y^7}{x^2 + 5y^6}$$

$$(b) (1,0) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3(1 - \cos(x^2 + y^2))}{(x^2 + y^2)^3}$$

a) Seja $f(x,y) = \frac{4xy^3 + 2x^3 - y^7}{x^2 + 5y^6}$. Temos: $f(t,0) = \frac{2t^3}{t^2} = 2t \neq 0$
e $f(t^3, t) = \frac{4t^6 + 2t^9 - t^7}{6t^6} = \frac{2}{3} - \frac{t^3}{3} - \frac{t}{6}$, se $t \neq 0$. Quando $t \rightarrow 0$, temos que
 $\lim_{(t,0) \rightarrow (0,0)} f(t,0) = \lim_{t \rightarrow 0} 2t = 0$ e
 $\lim_{(t^3,t) \rightarrow (0,0)} f(t^3,t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{2}{3} - \frac{t^3}{3} - \frac{t}{6} \right) = \frac{2}{3}$. Como esses dois limites são
diferentes, concluímos que não existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$.

$$b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \underbrace{\frac{x^2}{x^2 + y^2}}_{\text{limitada}} \cdot \underbrace{\frac{(1 - \cos(x^2 + y^2))}{(x^2 + y^2)^2}}_{\substack{\downarrow \\ \frac{1}{2}}} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Justificativa: 1) A função $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ é limitada (pois $0 \leq \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \leq 1$) e $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x = 0$. Logo $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 0$

$$2) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{2t} = \frac{1}{2}.$$

Como $x^2 + y^2 \rightarrow 0$ quando $(x,y) \rightarrow (0,0)$, temos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = 0$$

A

Questão 3. (2,0) Seja $f(x, y) = \frac{3(x-1)^2 + (y-1)^2}{x^2 - y^2}$.

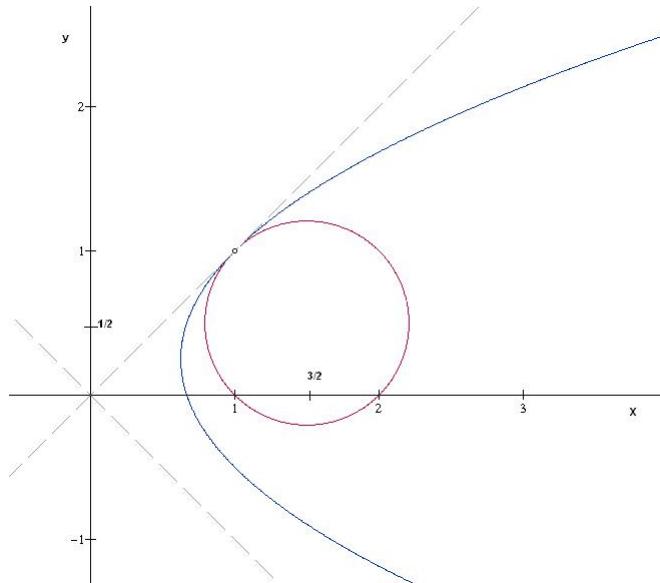
1. Esboce (no mesmo sistema de coordenadas) as curvas de nível de f nos níveis $k = 1$ e $k = 3$.
2. Existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y)$? Justifique.

a) Domínio de $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \neq y^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \neq |y|\}$.

$$\begin{aligned} f(x, y) = k &\Leftrightarrow 3(x-1)^2 + (y-1)^2 = kx^2 - ky^2 \text{ e } |x| \neq |y| \\ &\Leftrightarrow (3-k)x^2 - 6x + (1+k)y^2 - 2y + 4 = 0 \text{ e } |x| \neq |y|. \end{aligned}$$

Se $k=3$: $-6x + 4y^2 - 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}(2y^2 - y + 2)$ (Parábola).

Se $k=1$: $2x^2 - 6x + 2y^2 - 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$ (Círculo).



b) $\lim_{t \rightarrow 1} f(1, t) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)^2}{1-t^2} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1-t}{1+t} = 0$.

Por outro lado, a imagem da curva $\gamma(t) = (\frac{3}{2} + \frac{\cos t}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} + \frac{\sin t}{\sqrt{2}})$, ($t \in [0, 2\pi]$) está contida na curva de nível $k = 1$ para $t \neq \frac{3\pi}{4}$ e $\gamma(\frac{3\pi}{4}) = (1, 1)$. Assim, $\lim_{t \rightarrow \frac{3\pi}{4}} f(\gamma(t)) = 1$ e vemos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y)$ não existe.

A

4. Sejam S_1 e S_2 as superfícies

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = (y-1)^2 - x^2\} \text{ e } S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + 2y^2 - 2\}.$$

(a) (1,0) Encontre uma parametrização para a curva dada pela intersecção de S_1 e S_2 . Isto é, encontre um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e uma função $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que a imagem de γ seja igual a $S_1 \cap S_2$.

(b) (1,0) Determine a equação da reta tangente a $S_1 \cap S_2$ no ponto $(\frac{\sqrt{6}}{2}, 0, -\frac{1}{2})$.

(a) Seja $(x, y, z) \in S_1 \cap S_2$. Então

$$z = (y-1)^2 - x^2 \quad e \quad z = x^2 + 2y^2 - 2.$$

$$\begin{aligned} \text{Logo } (y-1)^2 - x^2 &= x^2 + 2y^2 - 2 \\ \Rightarrow y^2 - 2y + 1 - x^2 &= x^2 + 2y^2 - 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + y^2 + 2y + 1 - 4 = 0$$

$$\text{Logo } (\sqrt{2}x)^2 + (y+1)^2 = 4 \Rightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{2}\right)^2 = 1. \quad (*)$$

Para cada (x, y) que satisfaçõe $(*)$, existe $t \in [0, 2\pi]$

$$\text{tal que } \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \cos t \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \text{sen } t.$$

Reciprocamente, se $\frac{x}{\sqrt{2}} = \cos t$ e $y+1/2 = \text{sen } t$ então
 (x, y) satisfaçõe $(*)$. Assim, $(\frac{x}{\sqrt{2}})^2 + (y+1/2)^2 = 1$ se e só se
existe $t \in [0, 2\pi]$ com $x = \sqrt{2} \cos t$ e $y = 2 \text{sen } t - 1$.

Como $z = x^2 + 2y^2 - 2$ temos que

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\gamma(t) = (\sqrt{2} \cos t, 2 \text{sen } t - 1, 2 \cos^2 t + 2(2 \text{sen } t - 1)^2 - 2)$$

é uma parametrização de $S_1 \cap S_2$.

(b) Encontrar $t_0 \in [0, 2\pi]$ tal que

$$\gamma(t_0) = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\sqrt{2} \cos t_0 = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \cos t_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow t_0 = \frac{\pi}{6}$$

$$2 \text{sen } t_0 - 1 = 0 \Rightarrow \text{sen } t_0 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Observe que } z = 2 \cdot \frac{3}{4} - 2 = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Agora, } \gamma'(t) = (-\sqrt{2} \text{sen } t, 2 \cos t, -4 \cos t \text{sen } t + 4(2 \text{sen } t - 1)2 \cos t),$$

$$\gamma'(\pi/6) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\right) \neq 0$$

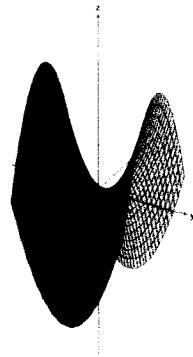
Assim uma equação da reta tangente é:

$$x = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right) + \lambda \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\right), \lambda \in \mathbb{R}$$

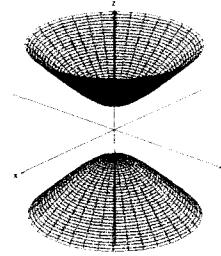
A

5. (1,5) Cada uma das figuras abaixo representa uma superfície. Na coluna 1 da tabela temos uma equação para cada uma dessas superfícies. Cada superfície contém a imagem de uma das curvas da coluna 2. Escreva abaixo de cada figura qual é a curva cuja imagem está contida na superfície que ela representa.

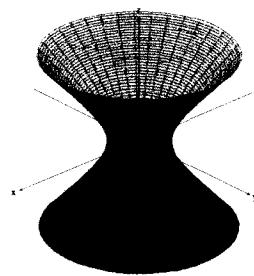
1	2
$z^2 = x^2 + y^2$	$\gamma(t) = (t, 2t, 3t^2), t \in \mathbb{R}$
$z = y^2 - x^2$	$\gamma(t) = (t, 1, t), t \in \mathbb{R}$
$z^2 = x^2 + y^2 + 1$	$\gamma(t) = (1, \operatorname{tg} t, \sec t), t \in [0, \frac{\pi}{2}[$
$z^2 = x^2 + y^2 - 1$	$\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t, \sqrt{t^2 + 1}), t \in \mathbb{R}$



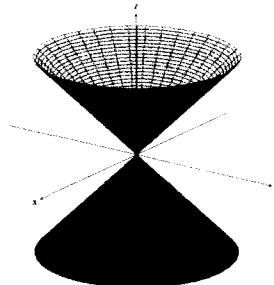
$$\gamma(t) = (t, 2t, 3t^2)$$



$$\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t, \sqrt{t^2 + 1})$$



$$\gamma(t) = (t, 1, t)$$



$$\gamma(t) = (1, \operatorname{tg} t, \sec t)$$