Questão 1. Seja $f(x) = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$.

a) (1,5 ponto) Seja $p(x)$ o polinômio de Taylor de ordem 5 de f em torno de $x_0 = 0$. Encontre $p(x)$ e mostre que se $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ então

$$|(1-x)^{-\frac{1}{2}} - p(x)| \leq \frac{2^3 \cdot 7 \cdot 11}{3^{\frac{11}{2}}} x^6$$

b) (1 ponto) Mostre que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \cong \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4 \cdot 3} + \frac{3}{2^8 \cdot 5} + \frac{5}{2^{11} \cdot 7} + \frac{5 \cdot 7}{2^{16} \cdot 9} + \frac{7 \cdot 9}{2^{19} \cdot 11}$$

com erro, em módulo, inferior a $\dfrac{7 \cdot 11}{2^{10} \cdot 3^{\frac{11}{2}} \cdot 13}$.

(Curiosidade: Você acaba de encontrar um valor aproximado para $\frac{\pi}{6}$, com erro inferior a 10^{-4}.)

a) $f'(x) = -\frac{1}{2}(1-x)^{-3/2} \cdot (-1) = \frac{1}{2}(1-x)^{-3/2}$; $f''(x) = \frac{3}{2^2}(1-x)^{-5/2}$;

$f'''(x) = \frac{3.5}{2^3}(1-x)^{-7/2}$; $f^{(4)}(x) = \frac{3.5.7}{2^4}(1-x)^{-9/2}$;

$f^{(5)}(x) = \frac{3.5.7.9}{2^5}(1-x)^{-11/2}$; $f^{(6)}(x) = \frac{3.5.7.9.11}{2^6}(1-x)^{-13/2}$

$$p(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + f^{(4)}(0)\frac{x^4}{4!} + f^{(5)}(0)\frac{x^5}{5!}$$

$$p(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2^2}\frac{1}{2!}x^2 + \frac{3.5}{2^3}\frac{x^3}{3!} + \frac{3.5.7}{2^4}\frac{x^4}{4!} + \frac{3.5.7.9}{2^5}\frac{x^5}{5!}$$

Se $0 < x \leq \frac{1}{4}$, pela Fórmula de Taylor, temos

$f(x) - p(x) = \frac{3.5.7.9.11}{2^6}\frac{(1-c)^{-13/2}}{6!}$ para algum c, com $0 < c < x \leq$

Mas, se $0 < c < \frac{1}{4}$ então $(1-c) > \frac{3}{4}$ e portanto

$0 < (1-c)^{-13/2} < \left(\frac{3}{4}\right)^{-13/2}$. Logo, se $0 < x \leq \frac{1}{4}$, temos

$$0 \leq f(x) - p(x) \leq \frac{3.5.7.9.11}{2^6 . 6!}\left(\frac{3}{4}\right)^{-13/2} x^6 = \frac{3.5.7.9.11}{2^6 . 6.5.4.3.2}\frac{2^{13}}{3^{13/2}} x^6$$

$$= \frac{7.11.3^2}{2^{10}.3}\frac{2^{13}}{3^{13/2}} x^6 = \frac{2^3.7.11}{3^{11/2}} x^6$$

(Se $x = 0$, temos $(1-x)^{-1/2} - p(x) = 0$)

b) Se $0 \le x \le \frac{1}{2}$ então $0 \le x^2 \le \frac{1}{4}$ e portanto

$0 \le f(x^2) - p(x^2) \le \frac{2^3 \cdot 7 \cdot 11}{3^{11/2}} x^{12}$. Logo

$$0 \le \int_0^{1/2} [f(x^2) - p(x^2)] dx \le \int_0^{1/2} \frac{2^3 \cdot 7 \cdot 11}{3^{11/2}} x^{12} dx = \frac{2^3 \cdot 7 \cdot 11}{3^{11/2} \cdot 13} \frac{1}{2^{13}} =$$

$$= \frac{7 \cdot 11}{2^{10}\, 3^{11/2} \cdot 13}$$

Temos, então $\int_0^{1/2} f(x^2) dx \approx \int_0^{1/2} p(x^2) dx$, com erro, em módul[o]

[i]nferior a $\frac{7 \cdot 11}{2^{10}\, 3^{11/2} \cdot 13}$, onde $\int_0^{1/2} f(x^2) dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$\int_0^{1/2} p(x^2) dx = \int_0^{1/2} \left[1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3 \cdot x^4}{2^2 \cdot 2!} + \frac{3 \cdot 5 x^6}{2^3 3!} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 x^8}{2^4 \cdot 4!} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9\, x^{10}}{2^5 \cdot 5!}\right] dx$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{1}{2^3} + \frac{3}{2^2 \cdot 2!\, 5} \frac{1}{2^5} + \frac{3 \cdot 5}{2^3\, 3!\, 7} \frac{1}{2^7} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2^4\, 4!\, 9} \frac{1}{2^9} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2^5\, 5!\, 11}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^4 \cdot 3} + \frac{3}{2^8 \cdot 5} + \frac{\cancel{3} \cdot 5}{2^{11} \cdot \cancel{3} \cdot 7} + \frac{5 \cdot 7}{2^{16} \cdot 9} + \frac{7 \cdot 9}{2^{19} \cdot 11}$$

Questão 2. Seja $f(x,y) = \dfrac{2x^2+4y^2}{x^2+y^2+1}$.

a) (1 ponto) Esboce as curvas de nível de f dos níveis $c=1$, $c=2$ e $c=3$.

b) (0,5 ponto) Encontre uma função γ derivável, definida num intervalo, cuja imagem seja a curva de nível de f do nível $c=1$.

c) (0,5 ponto) Determine o vetor tangente à curva γ, que você encontrou no item anterior, no ponto $(-1,0)$.

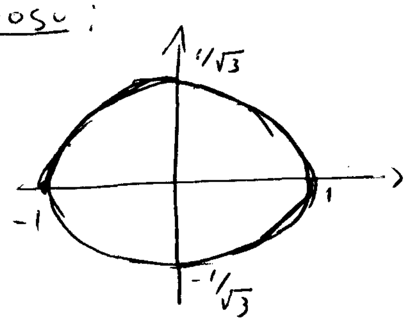
d) (1 ponto) Seja $\Gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\Gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, z(t))$. Sabendo que a imagem da curva está contida no gráfico de f, encontre o vetor tangente a Γ em $\Gamma(\frac{\pi}{3})$.

(a). $\underline{c=1}$:

$$f(x,y)=1 \iff \frac{2x^2+4y^2}{x^2+y^2+1} = 1 \iff 2x^2+4y^2 = x^2+y^2+1 \iff x^2+3y^2=1$$

Logo a curva de nível $f(x,y)=1$ é a elipse $\boxed{x^2+\frac{y^2}{1/3}=1}$

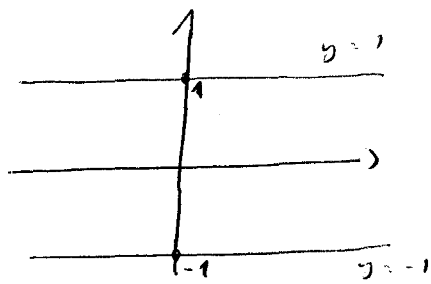
Esboço:



• $\underline{c=2}$: $f(x,y)=2 \iff \cancel{2x^2}+4y^2 = \cancel{2x^2}+2y^2+2 \iff y^2=1 \iff y=1$ ou $y=-1$

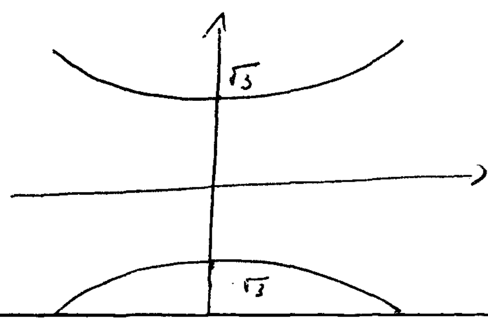
Logo a curva de nível $f(x,y)=2$ são as retas $y=1$ e $y=-1$

Esboço:



• $\underline{c=3}$: $f(x,y)=3 \iff 2x^2+4y^2 = 3x^2+3y^2+3 \iff -x^2+y^2=3$

Logo a curva de nível $f(x,y)=3$ é a hipérbole $\dfrac{-x^2}{3}+\dfrac{y^2}{3}=1$



A

(b) Se $c=1$ a curva de nível $f(x,y)=c$ é a elipse

$x^2+3y^2=1$

Defina então $\boxed{\gamma(t)=\left(\operatorname{sen} t, \frac{\cos t}{\sqrt{3}}\right), \quad t\in[0,2\pi]}$

Note que γ é derivável e que $(x(t))^2+3(y(t))^2=\operatorname{sen}^2 t+3\frac{\cos^2 t}{3}=1$

(c) Por (b), $\gamma(t)=\left(\operatorname{sen} t, \frac{\cos t}{\sqrt{3}}\right)$

$t\in[0,2\pi]$

$\gamma(t)=(-1,0) \iff \left(\operatorname{sen} t, \frac{\cos t}{\sqrt{3}}\right)=(-1,0) \iff t=\frac{3\pi}{2}$

Logo o vetor pedido é $\gamma'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

$\gamma'(t)=\left(\cos t, -\frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow \boxed{\gamma'\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$

(d) $\Gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ é dada por $\Gamma(t)=(\operatorname{sen} t, \cos t, z(t))$

Como a imagem de γ está contida no gráfico de f,

$$z(t)=f(x(t),y(t))=\frac{2\operatorname{sen}^2 t+4\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t+1}=\frac{\cancel{2}\operatorname{sen}^2 t+\overset{2}{\cancel{4}}\cos^2 t}{\cancel{2}}=1+\cos^2 t$$

Logo $\Gamma(t)=(\operatorname{sen} t, \cos t, 1+\cos^2 t)$

$\therefore \Gamma'(t)=(\cos t, -\operatorname{sen} t, -2\cos t\operatorname{sen} t)$

O vetor tangente a Γ em $\Gamma\left(\frac{\pi}{3}\right)$ é então

$$\Gamma'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\cancel{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right)$$

$$\therefore \boxed{\Gamma'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

Questão 2. Seja $f(x,y) = \dfrac{3x^2+5y^2}{x^2+y^2+2}$.

a) (1 ponto) Esboce as curvas de nível de f dos níveis $c=1$, $c=3$ e $c=4$.

b) (0,5 ponto) Encontre uma função γ derivável, definida num intervalo, cuja imagem seja a curva de nível de f do nível $c=1$.

c) (0,5 ponto) Determine o vetor tangente à curva γ, que você encontrou no item anterior, no ponto $(-1,0)$.

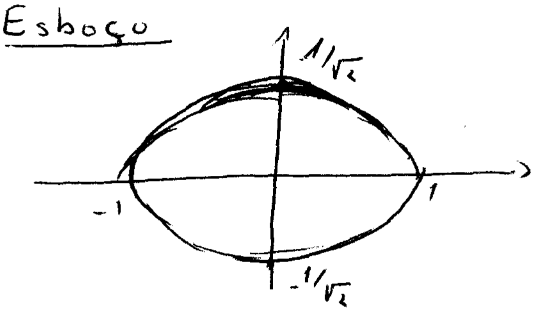
d) (1 ponto) Seja $\Gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\Gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, z(t))$. Sabendo que a imagem da curva está contida no gráfico de f, encontre o vetor tangente a Γ em $\Gamma(\frac{\pi}{3})$.

(a) · $\underline{c=1}$:

$$f(x,y)=1 \iff \frac{3x^2+5y^2}{x^2+y^2+2} = 1 \iff 3x^2+5y^2 = x^2+y^2+2 \iff 2x^2+4y^2 = 2 \iff x^2+2y^2=1$$

Logo a curva de nível $f(x,y)=1$ é a elipse $x^2 + \frac{y^2}{1/2} = 1$

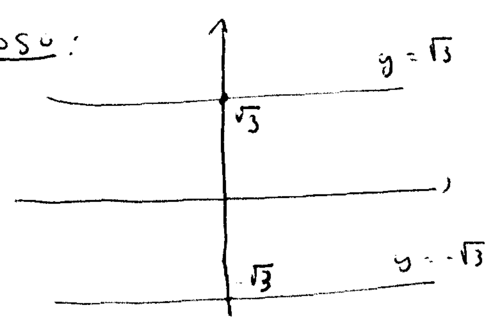
Esboço



· $\underline{c=3}$: $f(x,y)=3 \iff 3\cancel{x^2}+5y^2 = 3\cancel{x^2}+3y^2+6 \iff 2y^2=6 \iff y^2=3 \iff y=\sqrt{3}$ ou $y=-\sqrt{3}$

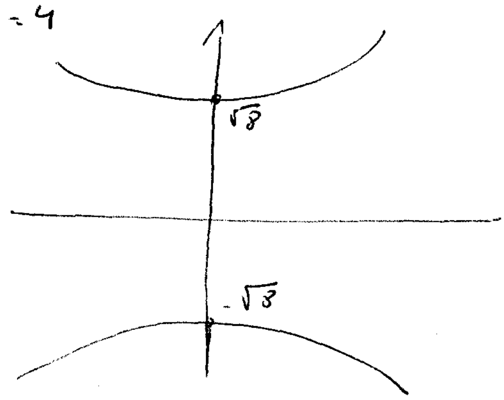
Logo a curva de nível $f(x,y)=3$ são as retas $y=\sqrt{3}$ e $y=-\sqrt{3}$

Esboço:



· $\underline{c=4}$: $f(x,y)=4 \iff 3x^2+5y^2 = 4x^2+4y^2+8 \iff -x^2+y^2=8$

Logo a curva de nível $f(x,y)=4$ é a hipérbole $-\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{8}=1$



B

Se $c=1$ a curva de nível $f(x,y)=c$ é a elipse

$+ 2y^2 = 1$.

Defina então $\boxed{\gamma(t) = \left(\operatorname{sen} t, \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\right), \quad t \in [0, 2\pi]}$

Note que γ é derivável e que $(x(t))^2 + 2(y(t))^2 = \operatorname{sen}^2 t + \frac{\cancel{2}\cos^2 t}{\cancel{2}} = 1$

Por (b), $\gamma(t) = \left(\operatorname{sen} t, \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\right)$

$\gamma(t) = (-1,0) \iff \left(\operatorname{sen} t, \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\right) = (-1,0) \overset{t \in [0,2\pi)}{\iff} t = \frac{3\pi}{2}$

Logo o vetor pedido é $\gamma'(3\pi/2)$

$\gamma'(t) = \left(\cos t, -\frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \boxed{\gamma'(3\pi/2) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$

$\Gamma: [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ é dada por $\Gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, z(t))$.

Como a imagem de γ está contida no gráfico de f,

$$z(t) = f(x(t), y(t)) = \frac{3\operatorname{sen}^2 t + 5\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 2} = \frac{3 + 2\cos^2 t}{3} = 1 + \frac{2}{3}\cos^2 t$$

Logo $\Gamma(t) = \left(\operatorname{sen} t, \cos t, 1 + \frac{2}{3}\cos^2 t\right)$

$\therefore \Gamma'(t) = \left(\cos t, -\operatorname{sen} t, -\frac{4}{3}\cos t \operatorname{sen} t\right)$

O vetor tangente a Γ em $\Gamma(\pi/3)$ é então

$$\Gamma'(\pi/3) = \left(1/2, -\sqrt{3}/2, -\frac{\cancel{4}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right)$$

$$\boxed{\Gamma'(\pi/3) = \left(1/2, -\sqrt{3}/2, -\sqrt{3}/3\right)}$$

A

Questão 3. Calcule, caso exista, ou mostre que não existe

a) (0,5 ponto) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^4-y^4)}{x^2-y^2}$

b) (1 ponto) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2-x^2}{\sqrt{x^2+y^4}}$

c) (1 ponto) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2-2xy^3}{x^2+y^6}$

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^4-y^4)}{x^2-y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\,\frac{\operatorname{sen}(x^4-y^4)}{x^4-y^4}$

Como $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^4-y^4=0$, temos $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^4-y^4)}{x^4-y^4} = \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1.$

Logo, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\,\frac{\operatorname{sen}(x^4-y^4)}{x^4-y^4} = 0\,.\,1 = 0.$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2-x^2}{\sqrt{x^2+y^4}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^4}}\,(y^2-x)$

Temos: $\displaystyle 0\le x^2 \le x^2+y^4 \underset{(x,y)\neq(0,0)}{\Longrightarrow} 0\le \frac{x^2}{x^2+y^4}\le 1 \Rightarrow \left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^4}}\right| \le 1$

e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2-x=0.$

Logo, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^4}}}_{\text{limit.}}\,\overbrace{(y^2-x)}^{\to 0} = 0$

c) Sejam $\gamma_1(t)=(t,0)$, $\gamma_2(t)=(t^3,t)$ e $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2-2xy^3}{x^2+y^6}$

Temos: $\gamma_1(0)=(0,0)$, $\gamma_2(0)=(0,0)$, γ_1 e γ_2 são contínuas, $\gamma_1(t)\neq(0,0)$ e $\gamma_2(t)\neq(0,0)$ se $t\neq 0$ e $\gamma_1(t), \gamma_2(t)\in \operatorname{Dom} f$, $\forall t\neq 0$.

Como $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0} 0 = 0$ e

$\displaystyle\lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0}\frac{t^8-2t^6}{2t^6} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2-2}{2} = -1,$

não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2-2xy^3}{x^2+y^6}$

Questão 3. Calcule, caso exista, ou mostre que não existe

a) (0,5 ponto) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(y^4 - x^4)}{y^2 - x^2}$

b) (1 ponto) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 - x^2 y}{\sqrt{x^4 + y^2}}$

c) (1 ponto) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2 - 2x^3 y}{x^6 + y^2}$

a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(y^4-x^4)}{y^2-x^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (y^2+x^2)\frac{\operatorname{sen}(y^4-x^4)}{(y^4-x^4)}$$

Como $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^4-x^4 = 0$, temos $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(y^4-x^4)}{y^4-x^4} = \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1$

Logo, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\frac{\operatorname{sen}(y^4-x^4)}{y^4-x^4} = 0 \cdot 1 = 0$

b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2-x^2y}{\sqrt{x^4+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^4+y^2}}(y-x^2)$$

Temos $0 \leq y^2 \leq x^4+y^2 \underset{(x,y)\neq(0,0)}{\Longrightarrow} 0 \leq \dfrac{y^2}{x^4+y^2} \leq 1 \Rightarrow \left|\dfrac{y}{\sqrt{x^4+y^2}}\right| \leq 1$

e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2-x = 0$

Logo, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^4+y^2}}\underbrace{(y^2-x^2)}_{\to 0} = 0$

c) Sejam $\gamma_1(t) = (t,0)$, $\gamma_2(t) = (t,t^3)$ e $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2-2x^3y}{x^6+y^2}$

Temos: $\gamma_1(0) = (0,0)$, $\gamma_2(0) = (0,0)$, γ_1 e γ_2 são contínuas, $\gamma_1(t) \neq (0,0)$ e $\gamma_2(t) \neq (0,0)$ se $t \neq 0$ e $\gamma_1(t), \gamma_2(t) \in \operatorname{Dom} f$, $\forall t \neq 0$.

Como $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0} 0 = 0$

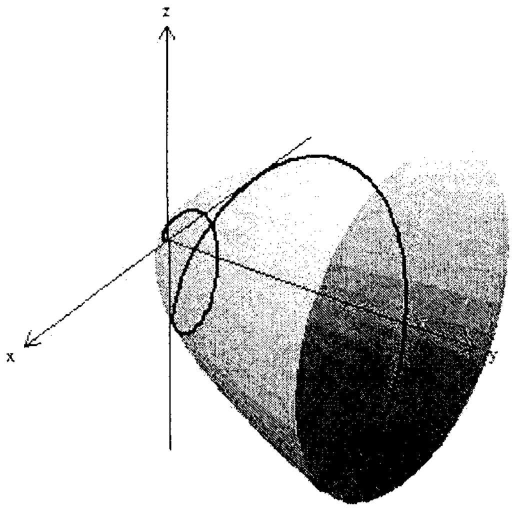
e $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0}\frac{t^8-2t^6}{2t^6} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2-2}{2} = -1,$

não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2-2x^3y}{x^6+y^2}$

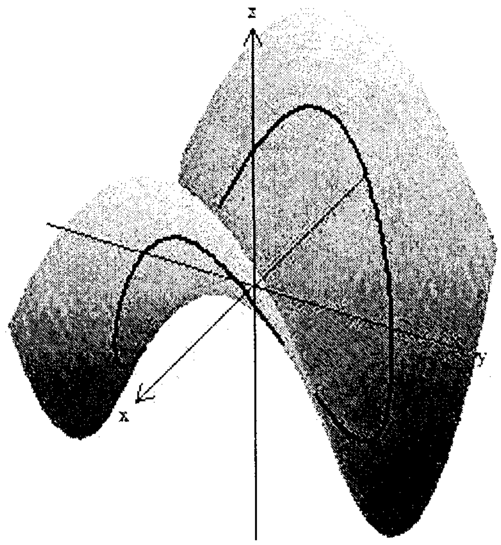
A

Questão 4. (2 pontos) Cada uma das figuras abaixo representa uma superfície e uma curva contida nessa superfície. Escolha, na lista abaixo, uma parametrização para cada uma dessas curvas. Escreva a parametrização escolhida no retângulo abaixo da figura correspondente.

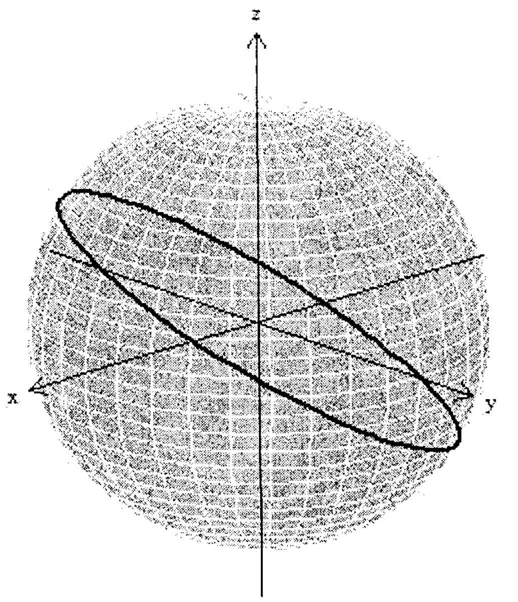
Atenção: Não é preciso justificar. Apenas as respostas serão consideradas.



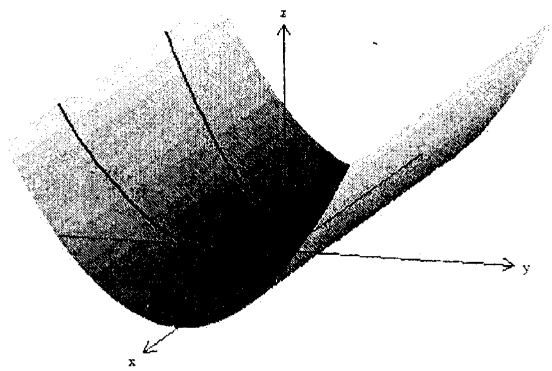
$\gamma(t) =$ (t cos t, t^2, t sen t)



$\gamma(t) =$ (cos t, sen t, cos 2t)



$\gamma(t) =$ (cos t, $\sqrt{2}$ sen t, cos t)



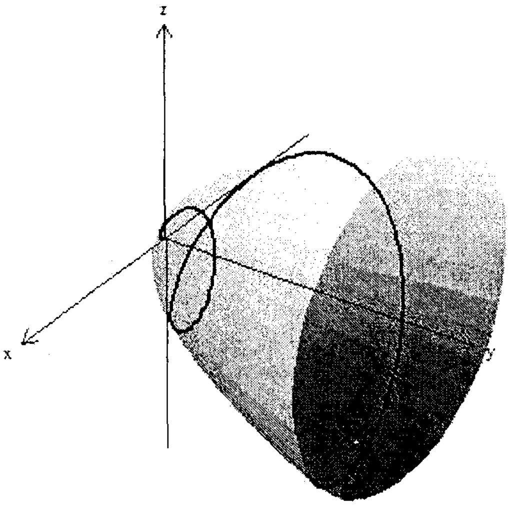
$\gamma(t) =$ (t, $-t^2$, t^4)

Lista de parametrizações:

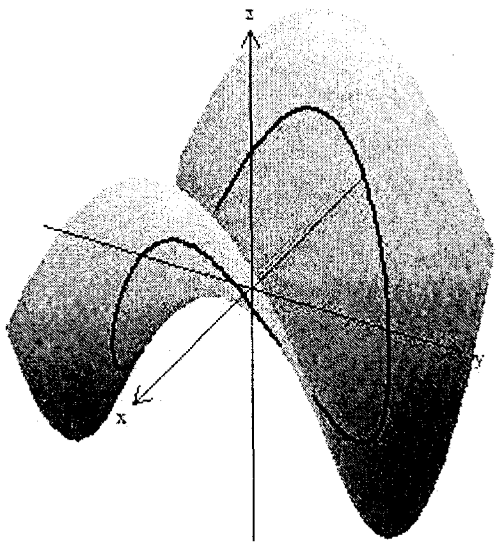
$\gamma(t) = (t\cos t, t^2, t \operatorname{sen} t)$	$\gamma(t) = (t, -t^2, t^4)$
$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \cos 2t)$	$\gamma(t) = (\cos t, \sqrt{2}\operatorname{sen} t, \cos t)$
$\gamma(t) = (t, -t^2, t^2 + t^4)$	$\gamma(t) = (t\cos t, t, t \operatorname{sen} t)$
$\gamma(t) = (\sqrt{2}\operatorname{sen} t, \cos t, \cos t)$	$\gamma(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^4 t)$

Questão 4. (2 pontos) Cada uma das figuras abaixo representa uma superfície e uma curva contida nessa superfície. Escolha, na lista abaixo, uma parametrização para cada uma dessas curvas. Escreva a parametrização escolhida no retângulo abaixo da figura correspondente.

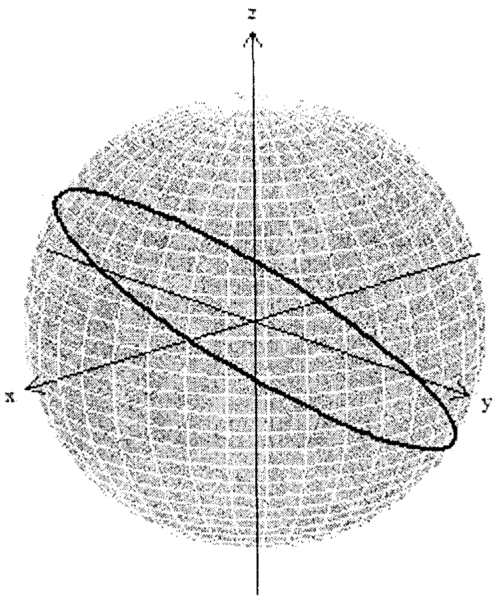
Atenção: Não é preciso justificar. Apenas as respostas serão consideradas.



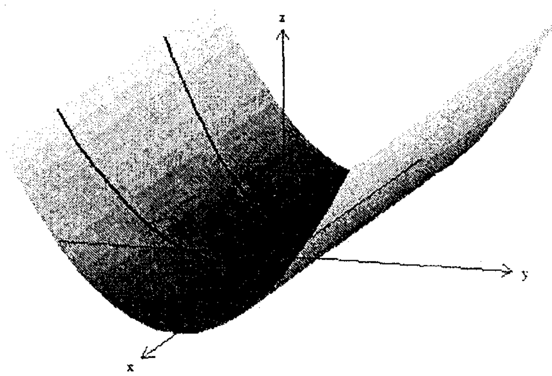
$\gamma(t) =$ $(t\cos t, t^2, t\,\text{sen}\,t)$



$\gamma(t) =$ $(\cos t, \text{sen}\,t, \cos 2t)$



$\gamma(t) =$ $(\cos t, \sqrt{2}\,\text{sen}\,t, \cos t)$



$\gamma(t) =$ $(t, -t^2, t^4)$

Lista de parametrizações:

$\gamma(t) = (t\cos t, t, t\,\text{sen}\,t)$	$\gamma(t) = (t, -t^2, t^2 + t^4)$
$\gamma(t) = (\cos t, -\,\text{sen}\,t, \text{sen}^4 t)$	$\gamma(t) = (\sqrt{2}\,\text{sen}\,t, \cos t, \cos t)$
$\gamma(t) = (t, -t^2, t^4)$	$\gamma(t) = (t\cos t, t^2, t\,\text{sen}\,t)$
$\gamma(t) = (\cos t, \sqrt{2}\,\text{sen}\,t, \cos t)$	$\gamma(t) = (\cos t, \text{sen}\,t, \cos 2t)$